УДК 519.2

Л.Г. Афанасьева, Е.В. Булинская
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Математические модели транспортных систем, основанные на теории очередей

Цель работы — получение условий эргодичности для ряда транспортных систем, учитывающих наличие светофоров. Поступление автомобилей описывается пуассоновскими процессами. Интервалы между последовательными переключениями светофора могут иметь произвольное распределение. Рассматривается также оптимизация функционирования светофора. Существование стационарного режима в системе с двумя последовательными светофорами установлено с учетом размера автомобилей. Изучено влияние светофоров и различия в скоростях автомобилей на плотность их потока. Методы теории очередей оказались полезными для исследования.

Ключевые слова: транспортные потоки, светофоры, нерегулируемый перекресток, эргодичность, оптимизация, плотность потока, высокая загрузка.

I. Введение

Изучение транспортных потоков началось достаточно давно, еще до второй мировой войны (см., например, [1–4] и приведенные там ссылки). Поэтому невозможно даже просто упомянуть всех исследователей, внесших вклад в разработку данной тематики. Отметим только, что для исследований используются различные методы такие, как клеточные автоматы [5], статистическая механика и математическая физика [6–10] или теория очередей [11].

В данной работе продолжаются исследования, начатые авторами в [12] и [13], и применяются методы теории очередей. Основная цель авторов получить условия эргодичности для стохастических транспортных моделей, учитывающих наличие светофоров (которые можно интерпретировать как обслуживающие устройства в системе массового обслуживания). Потоки автомобилей считаются пуассоновскими. Времена между переключениями света на светофорах предполагаются независимыми случайными величинами с произвольными распределениями. Первое из предположений вполне естественно ввиду хорошо известных результатов о суммировании случайных потоков (см., например, [14]). Второе условие позволяет, в частности, рассмотреть функционирование нерегулируемых перекрестков, введенных в [15]. В самом деле, безопасное пересечение основной трассы возможно в течение некоторого случайного интервала, который может быть интерпретирован как интервал, когда для пересекающей дороги горит зеленый свет. Кроме того, для приложений важно изучить влияние распределения интервалов между переключениями на такие характеристики модели, как среднее число автомобилей, ожидающих у светофора, или среднее время ожидания перед светофором. Согласно численным подсчетам эти средние почти одинаковы при коэффициенте загрузки, близком к половине. Напротив, среднее, соответствующее показательному распределению, гораздо больше среднего для постоянных интервалов при высокой загрузке. Наконец, для показательно распределенных интервалов можно получить явный вид для среднего числа ожидающих автомобилей. Это позволяет найти оптимальное правило функционирования светофора. Полученный результат можно использовать в качестве начального приближения для нахождения оптимальной политики в случае постоянных (или произвольно распределенных) интервалов.

II. Плотность потока автомобилей, движущихся с различными скоростями

II.1. Описание модели

Предположим, что автомобили двух типов (медленные и быстрые) движутся в одном направлении по трассе, которую далее считаем действительной прямой. Автомобили появляются на трассе независимо друг от друга, при этом автомобиль типа i ($i = 1, 2$) возникает в интервале $(x, x + dx)$ в промежутке времени $(t, t + dt)$ с вероятностью $\lambda_i dxdt$. Каждый автомобиль проходит по трассе некоторое случайное расстояние, после чего покидает ее. Пройденные расстояния являются независимыми показательно распределенными случайными величинами с параметром μ_i для автомобилей i-го типа. Пусть V_i — скорость автомобиля i-го типа, причем $V_1 < V_2$. Очевидно, что $\zeta_i = (\mu_i V_i)^{-1}$ — это среднее время, проводимое автомобилем i-го типа на трассе, если он не взаимодействует с другими автомобилями. Предполагается, что автомобиль второго типа (быстрый), догнавший автомобиль первого типа (медленный), начинает двигаться со скоростью V_1 до тех пор, пока либо он сам покинет трассу, либо ее покинет задержавший его автомобиль первого типа. При таком поведении могут образовываться группы автомобилей произвольного размера. Когда трассу покидает блокирующий автомобиль первого типа, вся группа быстрых автомобилей начинает двигаться со скоростью V_2. Размер автомобилей мы не принимаем во внимание. Следовательно, при фиксированном моменте времени t конфигурация автомобилей на трассе описывается последовательностью $\{x_s,n_s,e_s\}_{s=-\infty}^{+\infty}$, где $x_s \in R^1$ — положение s-й группы на прямой, n_s– число автомобилей в s-й группе, а $e_s = 1$, если в этой группе имеется автомобиль первого типа, и $e_s = 0$, если группа состоит только из автомобилей второго типа. Таким образом, мы изучаем случайный процесс $X(t)$, принимающий значения в пространстве конфигураций $\mathrm{X} = \{(x_s,n_s,e_s)_{s=-\infty}^{+\infty}\}$, то есть *маркированный точечный процесс* (см., например, [16]). В сделанных предположениях это *однородный марковский процесс*. Строгое доказательство этого утверждения, а также построение производящего оператора достаточно сложно и опирается на теорию маркированных точечных процессов. Мы ограничимся здесь интуитивными соображениями, как это обычно делается в теории массового обслуживания. Итак, предположим, что известно состояние $X(t)$ в момент t. Поведение процесса после момента t определяется следующими событиями: появление на трассе новых автомобилей; уход с трассы некоторых из следующих по ней автомобилей, что приводит к исчезновению некоторых из точек x_s, когда $n_s = 1$, или уменьшению размера соответствующей группы на единицу, если $n_s > 1$; догон группой из автомобилей второго типа какого-нибудь автомобиля первого типа.

Поскольку поток автомобилей, появляющихся на трассе в интервале $(x,\, x+h)$, является пуассоновским с параметром λh, длина проходимого пути имеет показательное распределение, обладающее, как известно, свойством отсутствия памяти, а скорость автомобиля каждого типа постоянна, все указанные факторы не зависят от прошлого, если известно состояние $X(t)$.

II.2. Эргодическая теорема. Определение плотности потока

Мы начнем с теоремы, устанавливающей существование предельного распределения процесса $X(t)$.

Теорема 1. Если $V_i > 0$, $\mu_i > 0$ при $i = 1,\, 2$, то марковский процесс $X(t)$ эргодический.

Доказательство. Проводится в несколько этапов. Прежде всего строится мажорирующий процесс $\tilde{X}(t)$. Предполагается, что все автомобили движутся со скоростью $V = V_1$, а интенсивность их появления на участке $(x,\, x+dx)$ равна $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Каждый автомобиль проходит по прямой случайное расстояние, имеющее показательное распределение с параметром $\mu = \min(\mu_1,\mu_2)$. Обозначим $N_A(t)$ (соотв. $\tilde{N}_A(t)$) число автомобилей в интервале $(-A,A)$ в момент t для процесса $X(\cdot)$ (соотв. $\tilde{X}(\cdot)$). Тогда $\tilde{N}_A(t)$ стохастически доминирует $N_A(t)$, это записывается $\tilde{N}_A(t) \geqslant {}_{st} N_A(t)$ и означает

$$P(\tilde{N}_A(t) > K) \geqslant P(N_A(t) > K) \text{ для любого } K.$$

В свою очередь процесс $\tilde{X}(t)$ эквивалентен процессу $\hat{X}(t)$, в котором автомобили не движутся, а появившись в некоторой точке, находятся в ней случайное время, имеющее показательное распределение с параметром μV, и потом исчезают. Процесс $\hat{X}(t)$ является пуассоновским точечным процессом и для него $\hat{N}_A(t)$ имеет предельное (при $t \to \infty$) пуассоновское распределение с параметром $2\lambda A(\mu V)^{-1}$. Это позволяет проверить выполнение условий эргодической теоремы Боровкова (см. [17], теорема 1, с. 184) для процесса с дискретным временем $\{X(nh), n \geqslant 1\}$.

Наконец, устанавливается асимптотическая стохастическая непрерывность $X(t)$, то есть $||P(x,t+h,\cdot) - P(x,t,\cdot)|| \to 0$, для любого x при $h \to 0, t \to \infty$. Здесь $P(x,t,\cdot)$ — переходная вероятность однородного марковского процесса $X(t)$, а $||\cdot||$ — расстояние по вариации. Детали опускаются ввиду громоздкости.

Процесс $X(t)$ в дальнейшем считается стационарным. Отметим еще одно свойство, которое в дальнейшем будем называть *свойством независимости и однородности*. Для любого конечного интервала I действительной прямой и момента времени t введем следующие обозначения: $\nu^I(t)$ — число точек, в которых есть автомобили (или группы автомобилей), случайные величины $x_s^I(t)$, $n_s^I(t)$, $e_s^I(t)$ имеют такой же смысл, как x_s, n_s, e_s, только относятся к автомобилям, находящимся в момент t в интервале I. Введем случайный элемент $X^I(t) = (\nu^I(t),\, x_s^I(t),\, n_s^I(t),\, e_s^I(t),\, s = 1,\, ...,\, \nu^I(t))$.

