УДК 517.9

Е. С. Половинкин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

О некоторых свойствах производных многозначных отображений

В работе исследованы новые классы производных от многозначных отображений, получены формулы их вычисления, установлены взаимосвязи с другими производными. Изучены свойства различных эпипроизводных и гипопроизводных и субдифференциалов от произвольных функций. Получены субдифференциальные свойства функции, представимой в виде разности двух выпуклых функций.

Ключевые слова: касательный конус, производная Абена многозначного отображения, производная Кларка, производная Пено, эпипроизводные функций, гипопроизводные функций, субдифференциал.

1. Введение

Проблему дифференцирования многозначных отображений $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ (где $\mathcal{P}(Y)$ – множество всех подмножеств некоторого банахова пространства Y) исследовали многие ученые, начиная со второй половины двадцатого века. Проблема состояла в том, что $\mathcal{P}(Y)$ не является линейным пространством. Тем не менее первоначальные подходы к дифференцированию многозначных отображений строились по аналогии с тем, как это делается для функций (см., например, [1, 2]).

Примеры аппроксимаций многозначных отображений около некоторой точки графика через касательные конусы были предложены в работах De Blasi F.S. [3], Б.Н. Пшеничного [4] и В.Ф. Демьянова – А.М. Рубинова [5]. Впервые понятие производной многозначного отображения, опирающееся на понятие касательного конуса к графику отображения, было введено в работах Ж.-П. Обена и автора (см., например, [6–9]).

В данной работе предложены новые классы производных с выпуклыми графиками от многозначных отображений. Установлены явные формулы вычисления новых производных, а также формулы вычисления эпипроизводных и гипопроизводных, эписубдифференциалов и гипосубдифференциалов функций как для общего случая, так и в случаях псевдолипшицевых многозначных отображений. Получены свойства и условия совпадения различных субдифференциалов для функций, представимых в виде разности двух выпуклых функций.

2. Касательные конусы

Напомним основные определения. Пусть X, Y — банаховы пространства. Через $\mathcal{P}(Y)$ будем обозначать множество всех подмножеств пространства Y, а через $\mathcal{K}(Y)$ ($\mathcal{F}(Y)$) — метрическое (топологическое) пространство, состоящее из компактов (непустых замкнутых подмножеств) из пространства Y с хаусдорфовым расстоянием $h(\cdot,\cdot)$ (с соответствующей топологией). *Расстоянием по Хаусдорфу между множествами* $A, B \subset X$ называется

$$h(A,B) \doteq \inf\{r \geqslant 0 \mid A \subset B + B_r(0),\ B \subset A + B_r(0)\},$$

где $B_r(a) \doteq \{x \in X \mid \|x-a\| < r\}$ — *открытый шар* радиуса $r > 0$ с центром в точке a. *Произведение на число, сумма и разность Минковского* определяются по формулам: $\lambda A = \{x \in X \mid x = \lambda a,\ a \in A\}$, $A + B \doteq \{x \in X \mid x = a + b, a \in A, b \in B\}$, $A \overset{*}{-} B \doteq \{x \in X \mid x + B \subset A\}$. $\varrho(x, A) \doteq \inf\{\|x-y\| \mid y \in A\}$ – *расстояние от точки до множества*. *Конусом* называется всякое непустое множество $T_0 \subset X$, у которого для каждого $x \in T_0$ справедливо включение $\lambda x \in T_0$ при всех $\lambda > 0$.

Напомним, что совокупность всех векторов, касательных к множеству A в некоторой точке a образуют следующий конус (см. [4,12]).

Нижним касательным конусом ко множеству $A \subset X$ *в точке* $a \in \overline{A}$ называется нижний топологический предел вида

$$T_H(A;a) \doteq \liminf_{\lambda \downarrow 0} \frac{A-a}{\lambda} \doteq \{v \in X \mid \lim_{\lambda \downarrow 0} \varrho(v,\ \lambda^{-1}(A-a)) = 0\}.$$

Следуя Булигану (G. Bouligand) [10] и Кларку [11], получаем другие конусы.

Верхним касательным конусом (иначе называют: контингентным конусом или конусом Булигана (см. [12, 14])) ко множеству $A \subset X$ *в точке* $a \in \overline{A}$ называется верхний топологический предел вида

$$T_B(A;a) \doteq \limsup_{\lambda \downarrow 0} \frac{A-a}{\lambda} \doteq \{v \in X \mid \liminf_{\lambda \downarrow 0} \varrho(v,\ \lambda^{-1}(A-a)) = 0\}.$$

Касательным конусом Кларка ко множеству $A \subset X$ *в точке* $a \in \overline{A}$ называется

$$T_C(A;a) \doteq \liminf_{\lambda \downarrow 0,\, x \to a} \frac{A-x}{\lambda} \doteq \{v \in X \mid \lim_{\lambda \downarrow 0,\, x \to a} \varrho(v,\ \lambda^{-1}(A-x)) = 0\},$$

где стремление $x \to a$ совершается по множеству A.

Очевидны включения $T_C(A;a) \subset T_H(A;a) \subset T_B(A;a)$. Если же множество A выпукло (или локально выпукло), то имеет место равенство всех указанных конусов.

Важнейшим свойством касательного конуса Кларка $T_C(A;a)$ является его выпуклость (см., например, [11]). Недостатком касательного конуса Кларка является его малость по сравнению с нижним и тем более с верхним касательным конусом. Недостатком нижнего и верхнего касательных конусов является отсутствие гарантированной выпуклости.

Для устранения последнего недостатка в работе [8] был указан алгоритм, по которому во всяком касательном конусе можно выбрать выпуклый подконус.

Лемма 1. [8] *Для всякого замкнутого конуса* T_0 *множество* $T_0 \overset{*}{-} T_0$ *является его выпуклым замкнутым подконусом. В случае, когда замкнутый конус* T_0 *является выпуклым, то справедливо равенство* $T_0 = T_0 \overset{*}{-} T_0$.

В результате приходим к следующим понятиям, являющимся уточнением понятий, введенных в работах [8,15].

Определение 1. Первым асимптотическим нижним (первым асимптотическим верхним) касательным конусом ко множеству A в точке $a \in \overline{A}$ называется множество

$$T_{AH1}(A;a) \doteq T_H(A;a) \overset{*}{-} T_H(A;a) \quad (T_{AB1}(A;a) \doteq T_B(A;a) \overset{*}{-} T_B(A;a)).$$

Определение 2. Вторым асимптотическим нижним касательным конусом ко множеству A в точке $a \in \overline{A}$ называется множество $T_{AH2}(A;a) \doteq T_{AH1}(A;a) \bigcap T_{AB1}(A;a)$.

Определение 3. Вторым асимптотическим верхним касательным конусом ко множеству A в точке $a \in \overline{A}$ называется множество $T_{AB2}(A;a) \doteq \overline{T_{AH1}(A;a) + T_{AB1}(A;a)}$.

Аналогично работе [8] доказывается

Теорема 1. *Конусы* $T_{AH1}(A;a)$, $T_{AH2}(A;a)$, $T_{AB1}(A;a)$ *и* $T_{AB2}(A;a)$ *выпуклы и замкнуты. При этом справедливы включения*

$$T_{AH1}(A;a) \subset T_H(A;a), \quad T_{AB1}(A;a) \subset T_B(A;a),$$

$$T_C(A;a) \subset T_{AH2}(A;a) \subset T_{AH1}(A;a) \subset T_{AB2}(A;a) \subset T_B(A;a),$$

причем включения могут быть строгими.

Последнее утверждение продемонстрируем на примере.