Утверждение 1. (Свойство независимости и однородности). Пусть I_1 и I_2 — конечные непересекающиеся интервалы действительной прямой. Для фиксированного t случайные элементы $X^{I_1}(t)$ и $X^{I_2}(t)$ независимы, а если $|I_1| = |I_2|$, где $|I|$ — длина интервала I, то одинаково распределены.

Доказательство этого свойства опирается на теорию маркированных точечных процессов, хотя интуитивно оно достаточно очевидно. Дело в том, что появления автомобилей в малых окрестностях различных точек, а также в различные интервалы времени в окрестности одной точки независимы.

Под плотностью потока автомобилей i-го типа мы понимаем математическое ожидание числа автомобилей этого типа, находящихся в отрезке единичной длины. В силу стационарности процесса $X(t)$ и свойства однородности плотность потока постоянна, то есть не зависит от времени и положения отрезка на прямой. Дадим формальное определение.

Определение 1. Плотность потока автомобилей первого типа

$$\alpha_1 = \lim_{|I|\to\infty} \frac{1}{|I|} \sum_{s=1}^{\nu^I(t)} e_s^{|I|}(t), \qquad (1)$$

а плотность потока автомобилей второго типа

$$\alpha_2 = \lim_{|I|\to\infty} \frac{1}{|I|} \sum_{s=1}^{\nu^I(t)} (n_s^I(t) - e_s^I(t)), \qquad (2)$$

суммарная плотность потока

$$\Lambda = \alpha_1 + \alpha_2 = \lim_{|I|\to\infty} \frac{1}{|I|} \sum_{s=1}^{\nu^I(t)} n_s^{|I|}(t).$$

Существование пределов (1) и (2) с вероятностью единица следует из усиленного закона больших чисел и свойства независимости и однородности. Поскольку процесс $X(t)$ стационарный, эти пределы не зависят от времени.

II.3. Система уравнений для вычисления плотности потока автомобилей

Чтобы получить эту систему, введем функции $p_j(t,x)$ и $q_j(t,x)$, $j \geqslant 0$, такие, что $p_j(t,x)dx$ — вероятность того, что в момент t в интервале $(x, x+dx)$ содержится группа из j автомобилей второго типа и один автомобиль первого типа, а $q_j(t,x)dx$ — аналогичная вероятность, но нет автомобиля первого типа.

Используя свойства независимости и однородности, для $h \to 0$ можно записать

$$p_0(t+h,x) = (1-\mu_1 V_1 h - \beta(V_2 - V_1)h)p_0(t,x-hV_1) +$$
$$+\lambda_1 h + \mu_2 V_1 h p_1(t,x-hV_1) + o(h),$$

а при $j > 0$

$$p_j(t+h,x) = (1-\mu_1 V_1 h - \beta(V_2 - V_1)h - j\mu_2 V_1 h)\times$$
$$\times p_j(t,x-hV_1) + (j+1)\mu_2 V_1 h p_{j+1}(t,x-hV_1) +$$
$$+(V_2 - V_1)h \sum_{i=1}^{j-1} p_i(t,x-hV_1) q_{j-i}(t,x-hV_2) + o(h),$$

где $\beta = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t,x)$.

Аналогичные уравнения можно выписать для функций $q_j(t,x)$, $j \geqslant 1$. Используя тот факт, что $p_j(t,x)$ и $q_j(t,x)$ не зависят от t и x, следовательно, их производные по t и по x равны нулю, для $p_j = p_j(t,x)$ и $q_j = q_j(t,x)$ получаем систему уравнений

$$(\mu_1 V_1 + \beta(V_2 - V_1))p_0 = \mu_2 V_1 p_1 + \lambda_1, \qquad (3)$$

$$(j\mu_2 V_1 + \mu_1 V_1 + \beta(V_2 - V_1))p_j = \mu_2 V_1 (j+1) p_{j+1} +$$
$$+(V_2 - V_1)\sum_{i=0}^{j-1} p_i q_{j-i}, \quad j > 0,$$

и

$$\left(\mu_2 V_2 + (V_2 - V_1)\sum_{j=0}^{\infty} p_j\right) q_1 =$$
$$= 2\mu_2 V_2 q_2 + \mu_1 V_1 p_1 + \lambda_2, \qquad (4)$$
$$(j\mu_2 V_2 + (V_2 - V_1)\sum_{j=0}^{\infty} p_j) q_j =$$
$$= (j+1)\mu_2 V_2 q_{j+1} + \mu_1 V_1 p_j, \ j > 1.$$

Мы замечаем, что $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = \alpha_1$. Чтобы найти α_1, введем функцию $\alpha_1(t,x)$ такую, что $\alpha_1(t,x)dx$ есть вероятность того, что в момент t в интервале $(x, x+dx)$ есть автомобиль первого типа. Тогда справедливо соотношение

$$\alpha_1(t+h,x) = (1-\mu_1 V_1 h)\alpha_1(t,x-V_1 h) + \lambda_1 h + o(h).$$

Устремляя h к нулю, получаем

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = -\mu_1 V_1 \alpha_1 + \lambda_1.$$

Поскольку $\partial\alpha_1/\partial t = 0$, $\partial\alpha_1/\partial x = 0$, из выведенного соотношения имеем

$$\alpha_1 = \lambda_1(\mu_1 V_1)^{-1} = \lambda_1 \zeta_1.$$

А для того, чтобы найти плотность потока автомобилей второго типа $\alpha_2 = \sum_{j=1}^{\infty} j(p_j + q_j)$, нужно решить бесконечную систему нелинейных уравнений (3)–(4).

II.4. Аппроксимационная процедура

Для получения решения системы (3)–(4) мы предлагаем следующий

Алгоритм. Обозначим $S^{(k)}$ систему первых $(k+1)$ уравнений соответственно из (3) и (4), где положим $p_j = 0$, $j > k$, и $q_j = 0$, $j > k+1$. Идея заключается в том, чтобы получать систему линейных уравнений, используя решение системы $S^{(k-1)}$. Более точно, процедура последовательных приближений состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Пусть $k = 0$. Как было установлено, $\sum_{j=0}^{\infty} p_j = \alpha_1 = \lambda_1\zeta_1$. Это значение будет подставлено во все уравнения (4). Тогда из второго уравнения системы $S^{(0)}$ получается $\beta^{(0)} = q_1^{(0)} = \lambda_2(\mu_2 V_2 + \alpha_1(V_2 - V_1))^{-1}$.

Шаг 2. Положим $\beta = \beta^{(0)}$ в первых двух уравнениях системы $S^{(1)}$, а вместо q_1 подставим $q_1^{(0)}$. В результате мы получим систему уравнений

$$(\mu_1 V_1 + \beta^{(0)}(V_2 - V_1))p_0 = \mu_2 V_1 p_1 + \lambda_1,$$
$$(\mu_2 V_1 + \mu_1 V_1 + \beta^{(0)}(V_2 - V_1))p_1 = (V_2 - V_1)p_0 q_1^{(0)},$$
$$(\mu_2 V_2 + \alpha_1(V_2 - V_1))q_1 = \mu_1 V_1 p_1 + \lambda_2,$$
$$(2\mu_2 V_2 + \alpha_1(V_2 - V_1))q_2 = \mu_1 V_1 p_1.$$

Эта система линейных уравнений имеет решение $(p_0^{(1)}, p_1^{(1)}, q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$.

Шаг 3. Теперь рассматривается система $S^{(2)}$, в которой вместо β берется $\beta^{(1)} = q_1^{(1)} + q_2^{(1)}$, а вместо q_1 и q_2, аналогично шагу 2, используем $q_1^{(1)}$ и $q_2^{(1)}$ в уравнениях для p_j, $j = 0, 1, 2$.

Следующие шаги с очевидными изменениями повторяют шаг 3.

Если известны (p_j, q_j), то можно выписать в явном виде плотность автомобилей

$$\Lambda = \lambda_1\zeta_1 + \sum_{j=1}^{\infty} j(p_j + q_j)$$

и вероятности различных конфигураций автомобилей на конечных интервалах R^1.

II.5. Оценка сверху плотности автомобилей

С этой целью рассмотрим вспомогательную модель, в которой предполагается, что автомобиль второго типа, догнавший автомобиль первого типа, сам приобретает тип один. Это означает, что автомобили второго типа не образуют групп. Если $\zeta_2 \leqslant \zeta_1$, то плотность потока автомобилей в этой вспомогательной модели не меньше, чем в рассматриваемой основной. Поскольку теперь $q_j = 0$ при $j > 1$, вместо уравнений (3)–(4) получаем систему

$$(j\mu_1 V_1 + q_1(V_2 - V_1))\tilde{p}_j = (j+1)\mu_1 V_1 \tilde{p}_{j+1} + \\ +(V_2 - V_1)q_1\tilde{p}_{j-1}, \qquad (5)$$

и

$$(\mu_1 V_1 + q_1(V_2 - V_1))\tilde{p}_1 = 2\mu_1 V_1 \tilde{p}_2 + \lambda_1, \qquad (6)$$

$$(\mu_2 V_2 + \tilde{\alpha}(V_2 - V_1))q_1 = \lambda_2, \qquad (7)$$

где $\tilde{\alpha} = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{p}_j$, а $\tilde{p}_j dx$ означает вероятность того, что имеется группа из j медленных автомобилей в интервале $(x,x+dx)$ для любых $x \in R^1$ и $t \in R^1$.

Теорема 2. Решение уравнений (5)–(7) имеет вид

$$q_1 = \frac{\delta_0}{\zeta_1(V_2 - V_1)}, \quad \tilde{p}_j = \frac{\delta_0^{j-1}}{j!}\tilde{p}_1, \quad j \geqslant 1,$$

где $\tilde{p}_1 = \lambda_1\zeta_1$ и δ_0 является единственным корнем уравнения

$$\lambda_1\zeta_1(e^{\delta} - 1) = \lambda_2\zeta_1 - \delta((V_2 - V_1)\zeta_2)^{-1}, \qquad (8)$$

кроме того,

$$\tilde{\Lambda} = \zeta_1(\lambda_1 + \lambda_2) + \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{(V_2 - V_1)\zeta_1\zeta_2}\delta_0. \qquad (9)$$

Доказательство. Просуммировав уравнения (5) по j и прибавив уравнение (6), получаем

$$\tilde{p}_1 = \lambda_1(\mu_1 V_1)^{-1} = \lambda_1\zeta_1. \qquad (10)$$

Чтобы найти решение уравнений (5) и (6), положим

$$u_j = j\mu_1 V_1 \tilde{p}_j - q_1(V_2 - V_1)\tilde{p}_{j-1}.$$

Тогда (5) можно переписать в виде

$$u_j = u_{j+1} \text{ для } j > 1. \qquad (11)$$

Подстановка (10) в (6) дает

$$2\mu_1 V_1 \tilde{p}_2 = (\mu_1 V_1 + q_1(V_2 - V_1))\tilde{p}_1 - \lambda_1 = \\ = q_1(V_2 - V_1)\lambda_1\zeta_1,$$

поэтому

$$u_2 = 2\mu_1 V_1 \tilde{p}_2 - q_1(V_2 - V_1)\tilde{p}_1 = 0.$$

Отсюда, принимая во внимание (10), легко видеть, что $u_j = 0$ при $j > 1$ и

$$\tilde{p}_{j+1} = \frac{q_1(V_2 - V)_1}{\mu_1 V_1(j+1)}\tilde{p}_j, \quad j \geqslant 1.$$

Обозначив $\delta = q_1\zeta_1(V_2 - V_1)$, мы получаем

$$\tilde{p}_j = \frac{\delta^{j-1}}{j!}\tilde{p}_1, \quad j \geqslant 1. \qquad (12)$$

Используя (7), (10) и (12), устанавливаем справедливость следующих соотношений:

$$\tilde{\alpha} = \frac{\lambda_1(e^{\delta} - 1)}{\mu_1 V_1 \delta} = \frac{\lambda_2}{\mu_1 V_1 \delta} - \frac{\mu_2 V_2}{V_2 - V_1}, \qquad (13)$$

а значит, и тот факт, что δ удовлетворяет (8). Это уравнение имеет единственное решение δ_0 и

$$\delta_0 < \delta_1 = \lambda_2(V_2 - V_1)\zeta_1\zeta_2. \qquad (14)$$

Наконец, мы имеем

$$\tilde{p}_j = \frac{\lambda_1\zeta_1\delta_0^{j-1}}{j!}, \quad j \geqslant 1,$$

в то время как среднее число медленных автомобилей в группе равно

$$m = \lambda_1\zeta_1 \sum_{j=1}^{\infty} j\frac{\delta_0^{j-1}}{j!} = \lambda_1\zeta_1 e^{\delta_0} = (\lambda_1 + \lambda_2)\zeta_1 - \\ - \frac{\delta_0}{\zeta_2(V_2 - V_1)}.$$

Согласно (7) и (13) получаем $q_1 = \delta_0\mu_1 V_1/(V_2 - V_1)$. Следовательно, плотность потока автомобилей, равная $\tilde{\Lambda} = q_1 + m$, имеет вид (9). Тем самым доказательство закончено.

Если δ_1 в (14) мало, то используя разложение Тейлора для e^{δ} только с линейной частью, получим вместо (8) простое уравнение

$$\lambda_1\zeta_1\delta = \lambda_2\zeta_1 - \delta(\zeta_2(V_2 - V_1))^{-1},$$

из которого вытекает следующее приближение для δ_0:

$$\tilde{\delta} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + (\zeta_1\zeta_2(V_2 - V_1))^{-1}}.$$

III. Плотность потока автомобилей на трассе со светофорами

В предыдущем разделе исследовано влияние на плотность потока автомобилей различия в их скоростях. Наличие светофоров способствует образованию скоплений автомобилей перед ними и увеличению плотности. Анализу этого явления посвящен данный раздел.

III.1. Описание модели

Предположим, что расстояния между соседними светофорами на основной трассе образуют последовательность $\{\eta_i\}_{i=-\infty}^{+\infty}$ независимых случайных величин с общей функцией распределения $F(x)$. Пересечение перекрестка по основной трассе возможно, если на светофоре горит зеленый свет. Красный свет, запрещающий движение по основной трассе, разрешает движение по перпендикулярному направлению (для него соответственно зажигается зеленый свет). Длительности промежутков между переключениями светофоров образуют последовательности независимых случайных величин, имеющих показательное распределение с параметрами соответственно γ_1 и γ_2. Если в момент подхода автомобиля к светофору горит зеленый свет и нет очереди, он беспрепятственно следует далее. Если горит красный свет или есть очередь, он останавливается. В таком случае время прохождения светофора имеет показательное распределение с параметром ν. Все случайные величины, определяющие функционирование светофора, независимы и не зависят от входящего потока автомобилей. Пусть $\lambda dxdt$ — вероятность возникновения автомобиля в интервале $(x,\, x+dx)$ за время dt. Автомобили на трассе появляются как в точках расположения светофоров, так и между ними. В точку расположения светофора в перпендикулярном к основной трассе направлении поступают два независимых потока автомобилей. Первый из них, интенсивности a_2, сворачивает на трассу после прохождения светофора, а второй, интенсивности a_3, продолжает движение в перпендикулярном направлении. Все автомобили следуют по трассе с постоянной скоростью V и проходят по ней случайное расстояние, имеющее показательное распределение с параметром μ.

III.2. Интенсивность потока автомобилей и условие эргодичности

Выберем один из светофоров и введем случайные процессы: $Y_1(t)$ — количество автомобилей, подошедших к светофору за время t, $Z_1(t)$ — количество автомобилей, прошедших через перекресток по основной трассе за то же время, и пусть $X_1(t)$ — число автомобилей, стоящих перед светофором в момент t. Соответственно процессы $Y_2(t)$, $Z_2(t)$, $X_2(t)$ будут относиться к автомобилям, сворачивающим с перпендикулярного направления на трассу, а $Y_3(t)$, $Z_3(t)$, $X_3(t)$ к автомобилям, которые пересекают трассу, на нее не сворачивая.

Под интенсивностью процесса $Y_1(t)$ мы будем понимать (существующую в сделанных предположениях) величину

$$a_1 = \lim_{t\to\infty} \frac{Y_1(t)}{t}.$$

Первый результат касается этого предела.

Теорема 3. Если процессы $X_i(t)$, $i = 1,\, 2,\, 3$, стохастически ограничены, то

$$a_1 = \frac{a_2 f^*(\mu)}{1 - f^*(\mu)} + \frac{\lambda}{\mu}, \tag{15}$$

где $f^*(\mu) = \int\limits_0^\infty e^{-\mu x} dF(x)$.

Доказательство. Поскольку $t^{-1}X_i(t) \to 0$ при $t \to \infty$ и $Z_i(t) = Y_i(t) - X_i(t)$, $i = 1,\, 2,\, 3$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{Z_i(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{Y_i(t)}{t} = a_i, \quad i = 1,\, 2,\, 3.$$

Интенсивность потока автомобилей, проходящих через перекресток и следующих по трассе, таким образом, будет $a_1 + a_2$. Некоторые из этих автомобилей покидают трассу до того, как они достигнут следующего светофора. Вероятность этого события равна $\int\limits_0^\infty (1 - e^{-\mu x}) dF(x)$, так что интенсивность потока автомобилей на следующем светофоре, из числа прошедших предыдущий, составит

$$(a_1 + a_2) \int\limits_0^\infty e^{-\mu x} dF(x) = (a_1 + a_2) f^*(\mu).$$

К следующему светофору также придут некоторые автомобили из числа появившихся на трассе между светофорами. Интенсивность этого потока будет равна

$$\lambda \int\limits_0^\infty \int\limits_0^y e^{-\mu x} dx dF(y) = \lambda \mu^{-1} (1 - f^*(\mu)).$$

Из соображений симметрии интенсивности потоков автомобилей, следующих по трассе, равны для всех светофоров, поэтому получаем уравнение

$$a_1 = (a_1 + a_2) f^*(\mu) + \lambda \mu^{-1} (1 - f^*(\mu)), \tag{16}$$

откуда немедленно вытекает (15).