Пример 1. Рассмотрим множество $A = \mathrm{epi} f \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geqslant f(x), x \in [-2,2]\}$, т.е. A есть надграфик некоторой функции f. Здесь функция $f(x) = 0$ при всех $x \in [-2,0]$

и $f(2) = -2$. На отрезке $[0,2]$ функция f является непрерывной ломаной линией, заключенной между лучом $y = -x$ и лучом $y = -\operatorname{tg}(\pi/10)\,x$ при $x \geqslant 0$. При этом отрезки каждой ломаной имеют одинаковые по абсолютной величине углы наклона к оси $0x$, равные $\operatorname{arctg} 10$, причем при монотонном убывании x от 2 до 0 знаки величин углов чередуются, начиная с минуса. Введем обозначение

$$K(\alpha,\beta) \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r\cos\varphi,\, y = r\sin\varphi, r \geqslant 0, \varphi \in [\alpha,\beta]\}.$$

Тогда касательные конусы ко множеству A в точке $a = 0$ удовлетворяют равенствам: $T_H(A;0) = K(-\pi/10,\pi)$, $T_B(A;0) = K(-\pi/4,\pi)$, $T_{AH1}(A;0) = T_{AB2}(A;0) = K(0, 9\pi/10)$, $T_{AH2}(A;0) = T_{AB1}(A;0) = K(0,3\pi/4)$ и $T_C(A;0) = K(\operatorname{arctg} 10, \pi - \operatorname{arctg} 10)$.

В дальнейшем для краткости каждый касательный конус будем обозначать общим символом $T_L(A;a)$, где индекс L соответственно принимает одно из значений $\{B, H, C, AH1, AH2, AB1, AB2\}$.

3. Производные от многозначных отображений

Для каждого касательного конуса, следуя [6, 7], можно определить соответствующую производную от многозначного отображения, которую будем называть аналогично названию конуса, т.е. верхней (B), нижней (H), Кларка (C) и т.д. производной.

Определение 4. Пусть $L \in \{B, H, C, AH1, AH2, AB1, AB2\}$. L-производной от отображения $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ в точке $z = (x,y) \in \overline{\operatorname{graph} F} \subset Z \doteq X \times Y$ называется отображение $D_L F(z) : X \to \mathcal{P}(Y)$ вида $D_L F(z)(u) \doteq \{v \in Y \mid (u,v) \in T_L(\operatorname{graph} F; z)\}$, $u \in X$.

Как обычно, определяем $\operatorname{dom} D_L F(z) \doteq \{u \in X \mid D_L F(z)(u) \neq \emptyset\}$.

Из определения 4 и теоремы 1 получаем для $\forall\, u \in X$ включения

$$D_C F(z)(u) \subset D_{AH2} F(z)(u) \subset D_{AH1} F(z)(u) \subset D_{AB2} F(z)(u) \subset D_B F(z)(u), \tag{1}$$

$$D_{AB1} F(z)(u) \subset D_{AB2} F(z)(u),\; D_{AH1} F(z)(u) \subset D_H F(z)(u) \subset D_B F(z)(u).$$

Напомним некоторые свойства производных многозначных отображений.

Предложение 1. Для отображения $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ в точке $z_0 = (x_0, y_0) \in \overline{\operatorname{graph} F}$ верхняя, нижняя производные и производная Кларка удовлетворяют равенствам

$$D_B F(z_0)(u) = \{v \in Y \mid \liminf_{\substack{\lambda, x:\\ \lambda\downarrow 0, x \to u}} \varrho_Y(v, \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda x) - y_0)) = 0\}, \tag{2}$$

$$D_H F(z_0)(u) = \{v \in Y \mid \lim_{\lambda\downarrow 0} (\liminf_{x \to u} \varrho_Y(v, \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda x) - y_0))) = 0\}, \tag{3}$$

$$D_C F(z_0)(u) = \liminf_{\substack{\lambda, (x,y):\\ \lambda\downarrow 0,\ (x,y) \overset{\operatorname{graph} F}{\to} z_0}} (\limsup_{\bar u \to u} \lambda^{-1}(F(x + \lambda \bar u) - y)). \tag{4}$$

Для отображения $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$, точки $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\operatorname{graph} F}$ и произвольных чисел $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ определим отображение (где $\alpha \doteq (\alpha_1, \alpha_2)$):

$$F_\alpha : \overline{B_{\alpha_1}(x_0)} \to \mathcal{P}(Y), \quad F_\alpha(x) \doteq F(x) \cap \overline{B_{\alpha_2}(y_0)}. \tag{5}$$

Предложение 2. Для отображений $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ и $F_\alpha\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ из (5) при всех $L \in \{B, H, C, AH1,\ AH2, AB1, AB2\}$ справедливы равенства

$$D_L F(z_0)(u) = D_L F_\alpha(z_0)(u), \quad \forall\, u \in X.$$

Определение 5. Отображение $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ называется псевдолипшицевым [16] около точки $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in X \times Y$, если существуют числа $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > \varrho(y_0, F(x_0))$ и число $l > 0$ такие, что для всех $x_1, x_2 \in B_{\alpha_1}(x_0)$ справедливо включение

$$F(x_1) \bigcap \overline{B_{\alpha_2}(y_0)} \subset F(x_2) + l\|x_1 - x_2\| \overline{B_1(0)}.$$

Если в определении 5 $\alpha_2 = +\infty$, то отображение F называется *липшицевым в окрестности* точки x_0.

Предложение 3. Пусть отображение $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ псевдолипшицево около точки $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\operatorname{graph} F}$. Тогда для любого $u \in X$ справедливы формулы

$$D_B F(z_0)(u) = \limsup_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda u) - y_0), \tag{6}$$

$$D_H F(z_0)(u) = \liminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda u) - y_0), \tag{7}$$

$$D_C F(z_0)(u) = \liminf_{\substack{\lambda,(x,y):\\ \lambda\downarrow 0,\ (x,y)\overset{\operatorname{graph} F}{\to} z_0}} \lambda^{-1}(F(x + \lambda u) - y)).$$

Приступим к вычислению новых производных.

Предложение 4. Для отображения $F\colon X \to \mathcal{P}(Y)$ в точке $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\operatorname{graph} F}$ первая асимптотическая нижняя (первая асимптотическая верхняя) производная вычисляется по формуле

$$D_{AH1} F(z_0)(u) = \bigcap_{\bar{u} \in \operatorname{dom} D_H F(z_0)} [D_H F(z_0)(u + \bar{u}) \overset{*}{-} D_H F(z_0)(\bar{u})],$$

$$(D_{AB1} F(z_0)(u) = \bigcap_{\bar{u} \in \operatorname{dom} D_B F(z_0)} [D_B F(z_0)(u + \bar{u}) \overset{*}{-} D_B F(z_0)(\bar{u})]).$$

Теорема 2. *Пусть отображение $F\colon X \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условию псевдолипшицевости в точке $z_0 \doteq (x_0, y_0) \in \overline{\operatorname{graph} F}$ с константой $l > 0$. Тогда множества $D_B F(z_0)(u)$ не пусты при всех $u \in X$, а отображение $u \to D_B F(z_0)(u)$ удовлетворяет условию Липшица с той же константой $l > 0$.*

Доказательство. По определению 5 найдутся числа $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ такие, что отображение F удовлетворяет условию псевдолипшицевости в точке графика $z_0 \doteq (x_0, y_0)$ на множестве $\overline{B_{\alpha_1}(x_0)}$. Пусть $u \in X$ и $\delta > 0$ такие, что $\delta\|u\| \leqslant \alpha_1$. Для всех $\lambda \in (0, \delta)$ определим функцию по формуле $\rho(\lambda) \doteq \varrho(y_0, F(x_0 + \lambda u))$. В силу псевдолипшицевости получаем включения $y_0 \in F_\alpha(x_0) \subset F(x_0 + \lambda u) + \lambda l\|u\|\overline{B_1(0)}$, из которых следует, что $\rho(\lambda) \le \lambda l\|u\|$. Выберем произвольную точку $f(\lambda)$ из непустого множества

$$F(x_0 + \lambda u) \cap (y_0 + \rho(\lambda)\overline{B_1(0)}).$$

Получаем следующие неравенства:

$$\|f(\lambda) - y_0\| \leqslant \rho(\lambda) \leqslant l\lambda\|u\|,$$

откуда следует неравенство $\lambda^{-1}\|f(\lambda) - y_0\| \leqslant l\|u\|$ при всех $\lambda \in (0, \delta)$. Следовательно, существует последовательность $\lambda_k \downarrow 0$ такая, что последовательность $v_k \doteq \lambda_k^{-1}(f(\lambda_k) - y_0)$ сходится к некоторому вектору v. Так как $v_k \in \lambda_k^{-1}(F(x_0 + \lambda_k u) - y_0)$, то получаем, что $v \in D_B F(z_0)(u)$. Итак, $\operatorname{dom} D_B F(z_0) = X$.