Теорема 4. Если $V > 0$, $\mu > 0$ и выполнены условия

$$a_1 \theta < \nu \gamma_1^{-1}, \quad (a_2 + a_3)\theta < \nu \gamma_2^{-1}, \tag{17}$$

где $\theta = \gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1}$, а параметр a_1 задается соотношением (15), то процессы $X_i(t)$, $i = 1,\, 2,\, 3$, имеют собственное предельное распределение.

Доказательство. Совокупность светофоров представляет собой своеобразную сеть Джексона (см., например, [18]) с бесконечным числом узлов. Ее особенность состоит в том, что между переходами из узла i в узел $i+1$ требования могут исчезать и появляться. Вероятность того, что требование, прошедшее узел с номером i, появится перед узлом с номером $i+1$, равна $f^*(\mu)$, так что интенсивность потока таких требований равна $(a_1 + a_2) f^*(\mu)$. Интенсивность пуассоновского потока вновь поступающих требований составляет $(\lambda/\mu)(1 - f^*(\mu))$. Следовательно, соотношение

(16) представляет собой уравнение баланса для рассматриваемой сети. Поясним смысл соотношений (17). *Циклом* назовем временной интервал между последовательными включениями зеленого света в направлении основной трассы, так что θ — средняя продолжительность *цикла*. Первое из соотношений (17) означает, что среднее число автомобилей, приходящих к светофору за цикл по трассе, меньше математического ожидания количества автомобилей, которые могут пройти через светофор в этом направлении. Второе из соотношений (17) имеет тот же смысл для перпендикулярного к основной трассе направления. Строгое доказательство теоремы использует метод обновляющих событий, а также идеи и подходы, разработанные А.А. Боровковым [19–20] и В.В. Калашниковым и С.Г. Фоссом [21]. Детали опущены ввиду их громоздкости и прикладной направленности данной статьи.

III.3. Плотность потока автомобилей при наличии светофоров

Введем случайный процесс $X(t)$ со значениями в фазовом пространстве $\mathrm{X} = \{x\}$, где $x = (y_i,\ l_i,\ n_i,\ k_i,\ z_1^{(i)},\ \ldots,\ z_{k_i}^{(i)},\ e_i)_{i=-\infty}^{\infty}$, y_i — координата i-го светофора, l_i — число автомобилей на трассе перед i-м светофором, n_i — число автомобилей в перпендикулярном к трассе направлении перед i-м светофором, k_i — число автомобилей между i-м и $(i+1)$-м светофорами, $z_j^{(i)}$ — расстояние j-го из указанных автомобилей до i-го светофора, $j = 1, \ldots, k_i$, наконец, $e_i = 1$, если у i-го светофора горит зеленый свет для трассы, и $e_i = 0$, если красный.

В сделанных предположениях процесс $X(t)$ — марковский и, если выполнены условия теоремы 4, у него есть стационарное распределение. Далее будем предполагать, что процесс $X(t)$ стационарен.

Под плотностью потока автомобилей будем понимать

$$\Lambda = \lim_{A\to\infty} \frac{N_A}{2A},$$

где, как и раньше, N_A — число автомобилей в промежутке $(-A, A)$.

Пусть αdx — вероятность наличия автомобилей в интервале $(x, x+dx)$, причем x лежит между светофорами. Если $\kappa = \int_0^\infty (1 - F(x))dx$ — среднее расстояние между светофорами, то

$$\Lambda = \frac{m_1}{\kappa} + \alpha, \tag{18}$$

где m_1 — среднее число автомобилей перед светофором на трассе.

Чтобы найти α, введем функцию $\beta(x)$, представляющую собой условную плотность автомобилей при условии, что ближайший слева светофор находится на расстоянии x. Обычным образом получаем уравнение

$$V\frac{d\beta}{dx} = -\mu V\beta(x) + \lambda \tag{19}$$

с начальным условием

$$\beta(0) = \frac{a_1 + a_2}{V}. \tag{20}$$

Решение (19) при условии (20) имеет вид

$$\beta(x) = \frac{\lambda}{V\mu}(1 - e^{-\mu x}) + \frac{a_1 + a_2}{V}e^{-\mu x}. \tag{21}$$

Теперь из теории восстановления (см., например, [22]) получаем

$$\alpha = (\kappa)^{-1}\int_0^\infty \beta(y)(1 - F(y))dy.$$

Используя (21) и (15), после несложных выкладок находим

$$\alpha = \frac{a_2 + \lambda\kappa}{V\kappa\mu} = \frac{\lambda}{V\mu} + \frac{a_2}{V\kappa\mu},$$

откуда с учетом (18) получаем формулу

$$\Lambda = \frac{\lambda}{V\mu} + \frac{a_2}{V\kappa\mu} + \frac{m_1}{\kappa}.$$

Основная сложность состоит в вычислении m_1. Этому посвящен следующий раздел.

IV. Функционирование регулируемого перекрестка

IV.1. Описание модели

Предположим, что автомобили движутся в двух перпендикулярных направлениях по однополосным трассам. Мы хотим изучить, как наличие светофора влияет на образование очередей автомобилей. Пусть $\{t_n^{(i)}\}_{n=1}^{\infty}$ — это последовательные моменты включения зеленого света в i-м направлении, $i = 1, 2$, и $0 = t_1^{(1)} < t_1^{(2)} < t_2^{(1)} < \ldots$. Интервалы между переключениями

$$\tau_n^{(1)} = t_n^{(2)} - t_n^{(1)}, \quad \tau_n^{(2)} = t_{n+1}^{(1)} - t_n^{(2)}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

образуют две независимые последовательности независимых одинаково распределенных (в каждой последовательности) случайных величин соответственно с функциями распределения $G_1(x)$ и $G_2(x)$ и средними γ_1^{-1} и γ_2^{-1}. Сумму $\tau_n^{(1)} + \tau_n^{(2)}$ назовем n-м циклом и положим $\theta = \gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1}$. Поток автомобилей, прибывающих к перекрестку в i-м направлении, $A_i(t)$ является пуассоновским с интенсивностью λ_i, $i = 1, 2$. Эти потоки предполагаются независимыми. Красный свет светофора запрещает движение, и автомобиль останавливается у светофора или в конце очереди ожидающих автомобилей. Когда загорается зеленый свет, время прохождения перекрестка является показательно распределенной с параметром ν случайной величиной для каждого автомобиля. Зеленый свет в первом направлении соответствует красному во втором и наоборот. Случайные величины, определяющие функционирование светофора и прохождение перекрестка автомобилями, между собой независимы и не зависят от потоков прибывающих автомобилей.

IV.2. Эргодическая теорема

Рассмотрим случайный процесс $X(t) = (X_1(t),X_2(t))$, где $X_i(t)$ — число автомобилей, ожидающих в момент t перед перекрестком в i-м направлении, $i = 1,\, 2$. Согласно нашим предположениям процесс $X(t)$ не является марковским. Сначала мы установим, при каких условиях существует собственное предельное распределение этого процесса при $t \to \infty$.

Теорема 5. Пределы

$$\lim_{t\to\infty} P(X_i(t) = j) = p_j^{(i)}, \quad j = 0,\, 1,\, 2,\, ..., \quad i = 1,\, 2, \tag{22}$$

с $p_j^{(i)} > 0$ и $\sum_{j=0}^{\infty} p_j^{(i)} = 1$ существуют тогда и только тогда, когда

$$\rho_i = \frac{\lambda_i \gamma_i \theta}{\nu} < 1, \quad i = 1,\, 2. \tag{23}$$

Доказательство. Поскольку процессы $A_1(t)$ и $A_2(t)$ — пуассоновские, процесс $X(t)$ является регенерирующим. Его точки регенерации — это такие моменты $t_j^{(1)}$, для которых $X_i(t_j^{(1)}) = 0$, $i = 1, 2$, то есть в обоих направлениях нет очереди автомобилей и для первого направления включился зеленый свет. Существование пределов (20) следует из теоремы Смита (см., например, [22]). Эти пределы $\{p_j^{(i)}\}_{j=0}^{\infty}$ образуют распределение тогда и только тогда, когда процесс $X_i(t)$ стохастически ограничен, а именно:

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{t\to\infty} P(X_i(t) > k) = 0. \tag{24}$$

Мы установим, что условие (23) эквивалентно (24). Доказательство этого факта основано на процедуре мажорирования. Введем вспомогательные процессы $Y_i(t)$, $i = 1,\, 2$, числа автомобилей, которые могли бы пройти через перекресток, если все время имелась очередь из ожидающих автомобилей. В нашей модели $Y_i(t)$, $i = 1,\, 2$, — дважды стохастические пуассоновские процессы (ДСПП) (см., например, [23]) со случайными интенсивностями:

$$y_1(t,\omega) = \nu \sum_{k=1}^{\infty} I(t \in (t_k^{(1)}, t_k^{(2)}]),$$

$$y_2(t,\omega) = \nu \sum_{k=1}^{\infty} I(t \in (t_k^{(2)}, t_{k+1}^{(1)}]).$$

Здесь и далее $I(A)$ означает индикатор события A.