Пусть теперь $u_1, u_2 \in X$ и $v_1 \in D_B F(z_0)(u_1)$. Докажем, что существует $v_2 \in D_B F(z_0)(u_2)$ такой, что $\|v_2 - v_1\| \leqslant l\|u_2 - u_1\|$. Это и будет означать выполнение условия Липшица для отображения $u \to D_B F(z_0)(u)$. Пусть число $\delta_1 > 0$ таково, что $\delta_1\|u_1\| \leqslant \alpha_1$, $\delta_1\|u_2\| \leqslant \alpha_1$, $\delta_1\|v_1\| \leqslant \alpha_2$. При каждом $\lambda \in (0, \delta_1]$ определим $\varphi(\lambda) \doteq \varrho(y_0 + \lambda v_1, F(x_0 + \lambda u_2))$, а также $\psi(\lambda)$ как произвольную точку из множества $F(x_0 + \lambda u_2) \cap (y_0 + \lambda v_1 + \varphi(\lambda)\overline{B_1(0)})$. Так как $v_1 \in D_B F(z_0)(u_1)$, то существуют $\lambda_k \downarrow 0$ и $w_k \in \lambda_k^{-1}(F_\alpha(x_0 + \lambda_k u_1) - y_0)$ такие, что $\lim_{k\to\infty} w_k = v_1$. Т.е. справедливы включения $y_0 + \lambda_k w_k \in F_\alpha(x_0 + \lambda_k u_1)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу псевдолипшицевости $y_0 + \lambda_k v_1 \in$

$$\in \lambda_k(v_1 - w_k) + F_\alpha(x_0 + \lambda_k u_1) \subset F(x_0 + \lambda_k u_2) + \lambda_k(\|v_1 - w_k\| + l\|u_1 - u_2\|)\overline{B_1(0)}.$$

Отсюда получаем неравенство $\varphi(\lambda_k) \leq \lambda_k(\|v_1 - w_k\| + l\|u_1 - u_2\|)$. В итоге получаем включения

$$\lambda_k^{-1}(\psi(\lambda_k) - y_0) \in v_1 + \lambda_k^{-1}\varphi(\lambda_k)\overline{B_1(0)} \subset v_1 + (l\|u_1 - u_2\| + \|w_k - v_1\|)\overline{B_1(0)},$$

означающее ограниченность последовательности $\{\lambda_k^{-1}(\psi(\lambda_k) - y_0)\}$. Следовательно, у неё найдётся предельная точка v_2, которая удовлетворяет включению $v_2 \in v_1 + l\|u_1 - u_2\|\overline{B_1(0)}$, а из определения функции $\psi(\lambda)$ принадлежит множеству $D_BF(z_0)(u_2)$.

Следствие 1. *Пусть отображение $F\colon X \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^m)$ и точка $z_0 \doteq (x_0, y_0)$ таковы, что график $\mathrm{graph}F$ является локально замкнутым и локально выпуклым множеством в точке $z_0 \in \overline{\mathrm{graph}F}$, причём $x_0 \in \mathrm{dom}F$. Тогда для любого $u \in X$ множества $D_LF(z_0)(u)$, $\forall\, L \in \{B, H, C, AH1, AH2, AB1, AB2\}$ непусты, равны между собой, вычисляются по формулам (6) или (7), а отображение $u \to D_LF(z_0)(u)$ удовлетворяет условию Липшица.*

4. Эпи- и гипопроизводные функций

На основе определённых в п. 1 касательных конусов можно вводить различные аппроксимации произвольных функций. Для этого мы введём понятия L-производных скалярной функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ по направлениям и L-субдифференциалов этой функции по аналогии с тем, как это делали Р.Т .Рокафеллар [17], Ф. Кларк [18] для касательного конуса Кларка, а также Ж.-П. Обен [6] для контингентного (т.е. верхнего касательного) конуса.

Напомним, что *эффективным множеством* скалярной функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ (где $\overline{\mathbb{R}^1} \doteq \mathbb{R}^1 \bigcup\{\pm\infty\}$) называется множество $\mathrm{dom}f \doteq \{x \in X \mid f(x) \neq \pm\infty\}$, *надграфиком* («эпиграфиком») функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ называется множество

$$\mathrm{epi}f \doteq \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} \mid \alpha \geqslant f(x),\, x \in \mathrm{dom}f\},$$

подграфиком («гипографиком») функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ называется множество

$$\mathrm{hypo}f \doteq \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}^1 \mid \alpha \leqslant f(x),\, x \in \mathrm{dom}f\}.$$

Определение 6. Для всякой функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ и для всякого $L \in \{B,\, H,\, C,\, AH1,\, AH2,\, AB1\, AB2\}$ L-эпипроизводной (L-гипопроизводной) функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \mathrm{dom}f$ по направлению $u \in X$ называется величина

$$D_L^+ f(x_0)(u) \doteq \inf\{\alpha \in \mathbb{R}^1 \mid (u, \alpha) \in T_L(\mathrm{epi}f; (x_0, f(x_0)))\},$$

$$(D_L^- f(x_0)(u) \doteq \sup\{\alpha \in \mathbb{R}^1 \mid (u, \alpha) \in T_L(\mathrm{hypo}f; (x_0, f(x_0)))\}).$$

Отсюда и в силу полученных ранее формул (2), (3), (4) получаем

$$D_B^+ f(x_0)(u) = \liminf_{\lambda\downarrow 0, \bar{u}\to u} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda\bar{u}) - f(x_0)),$$

$$D_H^+ f(x_0)(u) = \limsup_{\lambda\downarrow 0}(\liminf_{\bar{u}\to u} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda\bar{u}) - f(x_0))),$$

$$D_C^+ f(x_0)(u) = \limsup_{\substack{\lambda, x, \bar{u}:\\ \lambda\downarrow 0, \bar{u}\to u, x\to x_0}} \lambda^{-1}(f(x + \lambda\bar{u}) - f(x))).$$

Если же функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ является липшицевой в окрестности точки x_0, то в силу предложения 3 формулы для эпипроизводных этой функции принимают вид

$$D_B^+ f(x_0)(u) = \liminf_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)), \tag{8}$$

$$D_H^+ f(x_0)(u) = \limsup_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)), \tag{9}$$

$$D_C^+ f(x_0)(u) = \limsup_{\substack{\lambda, x:\\ \lambda\downarrow 0, x\to x_0}} \lambda^{-1}(f(x+\lambda u) - f(x)), \tag{10}$$

причем первые две хорошо известны в теории функций под названием *нижней и верхней производных Дини* (см., например, [5]).

Замечание. В случае, когда эпипроизводные функции по данному направлению u совпадают, т.е. $D_B^+\ f(x_0)(u) = D_H^+\ f(x_0)(u)$, говорят, что существует *классическая производная функции по направлению*, которую обозначают $f'(x_0, u) \doteq \lim\limits_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0+\lambda u) - f(x_0))$. Например, у любой выпуклой функции в точке $x_0 \in \mathrm{dom} f$ существует (быть может, равная $\pm\infty$) классическая производная по любому направлению.

Полагая, что функция $f\colon\ X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки $x_0 \in \mathrm{dom} f$, вычислим значения эпипроизводных $D_{AH1}^+ f(x_0)(u)$, $D_{AB1}^+ f(x_0)(u)$, $D_{AH2}^+ f(x_0)(u)$, $D_{AB2}^+ f(x_0)(u)$ и сравним их с гипопроизводными.