Рассмотрим первое направление и, без потери общности, положим $X_1(0) = 0$. Нас интересует поведение вложенного процесса $x_n = X_1(t_n^{(1)} - 0)$. Для его исследования введем два вспомогательных процесса с помощью следующих соотношений:

$$x_0^- = 0, \quad x_n^- = [x_{n-1}^- + \xi_n^{(1)} - \eta_n^{(1)}]^+,$$

$$x_0^+ = 0, \quad x_n^+ = [x_{n-1}^+ - \eta_n^{(1)}]^+ + \xi_n^{(1)}, \tag{25}$$

где

$$\xi_n^{(1)} = A_1(t_{n+1}^{(1)}) - A_1(t_n^{(1)}), \quad \eta_n^{(1)} = Y_1(t_n^{(2)}) - Y_1(t_n^{(1)}).$$

Таким образом, $\xi_n^{(1)}$ — это число автомобилей, прибывающих в первом направлении, а $\eta_n^{(1)}$ — число автомобилей, которые могут пройти перекресток в этом же направлении за n-й цикл.

Нетрудно проверить, что для любого $n \geqslant 1$

$$x_n^- \leqslant_{st} x_n \leqslant_{st} x_n^+. \tag{26}$$

В самом деле, пусть $\tilde{\eta}_n^{(1)}$ — это число автомобилей, прошедших через перекресток в первом направлении в течение n-го цикла, тогда

$$x_n = x_{n-1} + \xi_n^{(1)} - \tilde{\eta}_n^{(1)}.$$

Очевидно, что $\eta_n^{(1)} \geqslant_{st} \tilde{\eta}_n^{(1)}$. Вместе с (25) это неравенство дает первое из неравенств (26). Второе неравенство доказывается по индукции. Очевидно, $x_1 \leqslant_{st} x_1^+$, поскольку $x_0^+ = x_0 = 0$, $x_1^+ = \xi_1^{(1)}$ и $x_1 = \xi_1^{(1)} - \tilde{\eta}_n^{(1)}$. Теперь предположим, что $x_{n-1}^+ \geqslant_{st} x_{n-1}$. Отсюда немедленно вытекает, что

$$x_n = x_{n-1} + \xi_n^{(1)} - \tilde{\eta}_n^{(1)} \leqslant_{st} x_{n-1}^+ + \xi_n^{(1)} - \tilde{\eta}_n^{(1)}.$$

Если очередь перед светофором (в первом направлении) была не пуста в течение всего n-го цикла, то $\tilde{\eta}_n^{(1)} = \eta_n^{(1)}$ и $x_n \leqslant x_n^+ = [x_{n-1}^+ - \eta_n^{(1)}]^+ + \xi_n^{(1)}$. Если же были моменты, когда очередь была пустая, то $x_n \leqslant \xi_n^{(1)}$. Следовательно, и в этом случае $x_n \leqslant_{st} x_n^+$.

Процесс $\{x_n^-\}$ — это случайное блуждание с задерживающей границей в нуле. Если $\rho_1 \geqslant 1$, то процесс стохастически неограничен (см., например, [24]). А это означает, что $p_j^{(1)} = 0$ для любого j.

Теперь пусть $\rho_1 < 1$. Рассмотрим $\{x_n^+\}$, положив $S_k = \sum_{j=1}^{k} (\xi_j^{(1)} - \eta_{j+1}^{(1)})$, $S_0 = 0$ и $M_n = \xi_n^{(1)} + \max_{0 \leqslant j < n} S_j$. После некоторых преобразований из рекуррентных соотношений (23) нетрудно получить, что

$$P(x_n^+ \leqslant y) = P(M_n \leqslant y).$$

Поскольку $E(\xi_j^{(1)} - \eta_{j+1}^{(1)}) < 0$, случайное блуждание $\{S_n\}$ имеет отрицательный снос. Следовательно, процесс $\{M_n\}$ стохастически ограничен при $n \to \infty$.

Предложенная модель не учитывает зависимость времени прохода перекрестка от длины очереди. Одна из возможностей преодоления этого недостатка — предположение, что автомобиль, приходящий к светофору в то время, как для него горит зеленый свет, проходит его немедленно, если нет ожидающих автомобилей. Другими словами, время прохождения перекрестка равно нулю, а не является показательно распределенной случайной величиной. Такую ситуацию мы назовем *эффектом проскакивания.*

Обозначим $\hat{X}_i(t)$ аналог процесса $X_i(t)$, $i = 1,\, 2$, для модифицированной модели, то есть с проскакиванием. Нетрудно установить следующий результат.

Следствие 1. При выполнении условий (23) процессы $\hat{X}_i(t)$, $i = 1,\, 2$, являются эргодическими.

Доказательство. Рассмотрим только первое направление, для второго рассуждения аналогичны. Пусть $\rho_1 < 1$ и процесс $\hat{X}_1(t)$ стохастически неограничен, то есть $P(\hat{X}_1(t) = j) \to 0$ при $t \to \infty$ для любого j. Введем следующее событие:

$$C_n = \{\hat{X}_1(t_n^{(1)} + t) > 0 \quad \forall\, t \in [0,\tau_n^{(1)}]\}.$$

Из стохастической неограниченности $\hat{X}_1(t)$ вытекает

$$P(C_n) \to 1 \text{ при } n \to \infty. \qquad (27)$$

Можно получить следующую оценку сверху:

$$E\hat{x}_{n+1} = E\hat{X}_1(t_{n+1}^{(1)} - 0) \leqslant E(\hat{x}_n + \xi_n^{(1)} - \eta_n^{(1)})I(C_n) +$$
$$+E(\hat{x}_n + \xi_n^{(1)})I(\bar{C}_n) =$$
$$= E\hat{x}_n + E\xi_n^{(1)} - E\eta_n^{(1)} + E\eta_n^{(1)} I(\bar{C}_n).$$

В силу существования $E\eta_n^{(1)}$ и условия (27) последнее слагаемое $E\eta_n^{(1)} I(\bar{C}_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $E\hat{x}_{n+1} \leqslant E\hat{x}_n$ в предположении $\rho_1 < 1$, а это противоречит стохастической неограниченности $\hat{X}_1(t)$.

IV.3. Стационарный режим функционирования светофора при произвольном распределении интервалов между переключениями

Начнем с рассмотрения вложенной цепи Маркова $X_n^{(i)} = X_i(t_n^{(i)} - 0)$, где $t_n^{(i)}$ — момент n-го включения зеленого света в i-м направлении, $n \geqslant 1$, $i = 1,\, 2$. Предполагается, что выполнено условие (23).

Наша цель — предложить алгоритм для подсчета стационарного распределения процесса $\{X_n^{(i)}\}$, $i = 1,\, 2$, а также среднего числа ожидающих автомобилей в стационарном режиме. Можно рассмотреть только $\{X_n^{(1)}\}$, поскольку результаты для $\{X_n^{(2)}\}$ получаются заменой λ_1 на λ_2 и G_1 на G_2.

Введем вспомогательный процесс рождения и гибели $Z(t)$ с поглощающим состоянием $\{0\}$, с интенсивностью рождения λ_1 и интенсивностью гибели ν. Положим

$$\varphi_{kj}(t) = P(Z(t) = j | Z(0) = k), \quad k > 0, \quad j \geqslant 0.$$

Эти функции удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\varphi'_{k0}(t) = \nu\varphi_{k1}(t),$$
$$\varphi'_{k1}(t) = -(\lambda_1 + \nu)\varphi_{k1}(t) + \nu\varphi_{k2}(t), \qquad (28)$$
$$\varphi'_{kj}(t) = -(\lambda_1 + \nu)\varphi_{kj}(t) + \nu\varphi_{k,j+1}(t) + \lambda_1\varphi_{k,j-1}(t),$$
$$j > 1,$$

с начальными условиями $\varphi_{kk}(0) = 1$ и $\varphi_{kj}(0) = 0$ при $j \neq k$. Решение уравнений (28) может быть получено с помощью применения преобразования Лапласа и его последующего обращения. Таким образом, мы установим явный вид $\varphi_{kj}(t)$ в терминах обобщенных функций Бесселя первого рода.

С этой целью введем производящие функции

$$\Phi_k(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{kn}(t) z^n, \quad |z| < 1.$$

Из (28) немедленно вытекает, что

$$z\frac{\partial \Phi_k(z,t)}{\partial t} = (1 - z)(\nu - \lambda_1 z)(\Phi_k(z,t) - \varphi_{k0}(t)),$$

с $\Phi_k(z,0) = z^k$.

Используя преобразование Лапласа по t,

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \quad Res \geqslant 0,$$

получаем

$$\Phi_k^*(z,s) = \frac{z^{k+1} - \varphi_{k0}^*(s)(1 - z)(\nu - \lambda_1 z)}{sz - (1 - z)(\nu - \lambda_1 z)}.$$

Поскольку $\Phi_k^*(z,s)$ аналитична в единичном круге, нули знаменателя $\alpha_l(s)$ с $|\alpha_l(s)| < 1$ должны совпадать с нулями числителя. Это дает следующее выражение:

$$\varphi_{k0}(s) = \frac{\alpha_2(s)^{k+1}}{(1 - \alpha_2(s))(\nu - \lambda_1\alpha_2(s))},$$

где

$$\alpha_2(s) = \frac{\lambda_1 + \nu + s - \sqrt{(\lambda_1 + \nu + s)^2 - 4\lambda_1\nu}}{2\lambda_1}.$$

Обращая преобразование Лапласа $\Phi_k^*(z,s)$ и разлагая $\Phi_k(z,t)$ в ряд по степеням z, приходим к следующему виду для коэффициентов:

$$\varphi_{kj}(t) = e^{-(\lambda_1+\nu)t}(\lambda_1/\nu)^{(j-2)/2}(J_{|j-k|}(2\sqrt{\lambda_1\nu t}) -$$
$$- J_{j+k}(2\sqrt{\lambda_1\nu t})), \quad j > 0.$$

Здесь

$$J_l(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(u/2)^{l+2m}}{m!\Gamma(l + m + 1)}$$

— это обобщенная функция Бесселя первого рода, а

$$\varphi_{k0}(t) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{kj}(t).$$

Итак, мы получили в явном виде решение уравнений (28).

Теперь подсчитаем переходные вероятности для вложенной цепи Маркова $\{X_n^{(1)}\}$. Пусть d_j — вероятность того, что j автомобилей прибудут к перекрестку в первом направлении, пока для них горит красный свет, следовательно,

$$d_j = \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 y}(\lambda_1 y)^j (j!)^{-1} dG_2(y), \quad j = 0, 1, \ldots$$

Введем также

$$b_{00} = 1, \quad b_{kj} = \int_0^{\infty} \varphi_{kj}(y) dG_1(y), \quad k, j > 0,$$

и положим $b_{k0} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} b_{kj}$.

Переходные вероятности вложенной цепи Маркова задаются формулами

$$P_{kj}^{(1)} = P(X_{n+1}^{(1)} = j | X_n^{(1)} = k) = \sum_{m=0}^{j} b_{km} d_{j-m},$$
$$k, j = 0, 1, \ldots$$

Стационарное распределение $\{\pi_k^{(0)}\}$ вложенной цепи Маркова получается как решение следующей системы уравнений:

$$\pi_j^{(0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k^{(0)} P_{kj}^{(1)}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j^{(0)} = 1.$$

Далее, стационарное распределение $\{\pi_j\}$ процесса $X_1(t)$ имеет вид

$$\pi_j = \theta^{-1} \sum_{i=0}^{j} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k^{(0)} b_{ki} \int_0^{\infty} e^{-\lambda_1 y} (\lambda_1 y)^{j-i} [(j-i)!]^{-1} \times$$
$$\times (1 - G_2(y)) dy +$$
$$+ \theta^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k^{(0)} \int_0^{\infty} \varphi_{kj}(y)(1 - G_1(y)) dy. \qquad (29)$$

Используя эти результаты, нетрудно построить алгоритм для вычисления среднего числа автомобилей в стационарном режиме.

IV.4. Нерегулируемый перекресток как перекресток со случайными интервалами между переключениями светофора

Модель, изученная в разделе IV.3, может быть использована для анализа нерегулируемого перекрестка, рассмотренного в [15]. Мы имеем дело с пересечением двух перпендикулярных дорог, причем первое направление считается главным. Следовательно, автомобили, движущиеся в первом направлении, не останавливаются перед перекрестком. С другой стороны, автомобиль, прибывающий к перекрестку во втором направлении, может проехать только в том случае, когда на главной дороге нет автомобилей в интервале длины I перед перекрестком. Предположим, что скорость автомобилей в первом направлении равна V, следовательно, время прохождения интервала безопасности I будет I/V.

Остальные предположения такие же, как в предыдущих параграфах. А именно, потоки прибывающих автомобилей пуассоновские. Время прохождения перекрестка для первого направления равно нулю (автомобили движутся с постоянной скоростью, и можно считать, что для первого направления все время включен зеленый свет). Для второго направления можно считать, что зеленый свет загорается в тот момент, когда промежуток $[-I,0]$ на главной дороге становится пустым. (Точка 0 означает перекресток.) Красный свет загорается в тот момент, когда в указанном интервале на главной дороге появляется автомобиль. Таким образом, для второго направления у нас будет светофор со случайными интервалами между переключениями.

Пусть $X_2(t)$ — это число автомобилей, ожидающих в момент t у перекрестка, чтобы проследовать во втором направлении. Мы рассмотрим систему $M|D|\infty$, то есть бесконечно-канальную систему с входящим потоком интенсивности λ_1 и постоянным временем обслуживания I/V. Число клиентов в этой системе в момент t обозначим $q_1(t)$. Таким образом, «зеленый интервал» во втором направлении — это свободный период в рассматриваемой системе обслуживания, его функция распределения равна $G_2(x)$. А «красный интервал» — это период занятости в системе $M|D|\infty$, и его функция распределения равна $G_1(x)$. Так как входящий поток пуассоновский с интенсивностью λ_1, мы получаем $G_2(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x}$.

Следствие 2. Процесс $X_2(t)$ имеет собственное предельное распределение тогда и только тогда, когда

$$\lambda_2 e^{\lambda_1 I/V} < \nu. \qquad (30)$$

Доказательство. Чтобы получить из теоремы 5 условия эргодичности для числа автомобилей $X_2(t)$, ожидающих во втором направлении, нам необходимо знать соответствующие средние

$\gamma_i^{-1} = \int\limits_0^\infty x dG_i(x)$, $i = 1, 2$. Очевидно, $\gamma_2 = \lambda_1$ и в стационарном режиме

$$P(q_1(t) = 0) = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2} = e^{-\lambda_1 I/V},$$

поэтому

$\gamma_1 = \lambda_1^{-1}(e^{\lambda_1 I/V} - 1)$ и $\theta = \gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} = \lambda_1^{-1} e^{\lambda_1 I/V}$.

Следовательно, согласно теореме 5 условия эргодичности для процесса $X_2(t)$ имеют вид (30).

Чтобы использовать результаты раздела IV.3 для построения алгоритма подсчета стационарного распределения $X_2(t)$, нам необходимо знать $G_1(x)$. Для этого используем следующий результат из [15]. Пусть $W(t)$ — время ожидания автомобиля, прибывающего к перекрестку во втором направлении, если других ждущих автомобилей нет. Доказано, что

$$F(x) = \lim_{t\to\infty} P(W(t) < x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{k_x} (-1)^j e^{-\lambda_1 (j+1) I/V} \left(\frac{\lambda_1^{j+1}(x - jI/V)^{j+1}}{(j+1)!} - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_1^{j+1}(x - jI/V)^j}{j!} \right),$$

где $k_x = [xV/I]$ и $[\cdot]$ означает целую часть.

Как хорошо известно из теории восстановления (см., например, [22]):

$$F(x) = \frac{1}{\gamma_2 \theta} + \frac{1}{\gamma_1 \theta} \gamma_1 \int\limits_0^x (1 - G_1(y)) dy, \qquad (31)$$

откуда мы немедленно получаем

$$G_1(x) = 1 - \theta F'(x).$$

Для преобразования Лапласа $g_1^*(s) = \int e^{-sx} dG_1(x)$ результат записывается в более компактном виде. Без потери общности положим $I/V = 1$. Тогда, как показано в [15],

$$\int\limits_{0-}^\infty e^{-sx} dF(x) = (s + \lambda_1) e^{s - \lambda_1} (s e^s + \lambda_1 e^{-\lambda_1})^{-1},$$

что дает вместе с (31) следующее выражение:

$$g_1^*(s) = (\lambda_1 + s)(\lambda_1 + s e^{s + \lambda_1})^{-1}.$$

Таким образом, нерегулируемый перекресток может быть исследован с помощью модели со светофором, имеющим случайные промежутки между переключениями света.