В силу того, что надграфик отображения $D_{AH1}^+ f(x_0) : X \to \mathbb{R}^1$ является выпуклым замкнутым конусом, представимым по определению 1 в виде разности Минковского нижнего касательного конуса (ко множеству $\mathrm{epi} f$) с самим собой, и так как нижний касательный конус к $\mathrm{epi} f$ является надграфиком функции $u \to D_H^+ f(x_0)(u)$, то, следуя работе [12], получаем, что функция $u \to D_{AH1}^+ f(x_0)(u)$ является «эпиразностью» функции $u \to D_H^+ f(x_0)(u)$ с собой, и в силу предложения 4.8.1 из [12] получаем формулу

$$D_{AH1}^+ f(x_0)(u) = \sup_{w\in X} (D_H^+ f(x_0)(u+w) - D_H^+ f(x_0)(w)), \tag{11}$$

т.е.

$$\begin{aligned} D_{AH1}^+ f(x_0)(u) = \sup_{w\in X} \{&\limsup_{\lambda\downarrow 0} (\lambda^{-1}(f(x_0+\lambda(u+w)) - f(x_0)))- \\ &-\limsup_{\lambda\downarrow 0} (\lambda^{-1}(f(x_0+\lambda w) - f(x_0)))\} \le \\ \le \sup_{w\in X} \{&\limsup_{\lambda\downarrow 0} (\lambda^{-1}(f(x_0+\lambda(u+w)) - f(x_0+\lambda w)))\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Последняя верхняя оценка для $D_{AH1}^+ f(x_0)(u)$ является выпуклой и положительно однородной функцией, задающей иную аппроксимацию функции f. Эта аппроксимация была получена Ж.-П. Пено (J.-P. Penot) в работе [19], в силу чего функцию

$$D_P^+ f(x_0)(u) \doteq \sup_{w\in X} \{\limsup_{\lambda\downarrow 0} (\lambda^{-1}(f(x_0+\lambda(u+w)) - f(x_0+\lambda w)))\} \tag{13}$$

называют $P-$ эпипроизводной или эпипроизводной Мишеля–Пено от липшицевой функции f в точке x_0 по направлению u.

Кроме того, формула (13) означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется точка $w_\varepsilon \in X$ такая, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} D_P^+ f(x_0)(u) &\le \limsup_{\lambda\downarrow 0} (\lambda^{-1}(f(x_0+\lambda(u+w_\varepsilon)) - f(x_0+\lambda w_\varepsilon))) + \varepsilon = \\ &= \lim_{\lambda\downarrow 0} \sup_{0<t<\lambda} (t^{-1}(f(x_0+tw_\varepsilon+tu) - f(x_0+tw_\varepsilon))) + \varepsilon \le \\ &\le \lim_{\lambda\downarrow 0} \sup_{0<t<\lambda} \sup_{\|x-x_0\|\le\lambda\|w_\varepsilon\|} (t^{-1}(f(x+tu) - f(x))) + \varepsilon = D_C^+ f(x_0)(u) + \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ и из (12) получаем, что

$$D_{AH1}^+ f(x_0)(u) \le D_P^+ f(x_0)(u) \le D_C^+ f(x_0)(u), \quad \forall\ u \in X. \tag{14}$$

Аналогично тому, как получили формулу (11), получаем формулу для $D_{AB1}^+ f(x_0)(u)$ вида

$$D_{AB1}^+ f(x_0)(u) = \sup_{w\in X} (D_B^+ f(x_0)(u+w) - D_B^+ f(x_0)(w)), \tag{15}$$

откуда следует, что

$$D^+_{AB1}f(x_0)(u) = \sup_{w\in X}\{\liminf_{\lambda\downarrow 0}(\lambda^{-1}(f(x_0+\lambda(u+w))-f(x_0)))-$$

$$-\liminf_{\lambda\downarrow 0}(\lambda^{-1}(f(x_0+\lambda w)-f(x_0)))\}\leq$$

$$\leq \sup_{w\in X}\{\limsup_{\lambda\downarrow 0}(\lambda^{-1}(f(x_0+\lambda(u+w))-f(x_0+\lambda w)))\}\doteq D^+_P f(x_0)(u). \tag{16}$$

Последнее неравенство следует из того, что для любых функций g, h справедливо неравенство $\liminf\limits_{\lambda\downarrow 0}(g(\lambda)+h(\lambda))\leq \liminf\limits_{\lambda\downarrow 0} g(\lambda)+\limsup\limits_{\lambda\downarrow 0} h(\lambda)$.

Из определения 2 конуса $T_{AH2}(A;a)$ немедленно следует формула

$$D^+_{AH2}f(x_0)(u) = \max(D^+_{AH1}f(x_0)(u); D^+_{AB1}f(x_0)(u)). \tag{17}$$

Из неравенств (14), (16) и формулы (17) получаем неравенство: $D^+_{AH2}f(x_0)(u)\leq D^+_P f(x_0)(u)$.

Опишем теперь эпипроизводную $D^+_{AB2}f(x_0)(u)$. По определению 3 надграфик этой функции $u\to D^+_{AB2}f(x_0)(u)$ является суммой Минковского двух выпуклых конусов, каждый из которых является надграфиком некоторой выпуклой функции. Получаемая таким образом функция в выпуклом анализе называется *инфимальной конволюцией* (см., например, [20]). Первая из двух функций есть функция $u\to D^+_{AH1}f(x_0)(u)$, а вторая $u\to D^+_{AB1}f(x_0)(u)$. Используя свойства инфимальной конволюции, получаем, что значения $D^+_{AB2}f(x_0)(u)$ вычисляются по формуле

$$D^+_{AB2}f(x_0)(u) = \inf_{v\in X}(D^+_{AB1}f(x_0)(v)+D^+_{AH1}f(x_0)(u-v)). \tag{18}$$

Аналогично вычислению эпипроизводных для липшицевой функции $f\colon X\to\overline{\mathbb{R}}$ получаются формулы для ее гипопроизводных.

$$D^-_B f(x_0)(u) = \limsup_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}(f(x_0+\lambda u)-f(x_0)), \tag{19}$$

$$D^-_H f(x_0)(u) = \liminf_{\lambda\downarrow 0}\lambda^{-1}(f(x_0+\lambda u)-f(x_0)), \tag{20}$$

$$D^-_C f(x_0)(u) = \liminf_{\substack{\lambda, x:\\ \lambda\downarrow 0, x\to x_0}}\lambda^{-1}(f(x+\lambda u)-f(x)), \tag{21}$$

$$D^-_{AH1}f(x_0)(u) = \inf_{w\in X}(D^-_H f(x_0)(u+w)-D^-_H f(x_0)(w))\geq \tag{22}$$

$$\geq \inf_{w\in X}\{\liminf_{\lambda\downarrow 0}(\lambda^{-1}(f(x_0+\lambda(u+w))-f(x_0+\lambda w)))\}\doteq D^-_P f(x_0)(u), \tag{23}$$

причем последняя формула задает P-гипопроизводную (или гипопроизводную Мишеля–Пено) этой функции в точке x_0 по направлению u, которая была введена Ж.-П. Пено в работе [19]. Аналогичным образом получаем

$$D^-_{AH2}f(x_0)(u) = \min(D^-_{AH1}f(x_0)(u); D^-_{AB1}f(x_0)(u)), \tag{24}$$

$$D^-_{AB2}f(x_0)(u) = \sup_{v\in X}(D^-_{AB1}f(x_0)(v)+D^-_{AH1}f(x_0)(u-v)),$$

где

$$D^-_{AB1}f(x_0)(v) = \inf_{w\in X}(D^-_B f(x_0)(v+w)-D^-_B f(x_0)(w))\geq D^-_P f(x_0)(v), \tag{25}$$

так как для любых функций g, h справедливо неравенство

$$\limsup_{\lambda\downarrow 0}(g(\lambda)+h(\lambda))\geq \limsup_{\lambda\downarrow 0} g(\lambda)+\liminf_{\lambda\downarrow 0} h(\lambda).$$

Из выражений (23), (24) и (25) следует, что $D^-_{AH2}f(x_0)(u) \geq D^-_P f(x_0)(u)$ при всех $u \in X$.