IV.5. Показательно распределенные интервалы между переключениями

Теперь предположим, что $G_i(x) = 1 - e^{-\gamma_i x}$ для $x > 0$, $i = 1, 2$, и автомобиль, прибывающий в то время, когда для него горит зеленый свет и нет ожидающих автомобилей, немедленно проходит перекресток.

Рассмотрим цепь Маркова $\{X_1(t),\ e(t)\}$, где $e(t) = 1$, если для первого направления горит зеленый свет, и $e(t) = 0$, если горит красный свет. Далее предполагается, что условия (23) выполнены и процесс $\{X_1(t),\ e(t)\}$ стационарный. Обозначим

$$p_j = P(X_1(t) = j,\ e(t) = 1),$$

$$r_j = P(X_1(t) = j,\ e(t) = 0),$$

$$P(z) = \sum_{j=0}^\infty p_j z^j, \quad R(z) = \sum_{j=0}^\infty r_j z^j, \quad |z| \leqslant 1.$$

Используя уравнения для стационарного распределения процесса $\{X_1(t),e(t)\}$:

$$p_0 \gamma_1 = p_1 \nu + r_0 \gamma_2,$$

$$p_1(\gamma_1 + \nu + \lambda_1) = p_2 \nu + r_1 \gamma_2,$$

$$p_j(\gamma_1 + \nu + \lambda_1) = p_{j+1}\nu + p_{j-1}\lambda_1 + r_j \gamma_2, \quad j \geqslant 2,$$

$$r_0(\lambda_1 + \gamma_2) = p_0 \gamma_1,$$

$$r_j(\lambda_1 + \gamma_2) = r_{j-1}\lambda_1 + p_j \gamma_1, \quad j \geqslant 1,$$

мы получаем следующие соотношения для производящих функций $P(z)$ и $R(z)$:

$$P(z) == p_0 \frac{(\lambda_1 z - \nu)(\gamma_2 + \lambda_1(1 - z))}{(\lambda_1 z - \nu)(\gamma_2 + \lambda_1(1 - z)) + \lambda_1 \gamma_1 z},$$

$$R(z) = \frac{\gamma_1 P(z)}{\gamma_2 + \lambda_1(1 - z)}. \qquad (32)$$

Поскольку $P(1) = P(e(t) = 1) = \gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1}$, легко видеть, что

$$p_0 = \frac{\nu\gamma_2 - \lambda_1(\gamma_1 + \gamma_2)}{(\gamma_1 + \gamma_2)(\nu - \lambda_1)}. \qquad (33)$$

Вводя новые параметры $c_i = \lambda_i \nu^{-1}$, $x = (\gamma_1\theta)^{-1}$, $d = \nu\theta$, можно переписать (23) в следующем виде:

$$c_i \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \quad c_1 + c_2 < 1, \quad x \in (c_1, 1 - c_2),$$

здесь x — это доля времени, когда для первого направления горит зеленый свет.

Средняя длина очереди в первом направлении (то есть среднее число автомобилей, ждущих перед светофором), подсчитанная на основе (32) и (33), имеет вид

$$m_1(x) = P'(1) + R'(1) =$$

$$= \frac{c_1(1 - x)(1 + d(1 - c_1)x(1 - x))}{(1 - c_1)(x - c_1)}.$$

Аналогичное выражение справедливо для второго направления

$$m_2(x) = \frac{c_2 x(1 + d(1 - c_2)x(1 - x))}{(1 - c_2)(1 - x - c_2)}.$$

Пусть θ фиксировано, мы выбираем $x \in (c_1, 1 - c_2)$ таким образом, чтобы оно обеспечивало минимум $f(x) = m_1(x) + m_2(x)$. Иными словами, мы ищем единственную точку, удовлетворяющую уравнению $m'_1(x) = -m'_2(x)$. Очевидно, что в симметричном случае $c_1 = c_2 = c$ будет $x_{\min} = 0{,}5$, а

$$f(0{,}5) = 2c[1 + 0{,}25d(1-c)][(1-c)(1-2c)]^{-1}.$$

Условия высокой загрузки возникают, если либо $x \downarrow c_1$, либо $x \uparrow 1 - c_2$, соответственно возникает длинная очередь ожидающих автомобилей в первом или во втором направлении. Кроме того, если $x \downarrow c_1$, то

$$m_1(x) \approx \frac{c_1(1 + c_1 d(1-c_1)^2)}{x - c_1}.$$

Замечание 1. Соотношения (29) позволяют найти средние числа автомобилей m_i, $i = 1, 2$, ожидающих у светофора в i-м направлении. Численные расчеты показывают, что средние для показательных промежутков между переключениями светофора много больше, чем для постоянных интервалов, если ρ_i близки к единице, в то время как для $\rho_i \approx 0{,}5$ они мало отличаются.

Некоторые результаты приведены в табл. 1, 2 и 3, где индекс d у средних m_i^d указывает, что речь идет о постоянных интервалах между переключениями, а индекс e соответствует показательному распределению, $m_{total} = m_1 + m_2$, $\theta = \gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1}$.

Таблица 1

Средние длины очередей в первом направлении, $\nu = 15, \theta = 5$

λ_1	5	5	5	5	5	7	7	7	7	9	9	9	10	10
γ_1^{-1}	4,5	4,0	3,0	2,5	2,0	4,5	4,0	3,0	2,8	4,5	4,0	3,7	4,5	4,0
γ_2^{-1}	0,5	1,0	2,0	2,5	3,0	0,5	1,0	2,0	2,2	0,5	1,0	1,3	0,5	1,0
ρ_1	0,37	0,42	0,58	0,67	0,83	0,52	0,58	0,78	0,83	0,67	0,75	0,81	0,74	0,83
m_1^d	2,5	5,0	10,0	12,7	16,8	3,5	7,0	14,7	16,9	4,5	9,3	12,8	5,1	11,1
m_1^e	0,5	1,9	9,8	20,3	58,5	0,9	3,9	27,8	44,8	1,9	8,7	18.9	2,8	15,0

Таблица 2

Средние длины очередей в двух направлениях, $\lambda_1 = \lambda_2, \nu = 20, \theta = 5$

λ_1	5	5	5	5	5	5	5	5	5
γ_1^{-1}	3,6	3,5	3,2	3,0	2,5	2,0	1,8	1,5	1,4
γ_2^{-1}	1,4	1,5	1,8	2,0	2,5	3,0	3,2	3,5	3,6
ρ	0,35	0,36	0,39	0,42	0,50	0,63	0,69	0,83	0,89
m_1^d	7,0	7,5	9,0	10,0	12,7	16,8	20,0	26,5	28,4
m_1^e	3,2	3,7	5,6	7,2	13,2	25,3	35,5	78,2	129,0
m_2^d	28,4	26,5	20,0	16,8	12,7	10,0	9,0	7,5	7,0
m_2^e	129,0	78,2	35,5	25,3	13,2	7,2	5,6	3,7	3,2
m_{total}^d	35,4	34,1	29,0	26,8	25,4	26,8	29,0	34,1	35,4
m_{total}^e	132,2	81,9	41,1	32,6	26,3	32,6	41,1	81,9	132,2

Таблица 3

Средние длины очередей в двух направлениях, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\nu = 20, \theta = 5$

λ_1	5	5	5	5	5	5	5	5	5
λ_2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
γ_1^{-1}	3,6	3,5	3,2	3,0	2,5	2,0	1,8	1,5	1,4
γ_2^{-1}	1,4	1,5	1,8	2,9	2,5	3,0	3,2	3,5	3,6
ρ	0,35	0,36	0,39	0,42	0,50	0,63	0,69	0,83	0,89
m_1^d	7,0	7,5	9,0	10,0	12,7	16,8	20,0	26,5	28,4
m_1^e	3,2	3,7	5,6	7,2	13,2	25,3	35,5	78,2	129,0
m_2^d	11,5	10,9	9,7	9,0	7,5	6,0	5,4	4,5	4,2
m_2^e	17,7	15,5	11,1	9,1	5,6	3,4	2,7	1,8	1,6
m_{total}^d	18,5	18,4	18,7	19,0	20,2	22,8	25,4	31,0	32,6
m_{total}^e	20,9	19,2	16,7	16,3	18,8	28,7	38,1	80,0	130,5

В частности, мы видим, что в симметричном случае, табл. 2, суммарное среднее числа ожидающих автомобилей достигает минимума при коэффициенте загрузки 0,5. А из табл. 3 ясно, что в несимметричном случае минимум достигается в окрестности точки 0,42 для показательно распределенных интервалов и 0,36 для постоянных.