Лемма 2. *Для любой функции $f\colon X \to \mathbb{R}^1$, липшицевой в окрестности точки $x_0 \in \mathrm{dom} f$, и для любого $L \in \{C, P, AH1, AH2, AB1, AB2\}$ каждая функция $u \to D^+_L f(x_0)(u)$ (или функция $u \to D^-_L f(x_0)(u)$) является положительно однородной и выпуклой (или вогнутой) функцией.*

Доказательство очевидно следует из того, что надграфик (или соответственно подграфик) этой функции является выпуклым конусом.

Лемма 3. *Для липшицевых функций их эпи- и гипо-производные по любому направлению $u \in X$ удовлетворяют равенствам*

$$D^+_H f(x_0)(u) = D^-_B f(x_0)(u), \quad D^+_B f(x_0)(u) = D^-_H f(x_0)(u), \tag{26}$$

$$D^+_{AH1} f(x_0)(u) = -D^-_{AB1} f(x_0)(-u), \quad D^+_{AB1} f(x_0)(u) = -D^-_{AH1} f(x_0)(-u), \tag{27}$$

$$D^+_L f(x_0)(u) = -D^-_L f(x_0)(-u) \quad \forall L \in \{C, P, AH2, AB2\}. \tag{28}$$

Доказательство. Первые два равенства в (26) очевидно следуют из формул (8), (9), (19) и (20). Из формул (11) и (25) легко получаем левое равенство (27), а из формул (15) и (22) легко получаем правое равенство (27). Из формул (10) и (21) для любого $u \in X$, делая замену $y = x + \lambda u$, докажем равенство в (28) при $L = C$:

$$D^+_C f(x_0)(u) = \limsup_{\substack{\lambda, x:\\ \lambda\downarrow 0, x\to x_0}} \lambda^{-1}(f(x+\lambda u) - f(x)) = -\liminf_{\substack{\lambda, x:\\ \lambda\downarrow 0, x\to x_0}} \lambda^{-1}(f(x) - f(x+\lambda u)) =$$

$$= -\liminf_{\substack{\lambda, y:\\ \lambda\downarrow 0, y\to x_0}} \lambda^{-1}(f(y-\lambda u) - f(y)) = -D^-_C f(x_0)(-u).$$

Аналогично проверяются равенства в (28) при остальных L.

Определение 7. Для любого $L \in \{H, B, C, AH1, AH2, AB1, AB2, P\}$ скажем, что L-эписубдифференциалом (L-гипосубдифференциалом) функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \mathrm{dom} f$ называется следующее множество в сопряжённом с X пространстве X^*:

$$\partial^+_L f(x_0) \doteq \{p \in X^* \mid \langle p, x\rangle \leqslant D^+_L f(x_0)(x),\ \forall\, x \in X,\},$$

$$(\partial^-_L f(x_0) \doteq \{p \in X^* \mid \langle p, x\rangle \geqslant D^-_L f(x_0)(x),\ \forall\, x \in X\}).$$

Теорема 3. *Для липшицевых функций их субдифференциалы удовлетворяют равенствам:*

$$\partial^+_C f(x_0) = \partial^-_C f(x_0), \quad \partial^+_P f(x_0) = \partial^-_P f(x_0), \quad \partial^+_{AH1} f(x_0) = \partial^-_{AB1} f(x_0), \tag{29}$$

$$\partial^+_{AB1} f(x_0) = \partial^-_{AH1} f(x_0), \quad \partial^+_{AH2} f(x_0) = \partial^-_{AH2} f(x_0), \quad \partial^+_{AB2} f(x_0) = \partial^-_{AB2} f(x_0). \tag{30}$$

Доказательство. Равенства (29) и (30) легко следуют из равенств (28) и (27). Покажем это на примере субдифференциала Кларка:

$$\partial^+_C f(x_0) \doteq \{p \in X^* \mid \langle p, x\rangle \leqslant D^+_C f(x_0)(x),\ \forall\, x \in X\} =$$

$$= \{p \in X^* \mid \langle p, x\rangle \leqslant -D^-_C f(x_0)(-x),\ \forall\, x \in X\} =$$

$$= \{p \in X^* \mid \langle p, -x\rangle \geqslant D^-_C f(x_0)(-x),\ \forall\, x \in X\} = \partial^-_C f(x_0).$$

Замечание. Из леммы 3 и теоремы 3 следует, что для изучения аппроксимаций липшицевых функций достаточно ограничиться рассмотрением лишь эпипроизводных и эписубдифференциалов этих функций.

Теорема 4. *Для липшицевых функций справедливы соотношения*

$$+\infty \geqslant D^+_C f(x_0)(u) \geqslant D^+_P f(x_0)(u) \geqslant D^+_{AH2} f(x_0)(u) \geqslant$$

$$\geqslant D^+_{AH1} f(x_0)(u) \geqslant D^+_{AB2} f(x_0)(u) \geqslant D^+_B f(x_0)(u) \geqslant -\infty. \tag{31}$$

$$\partial_C^+ f(x_0) \supset \partial_P^+ f(x_0) \supset \partial_{AH2}^+ f(x_0) \supset \partial_{AH1}^+ f(x_0) \supset \partial_{AB2}^+ f(x_0), \tag{32}$$

причем каждая эпипроизводная и каждый эписубдифференциал являются различными объектами, т.е. каждое из неравенств и каждое из включений могут быть строгими.

Доказательство. Неравенства (31) следуют из включения (1) и выражений (12) – (18), (23). Из неравенств (31) очевидно следуют включения (32). То, что эти неравенства и включения могут быть строгими, покажем на примерах 2 и 3.

Пример 2. Рассмотрим непрерывную функцию $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}^1$, описанную в примере 1. Из решения примера 1 получаем, что

$D_C^+ f(0)(u) = 10|u|,\ \forall\ u \in \mathbb{R}^1$; $D_{AH1}^+ f(0)(u) = 0,\ u \geq 0,\ D_{AH1}^+ f(0)(u) = -\operatorname{tg}(\frac{\pi}{10})u,\ u \leq 0$; $D_{AH2}^+ f(0)(u) = 0,\ u \geq 0,\ D_{AH2}^+ f(0)(u) = |u|,\ u \leq 0$; $D_{AB1}^+ f(0)(u) = D_{AH2}^+ f(0)(u),\ \forall\ u \in \mathbb{R}^1$; $D_{AB2}^+ f(0)(u) = D_{AH1}^+ f(0)(u),\ \forall\ u \in \mathbb{R}^1$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^1$ такую, что $f(x) = 0$ при $x \in [-1, 0]$ и $f(1) = -1$. На отрезке $[0, 1]$ функция f является непрерывной ломаной линией, заключенной между лучами $y = x$ и $y = -x$, вида $f(x) \doteq (-1)^{k+1}(10x - 9x_k)$ при всех $x \in [x_{k+1}; x_k]$, где $x_k = (\frac{9}{11})^k$ и $k = 0, 1, 2, \ldots$

Для указанной функции легко получаем, что $D_C^+ f(0)(u) = 10|u|,\ \forall\ u \in \mathbb{R}^1$;

$D_{AH1}^+ f(0)(u) = u,\ \forall\ u \geq 0$, $D_{AH1}^+ f(0)(u) = 0,\ \forall\ u < 0$; $D_{AB1}^+ f(0)(u) = 0,\ \forall\ u \geq 0$,

$D_{AB1}^+ f(0)(u) = |u|,\ \forall\ u < 0$; $D_{AH2}^+ f(0)(u) = |u|,\ \forall\ u \in \mathbb{R}^1$; $D_{AB2}^+ f(0)(u) = 0\ \forall\ u \in \mathbb{R}^1$.

В примерах 2 и 3 также справедливо равенство $D_C^+ f(0)(u) = D_P^+ f(0)(u),\ \forall\ u \in \mathbb{R}^1$, которое не совсем очевидно. Докажем его для примера 3. Покажем, что для каждого $u \in \mathbb{R}^1$ можно подобрать точку w и последовательность $\lambda_n \to 0$ так, чтобы точки $\lambda_n(u + w)$ и $\lambda_n w$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ лежали на одном отрезке ломаного графика функции f.

Если $u > 0$, то выбираем w и $\lambda_n > 0$ из решения уравнений: $\lambda_n(u + w) = x_{2n+1}$, $\lambda_n w = x_{2n+2}$, т.е. $\lambda_n = \frac{2}{9u} x_{2n+2}$; $w = \frac{9}{2}u$. При этом $D_P^+ f(0)(u) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}(f(0 + \lambda_n(u + w)) - f(0 + \lambda_n w)) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}(x_{2n+1} + x_{2n+2}) = 10u = D_C^+ f(0)(u)$.

Если $u < 0$, то выбираем w и $\lambda_n > 0$ из решения уравнений: $\lambda_n(u + w) = x_{2n+1}, \lambda_n w = x_{2n}$, т.е. $\lambda_n = \frac{2}{11|u|} x_{2n}$; $w = \frac{11}{2}|u|$. При этом $D_P^+ f(0)(u) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}(f(0 + \lambda_n(u + w)) - f(0 + \lambda_n w)) == \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}(x_{2n+1} + x_{2n}) = 10|u| = D_C^+ f(0)(u)$. Учитывая, что обратное неравенство (14) всегда справедливо, получаем требуемое равенство.

То, что эпипроизводные Кларка и Пено могут отличаться, т.е. возможно строгое неравенство $D_C^+ f(0)(u) > D_P^+ f(0)(u)$, покажем в следующем примере.

Пример 4. Рассмотрим функцию $f : [-1, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^1$ такую, что $f(x) = 0$ при $x \in [-1, 0]$ и $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. На отрезке $[0, \frac{1}{2}]$ функция f является непрерывной ломаной линией, заключенной между параболой $y = -x^2$ и параболой $y = x^2$. При этом каждый отрезок ломаной имеет одинаковый по абсолютной величине угол наклона к оси $0x$, равный $\frac{\pi}{4}$, причем при монотонном убывании x от $\frac{1}{2}$ до 0 знаки величин углов чередуются, начиная с плюса.

Пусть $(x_0, x_0^2) = (1/2, 1/4)$ — начальная верхняя угловая точка графика функции f, а (x_n, x_n^2), $n \in \mathbb{N}$, — следующие по порядку справа налево верхние угловые точки графика функции f. Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Пусть $(z_n, -z_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$, — все нижние угловые точки графика функции f, причем $z_n \in [x_n, x_{n-1}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Для всякой точки x_n точка z_{n+1} вычисляется по формуле $z_{n+1} = (1/2)(-1 + \sqrt{1 + 4x_n - 4x_n^2}) = x_n - 2x_n^2 + o(x_n^2)$, т.е. $x_n - z_{n+1} = 2x_n^2 - o(x_n^2)$. Аналогично получаем $x_{n+1} = (1/2)(-1 + \sqrt{1 + 4z_{n+1} - 4z_{n+1}^2}) = z_{n+1} - 2z_{n+1}^2 + o(z_{n+1}^2)$, т.е. $z_{n+1} - x_{n+1} = 2z_{n+1}^2 - o(z_{n+1}^2)$. Тогда для любого $u \neq 0$, любого $w \in \mathbb{R}^1$ и $\lambda_n \downarrow 0$ получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}(f(0 + \lambda_n(u + w)) - f(0 + \lambda_n w)) \leq \lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}(\lambda_n^2(u + w)^2 + \lambda_n^2 w^2) = 0,$$

а при $w = 0$ и $\lambda_n = (|u|^{-1})x_n$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}(f(\lambda_n u) - f(0)) = 0$. В результате доказали, что $D_P^+ f(0)(u) = 0,\ \forall\ u \in \mathbb{R}^1$.

В свою очередь по формуле (10) для любого $u > 0$, выбирая последовательности $\lambda_n \doteq (1/u)(x_n - z_{n+1}) \to 0$ и $z_{n+1} \to 0$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}(f(z_{n+1} + \lambda_n u) - f(z_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} \frac{u}{x_n - z_{n+1}}(x_n^2 + z_{n+1}^2) = u.$$

Аналогично, для любого $u < 0$, выбирая последовательности $\lambda_n \doteq (1/|u|)(z_{n+1} - x_{n+1}) \to 0$ и $z_{n+1} \to 0$ получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}(f(z_{n+1} + \lambda_n u) - f(z_{n+1})) = \lim_{n\to\infty} \frac{|u|}{z_{n+1} - x_{n+1}}(x_{n+1}^2 + z_{n+1}^2) = |u|.$$

В итоге доказали, что $D_C^+ f(0)(u) = |u|$, $\forall\ u \in \mathbb{R}^1$.

Теорема 5. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки x_0 с константой $l > 0$. Тогда для любого $L \in \{C, P, AH1, AH2, AB1, AB2\}$ функция $u \to D_L^+ f(x_0)(u)$ ($u \to D_L^- f(x_0)(u)$) является положительно однородной, выпуклой (вогнутой), конечной при всех $u \in X$ и удовлетворяющей условию Липшица на множестве X с той же константой $l > 0$.*

Доказательство. Положительная однородность и выпуклость функции $u \to D_L^+ f(x_0)(u)$ следуют из вида ее надграфика. Определим отображение $F(x) \doteq \{y \in \mathbb{R}^1 \mid y \geqslant f(x)\}$, и пусть число $\alpha > 0$ таково, что функция $f(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $\overline{B_\alpha(x_0)}$ с константой $l > 0$. Выберем произвольную точку $u \in X$, $u \neq 0$. Тогда для любых точек $(x, y) \in \mathrm{epi} f$ таких, что $\|x - x_0\| \leqslant \frac{\alpha}{2}$, и чисел $\lambda \in \left(0, \frac{\alpha}{2\|u\|}\right)$ справедливы неравенства

$$f(x + \lambda u) \leqslant f(x) + l\lambda\|u\| \leqslant y + \lambda l\|u\|.$$

Это означает, что $l\|u\| \in \lambda^{-1}(F(x + \lambda u) - y)$, что в силу предложения 3 эквивалентно включению $l\|u\| \in D_C F(x_0, f(x_0))(u)$, или в иной записи — неравенству $l\|u\| \geq D_C^+ f(x_0)(u)$.

С другой стороны, опять же из условия Липшица для всех $\lambda \in \left(0, \frac{\alpha}{2\|u\|}\right)$ имеем неравенство $-l\|u\| \leq \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0))$. Поэтому для любых $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in \left(0, \frac{\alpha}{2\|u\|}\right)$ получаем

$$\varrho(-l\|u\| - \varepsilon, \lambda^{-1}(F(x_0 + \lambda u) - f(x_0))) \geq \varepsilon,$$

что в силу равенства (6) означает $-l\|u\| - \varepsilon \notin D_B F(x_0, f(x_0))(u)$, или в иной записи — неравенство $-l\|u\| - \varepsilon < D_B^+ f(x_0)(u)$. В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ и из неравенств (31) получаем для любого $u \in X$ неравенство

$$|D_L^+ f(x_0)(u)| \leqslant l\|u\|, \quad \forall\, L \in \{C, P, AH1, AH2, AB1, AB2\}.$$

Перепишем последнее неравенство для произвольных $u_1, u_2 \in X$ в виде

$$|D_L^+ f(x_0)(u_2 - u_1)| \leqslant l\|u_2 - u_1\|. \tag{33}$$

Так как функция $u \to D_L^+ f(x_0)(u)$ выпукла и положительно однородна, то получаем

$$-D_L^+ f(x_0)(u_2 - u_1) \leqslant D_L^+ f(x_0)(u_1) - D_L^+ f(x_0)(u_2) \leqslant D_L^+ f(x_0)(u_1 - u_2). \tag{34}$$

Объединяя неравенства (33), (34), получим утверждение теоремы.

5. Производные функций, представимых в виде разности двух выпуклых функций

В этом параграфе исследуется класс локальнолипшицевых функций, представимых в виде разности двух выпуклых функций. Как известно из выпуклого анализа (см., например, [12]), у таких функций существуют классические производные по направлениям.

Лемма 4. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ в точке $x_0 \in \mathrm{dom} f$ имеет конечную классическую производную по направлениям, т.е. справедливо равенство*

$$f'(x_0, u) = D_H^+ \ f(x_0)(u) = D_B^+ \ f(x_0)(u),\ \forall u \in X. \tag{35}$$

Тогда L-эпипроизводные $D_L^+ \ f(x_0)(u)$ при $L \in \{AH1, AH2,\ AB1, AB2, P\}$ совпадают между собой при каждом $u \in X$, и для них справедлива формула

$$D_L^+ f(x_0)(u) = \sup_{w\in X}(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)). \tag{36}$$

Доказательство. В силу общих соотношений (31) достаточно доказать, что

$$D_{AH1}^+ f(x_0)(u) = D_P^+ f(x_0)(u),\ \forall\ u \in X.$$

Из формул (11) и (35) получаем формулу $D_{AH1}^+ f(x_0)(u) = \sup\limits_{w\in X}(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w))$. Из свойств предела имеем

$$f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda(u+w)) - f(x_0)) -$$

$$- \lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda w) - f(x_0)) = \lim_{\lambda\downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda(u+w)) - f(x_0 + \lambda w)).$$

Отсюда и по формуле (13) следует равенство $D_P^+ f(x_0)(u) = D_{AH1}^+ f(x_0)(u)$.

Теорема 6. *Пусть функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ локальнолипшицева в окрестности точки $x_0 \in X$ и представима в этой окрестности в виде разности локальнолипшицевых выпуклых функций, т.е. $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, где $f_1, f_2 : B_\varepsilon(x_0) \to \mathbb{R}^1$ — ограниченные выпуклые функции, причем для заданного $u \in X$ одна из функций f_k, $k \in \overline{1,2}$, удовлетворяет равенству $f_k'(x_0, u) + f_k'(x_0, -u) = 0$ (например, одна из функций f_k дифференцируема в точке x_0 по Гато). Тогда все L-эпипроизводные $D_L^+ \ f(x_0)(u)$ при $L \in \{AH1, AH2,\ AB1, AB2, P, C\}$ совпадают между собой при любом заданном $u \in X$, и справедлива формула*

$$D_L^+ f(x_0)(u) = f_1'(x_0, u) + f_2'(x_0, -u). \tag{37}$$

Доказательство. Из свойств выпуклых функций следует, что у функций f_1, f_2 и $f = f_1 - f_2$ существуют классические производные по направлениям и

$$f'(x_0, u) = f_1'(x_0, u) - f_2'(x_0, u).$$

В силу леммы 4 для любого $L \in \{AH1, AH2,\ AB1, AB2, P\}$ справедлива формула

$$D_L^+ f(x_0)(u) = \sup_{w\in X}(f_1'(x_0, u+w) - f_2'(x_0, u+w) - f_1'(x_0, w) + f_2'(x_0, w)). \tag{38}$$

Как известно, функции $u \to f_k'(x_0, u)$, $k \in \overline{1,2}$, также выпуклы, в силу чего получаем

$$f_1'(x_0, u+w) \le f_1'(x_0, u) + f_1'(x_0, w), \quad f_2'(x_0, w) \le f_2'(x_0, u+w) + f_2'(x_0, -u). \tag{39}$$

Отсюда и из (38) получаем, что $D_{AH1}^+ f(x_0)(u) \le f_1'(x_0, u) + f_2'(x_0, -u)$. Чтобы показать, что последнее неравенство является равенством, достаточно, чтобы при некотором w оба неравенства в (39) превратились в равенства. При выполнении условия $f_1'(x_0, u) + f_1'(x_0, -u) = 0$ для этого нужно взять $w = -u$, а при выполнении условия $f_2'(x_0, u) + f_2'(x_0, -u) = 0$ достаточно взять $w = 0$.

Покажем, что формула (37) справедлива и при $L = C$. По определению эпипроизводной Кларка получаем

$$D_C^+ f(x_0)(u) = \limsup_{\lambda\downarrow 0,\, x\to x_0} \left(\lambda^{-1}(f_1(x + \lambda u) - f_1(x) - f_2(x + \lambda u) + f_2(x))\right) \le$$

$$\leq \limsup_{\lambda\downarrow 0,\, x\to x_0} \left(\lambda^{-1}(f_1(x+\lambda u)-f_1(x))\right) + \limsup_{\lambda\downarrow 0,\, x\to x_0} \left(\lambda^{-1}(f_2(x)-f_2(x+\lambda u))\right). \tag{40}$$

По известному свойству эпипроизводной Кларка для выпуклой липшицевой функции (см. [11], предложение 2.2.7) справедливо равенство $D^+_C f_1(x_0)(u) = f'_1(x_0,u)$. Аналогично, делая замену $y = x+\lambda u$, получаем

$$\limsup_{\lambda\downarrow 0,\, x\to x_0} \lambda^{-1}(f_2(x)-f_2(x+\lambda u)) = \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\|x-x_0\|<\delta} \sup_{\lambda\in(0,\delta)} \lambda^{-1}(f_2(x)-f_2(x+\lambda u)) =$$

$$= \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\|y-x_0\|<\delta(1+\|u\|)} \sup_{\lambda\in(0,\delta)} \lambda^{-1}(f_2(y-\lambda u)-f_2(y)) = D^+_C f_2(x_0)(-u) = f'_2(x_0,-u).$$

В результате из неравенства (40) получили неравенство $D^+_C f(x_0)(u) \leq f'_1(x_0,u)+f'_2(x_0,-u)$, которое вместе с равенством (37) при $L = P$ и неравенством (14) завершает доказательство теоремы.

Приведем еще один критерий совпадения всех эпипроизводных функции, представимой в виде разности двух выпуклых функций.

Напомним, что функция $h : X \to \mathbb{R}^1$ называется *положительно однородной*, если для любого $x \in X$ и любого числа $\lambda \geq 0$ справедливо равенство $h(\lambda x) = \lambda h(x)$. Очевидно, что такая функция имеет классическую производную по направлениям в точке нуль, и справедливо равенство

$$h'(0,u) = h(u), \quad \forall\, u \in X. \tag{41}$$

Лемма 5. *Пусть задана положительно однородная липшицева (быть может невыпуклая) функция $h : X \to \mathbb{R}^1$. Тогда справедливо равенство всех L-эпипроизводных $D^+_L\ h(0)(u)$, а именно:*

$$D^+_L h(0)(u) = \sup_{w\in X}(h(u+w)-h(w)), \quad \forall\, u\in X, \forall L \in \{AH1, AH2, AB1, AB2, P, C\}. \tag{42}$$

Доказательство. По определению производной Кларка, из положительной однородности h и из равенств (41) и (36) получаем

$$D^+_C h(0)(u) = \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\lambda\in(0,\delta)} \sup_{\|x\|\leq\delta} \lambda^{-1}(h(x+\lambda u)-h(x)) =$$

$$= \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{\lambda\in(0,\delta)} \sup_{\|w\|\leq\delta/\lambda} (h(u+w)-h(w)) \leq$$

$$\leq \sup_{w\in X}(h(u+w)-h(w)) = \sup_{w\in X}(h'(0,u+w)-h'(0,w)) = D^+_{AH1}h(0)(u).$$

В силу общих соотношений (31) и, в частности, в силу неравенства $D^+_C h(0)(u) \geq D^+_{AH1}h(0)(u)$ в итоге получаем требуемое равенство (42).

Пусть заданы точка $x_0 \in X$ и число $r > 0$.

Следствие 1. *Пусть заданы две выпуклые ограниченные функции $f_k : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$, $k \in \overline{1,2}$. Определим функции $g_k(x) \doteq f_k(x_0)+f'_k(x_0,x-x_0)$, $f(x) \doteq f_1(x)-f_2(x)$, $x \in B_r(x_0)$ и функцию $g(x) \doteq g_1(x)-g_2(x)$ при $x \in X$. Тогда справедливо равенство всех L-эпипроизводных функции g в точке x_0, причем*

$$D^+_L g(x_0)(u) = \sup_{w\in X}(f'(x_0,u+w)-f'(x_0,w)), \quad \forall u\in X, \forall L \in \{AH1, AH2, AB1, AB2, P, C\}.$$

Доказательство очевидно в силу леммы 5, положительной однородности функции $h(x) \doteq g(x_0+x)-f_1(x_0)+f_2(x_0)$ и равенства $g'(x_0,u) = f'(x_0,u) = h(u)$ при любом $u \in X$.

Для произвольной выпуклой ограниченной функции $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ определелим функции g и φ по формулам

$$g(x) \doteq f(x_0)+f'(x_0,x-x_0), \quad \varphi(x) \doteq f(x)-g(x), \tag{43}$$

т.е. функция f в окрестности $B_r(x_0)$ точки x_0 представлена в виде суммы ее квазилинейной части g и остатка φ. Очевидно, что функции g и φ в точке x_0 имеют классические производные по направлениям, причем

$$g'(x_0,u)=f'(x_0,u), \quad \varphi'(x_0,u)=0 \quad \forall\, u\in X, \tag{44}$$

откуда в силу выпуклости функций f и g, а также по формуле (36) получаем равенства

$$D^+_C f(x_0)(u)=D^+_C g(x_0)(u)=f'(x_0,u), \quad D^+_{AH1}\varphi(x_0,u)=0, \quad \forall\, u\in X,$$

которые в частности влекут неравенство $0\le D^+_C\varphi(x_0)(u)$ при всех $u\in X$, что равносильно включению $0\in\partial^+_C\varphi(x_0)$.

Определение 8. Выпуклая ограниченная функция $f: B_r(x_0)\to\mathbb{R}^1$ называется сильно регулярной в точке x_0, если для соответствующей функции φ из (43) справедливо равенство $\partial^+_C\varphi(x_0)=\{0\}$, т.е. $D^+_C\varphi(x_0)(u)=0$ при всех $u\in X$.

Данное определение эквивалентно тому, что функция φ регулярна по Кларку в точке x_0 (см. определение 2.3.4 в [11]). В частности это выполняется, когда функция φ выпукла в некоторой окрестности точки x_0. Кроме того, в силу оценки

$$D^+_C\varphi(x_0)(u)\le D^+_C f(x_0)(u)+D^+_C(-g)(x_0)(u)=f'(x_0,u)+g'(x_0,-u)=f'(x_0,u)+f'(x_0,-u)$$

получаем, что если для функции f справедливо равенство $f'(x_0,u)+f'(x_0,-u)=0$ при всех $u\in X$, то функция f сильно регулярна в точке x_0. В частности, если функция f дифференцируема по Гато в точке x_0, то она сильно регулярна.

Теорема 7. *Пусть функция $f\colon X\to\mathbb{R}^1$ представима в виде разности двух выпуклых сильно регулярных в точке x_0 и ограниченных на $B_r(x_0)$ функций f_1 и f_2, т.е. $f=f_1-f_2$. Тогда справедливо равенство эпипроизводных:*

$$D^+_C f(x_0)(u)=D^+_L f(x_0)(u), \quad \forall\, u\in X, \forall L\in\{P, AH1, AH2, AB1, AB2\},$$

что равносильно равенству всех субдифференциалов $\partial^+_C f(x_0)=...=\partial^+_{AB2}f(x_0)$.

Доказательство. Для каждой функции f_k определим функции g_k и φ_k по формулам (43). Определим также следующие функции $g\doteq g_1-g_2$ и $\varphi\doteq\varphi_1-\varphi_2$. Тогда справедливо равенство $f=g+\varphi$, причем $f'(x_0,u)=g'(x_0,u)$ и $\varphi'(x_0,u)=0$ при всех $u\in X$. По следствию 1 справедливо равенство $D^+_{AH1}g(x_0)(u)=D^+_{AH1}f(x_0)(u)$ и $D^+_{AH1}\varphi(x_0)(u)=0\le D^+_C\varphi(x_0)(u)$. По свойствам производной Кларка для функции $\varphi=\varphi_1+(-\varphi_2)$ и в силу сильной регулярности функций f_1 и f_2 получаем

$$D^+_C\varphi(x_0)(u)\le D^+_C\varphi_1(x_0)(u)+D^+_C(-\varphi_2)(x_0)(u)=D^+_C\varphi_1(x_0)(u)+D^+_C\varphi_2(x_0)(-u)=0,$$

т.е. $D^+_C\varphi(x_0)(u)=0$ при всех $u\in X$. Отсюда и в силу свойства производной Кларка для суммы функций получаем

$$D^+_C f(x_0)(u)\le D^+_C g(x_0)(u)+D^+_C\varphi(x_0)(u)=D^+_{AH1}g(x_0)(u)+0=D^+_{AH1}f(x_0)(u)\le D^+_C f(x_0)(u),$$

что вместе с леммой 4, примененной к функции f, завершает доказательство теоремы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00139а и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

Литература

1. *Banks H.T. and Jacobs M.Q.* A differential calculus for multifunctions // J. Math. Anal. and Applic. — 1970. — V. 29, N 2. — P. 246–272.

2. *Hukuhara M.* Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Funkcialaj Ekvacioj. — 1967. — V. 10. — P. 205–223.

3. *De Blasi F.S.* On the differentiability of multifunctions // Pacif. J. Math. — 1976. — V. 66, N 1. — P. 67–81.

4. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

5. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990.

6. *Aubin J.-P.* Contingent derivatives of set-valued maps and existence of solutions to nonlinear inclusions and differential inclusions and differential inclusions // Advances in Math. Suppl. Studies, Acad. Press. — 1981. — P. 160–272.

7. *Половинкин Е.С.* Теория многозначных отображений. — М.: МФТИ, 1983. — 108 с.

8. *Половинкин Е.С.* К вопросу о дифференцировании многозначных отображений // Некоторые проблемы современной математики и их приложения к задачам матем. физики. — М.: МФТИ. — 1985. — С. 90–97.

9. *Половинкин Е.С., Смирнов Г.В.* Дифференцирование многозначных отображений и свойства решений дифференциальных включений // Доклады АН СССР. — Т. 288, № 2. — 1986. — С. 296–301.

10. *Bouligand Q.* Introduction à la géométric infinitesimale directe // Gauthier–Villars, Paris. — 1932.

11. *Clarke F.H.* Optimization and nonsmooth analysis. — New York: Wiley–Interscience, 1983.

12. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2007. — 440 с.

13. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969.

14. *Aubin J.-P. and Frankovska H.* Set-Valued Analisys. — Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 1990.

15. *Половинкин Е.С.* О необходимых условиях оптимальности решений дифференциальных включений на отрезке // Совр. математика в физико-техн. задачах. — М.: МФТИ. — 1986. — С. 87–94.

16. *Aubin J.-P.* Lipschitz behavior of solutions to convex minimization problems // Math. of Oper. Res. — 1984. — V. 9. — P. 87–111.

17. *Rockafellar R.T.* Clarke's tangent cones and the boundaries of closed sets in $\mathbb{R}^n$ // Nonlinear Analysis: Theory, Meth. and Appl. — 1979. — V. 3, N 1. — P. 145–154.

18. *Clarke F.H.* Generalized gradients and applications // J. Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — V. 205. — P. 247–262.

19. *Penot J.-P.* Calcel sous-differentiel et optimization // J. Funct. Anal. — 1978.— V. 27, N 2. — P. 248–276.

20. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.

Поступила в редакцию 29.03.2012.