IV.6. Функционирование светофора в условиях высокой загрузки

Мы будем рассматривать только поведение $X_1(t)$ при $\rho_1 \uparrow 1$, изучение $X_2(t)$ производится аналогично. Ситуация высокой загрузки может возникать различными способами. Предположим, что интенсивность поступления автомобилей зависит от малого параметра ε следующим образом: $\lambda_1^\varepsilon = (1-\varepsilon)\lambda_1/\rho_1$. Это значит, что $\rho_1^\varepsilon = (1-\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$. Пусть $\{X_n^{(1)}(\varepsilon)\}_{n\geqslant 1}$ — стационарная вложенная цепь Маркова, соответствующая потоку автомобилей с интенсивностью λ_1^ε. Для удобства записи обозначим τ_i, $i = 1, 2$, случайную величину, имеющую такое же распределение, как $\tau_n^{(i)}$ при любом n.

Теорема 6. Если $E\tau_i^{2+\delta} < \infty$, $i = 1, 2$, для некоторого $\delta > 0$, то

$$P(\varepsilon X_n^{(1)}(\varepsilon) > y) \to \exp\{-2\nu\mu_1 y/\sigma^2\}, \text{ при } \varepsilon \to 0,$$

где $\sigma^2 = \lambda_1\mu_2 + (\lambda_1+\nu)\mu_1 + \lambda_1^2 D\tau_2 + (\lambda_1-\nu)^2 D\tau_1$, а $\mu_i = \gamma_i^{-1}$, $\lambda_1 = \nu\mu_1\theta^{-1}$.

Схема доказательства. Пусть $\{\xi_n^\varepsilon\}_{n\geqslant 1}$ и $\{\eta_n\}_{n\geqslant 1}$ — две независимые последовательности случайных величин независимых и одинаково распределенных для каждой последовательности. Здесь ξ_n^ε — число клиентов (автомобилей), поступающих в систему в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности λ_1^ε в течение интервала $\tau_n^{(1)} + \tau_n^{(2)}$, в то время как η_n — это число клиентов, поступающих в соответствии с пуассоновским потоком интенсивности ν в течение интервала $\tau_n^{(1)}$. Положим $S_0^\varepsilon = 0$, $S_k^\varepsilon = \sum_{j=1}^k(\xi_j^\varepsilon - \eta_j)$ и $S^\varepsilon = \sup_{k\geqslant 0} S_k^\varepsilon$. Мы устанавливаем, что для любого фиксированного $y \geqslant 0$:

$P(\varepsilon X_n^{(1)}(\varepsilon) > y)/P(\varepsilon S^\varepsilon > y) \to 1$ при $\varepsilon \to 0$.

Как показано в книге [25], глава 4, теорема 18, распределение $\varepsilon S^\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ сходится к показательному с параметром $2\nu\mu_1/\sigma^2$, где σ^2 приведено в условиях теоремы 6. Это заканчивает доказательство.

Следствие 3. В условиях теоремы 6

$$\varepsilon E X_n^{(1)}(\varepsilon) \to \sigma^2/2\nu\mu_1 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Легко подсчитать, что в случае показательного распределения интервалов между переключениями $D\tau_j = \mu_j^2$, $j = 1, 2$, следовательно,

$$\sigma^2 = \lambda_1\mu_2 + (\lambda_1+\nu)\mu_1 + \lambda_1^2\mu_2^2 + (\lambda_1-\nu)^2\mu_1^2 = \\ = \sigma_d^2 + \lambda_1^2\mu_2^2 + (\lambda_1-\nu)^2\mu_1^2,$$

где $\sigma_d^2 = \lambda_1\mu_2 + (\lambda_1+\nu)\mu_1$ — это коэффициент σ^2 для случая постоянных интервалов.

Нетрудно установить асимптотическое поведение средних чисел ожидающих автомобилей на главной трассе в условиях высокой загрузки.

Следствие 4. В случае постоянных интервалов между переключениями

$$m_1^d = EX_n^{(1)}(\varepsilon) \approx \frac{\lambda_1\mu_2 + (\lambda_1+\nu)\mu_1}{2\nu\mu_1\varepsilon}, \quad \varepsilon \to 0.$$

Для показательно распределенных интервалов

$$m_1^e \approx \frac{\lambda_1\mu_2 + (\lambda_1+\nu)\mu_1}{2\nu\mu_1\varepsilon} + \frac{\lambda_1^2\mu_2^2 + (\lambda_1-\nu)^2\mu_1^2}{2\nu\mu_1\varepsilon},$$

$$\varepsilon \to 0.$$

Очевидно, что в условиях высокой загрузки средняя длина очереди автомобилей существенно зависит от распределения интервалов между переключениями светофора. Так, для показательного случая

$$\frac{m_1^e}{m_1^d} \approx 1 + \frac{\lambda_1^2\mu_2^2 + (\lambda_1-\nu)^2\mu_1^2}{\lambda_1\mu_2 + (\lambda_1+\nu)\mu_1},$$

а для произвольного распределения интервалов τ_1 и τ_2:

$$\frac{m_1^a}{m_1^d} \approx 1 + \frac{\lambda_1^2 D\tau_2 + (\lambda_1-\nu)^2 D\tau_1}{\lambda_1\mu_2 + (\lambda_1+\nu)\mu_1}.$$

Более того, отношение возрастает с ростом дисперсий.

Итак, можно сделать вывод, что среднее минимально для случая постоянных интервалов. Наша модель позволяет оптимальным образом выбрать соотношение между τ_1 и τ_2.

V. Модель двух последовательных светофоров, учитывающая размер автомобилей

Пусть расстояние между двумя светофорами на главной дороге достаточно мало. В этом случае мы не можем, как делалось ранее, не принимать во внимание размер автомобилей.

V.1. Описание модели

Мы предполагаем, что пуассоновский поток клиентов (автомобилей) интенсивности λ поступает на первый обслуживающий прибор (светофор). Прибор может быть в рабочем состоянии (горит зеленый свет) или недоступен (красный свет). Соответствующие интервалы чередуются и образуют две независимые последовательности, каждая из которых состоит из независимых показательно распределенных случайных величин с параметрами соответственно γ_1 и γ_2. Второй прибор (следующий светофор) функционирует аналогично, но соответствующие параметры равны γ_3 и γ_4. Предполагается также, что оба прибора работают независимо. В отличие от предыдущих разделов мы теперь учитываем размеры автомобилей. Это означает, что перед вторым светофором найдется место только для k автомобилей.

Автомобиль, прибывающий к светофору в то время, когда горит зеленый свет и нет ожидающих автомобилей (прибор в рабочем состоянии и свободен), немедленно проезжает перекресток (время обслуживания равно нулю). В противном случае автомобиль останавливается перед светофором или в конце очереди ожидающих проезда автомобилей. В этом случае, когда прибор снова начнет работать (зажжется зеленый свет), время обслуживания (проезд перекрестка) имеет показательное распределение с параметром ν. Более того, первый прибор блокируется, если заняты все места ожидания перед вторым прибором. Когда появляется свободное место, обслуживание блокированного клиента (автомобиля) повторяется.

Функционирование такой двухфазной системы описывается цепью Маркова $X(t) = \{X_1(t), X_2(t), e_1(t), e_2(t)\}$, где $X_i(t)$ — число автомобилей перед i-м светофором (прибором), $e_i(t) = 1$, если i-й прибор в рабочем состоянии, и $e_i(t) = 0$ в противном случае, $i = 1, 2$.

V.2. Условия эргодичности

Для того чтобы получить необходимые и достаточные условия эргодичности рассматриваемой системы, мы введем вместо второго прибора вспомогательную одноканальную систему, которая будет представлять собой случайную среду для первого прибора.

Предположим, что на второй прибор поступает дважды стохастический пуассоновский поток со случайной интенсивностью $\lambda(t,\omega) = \nu e_1(t)$. Число мест для ожидания перед рассматриваемым прибором равно k. Другими словами, поведение вспомогательной системы совпадает с работой второго прибора, если очередь перед первым все время не пустая.

Пусть $u_2(t)$ — число клиентов во вспомогательной системе, а $e_i(t)$, $i = 1, 2$, были определены в предыдущем параграфе. Цепь Маркова $U(t) = \{u_2(t), e_1(t), e_2(t)\}$ эргодическая, так как число состояний конечно. Нам понадобятся следующие стационарные вероятности:

$$p_j = P(u_2 = j, e_1 = 1, e_2 = 1),$$

$$q_j = P(u_2 = j, e_1 = 0, e_2 = 1),$$

$$r_j = P(u_2 = j, e_1 = 1, e_2 = 0),$$

$$s_j = P(u_2 = j, e_1 = 0, e_2 = 0).$$

Используя прямую систему уравнений Колмогорова, мы получим систему уравнений для соответствующих производящих функций $P(z)$, $Q(z)$, $R(z)$ и $S(z)$:

$$((\gamma_1 + \gamma_2)z - \nu(1 - z)^2)P(z) - \gamma_3 zR(z) - \gamma_2 zQ(z) =$$

$$= -\nu p_0(1 - z)^2 + \nu z^{k+1}(1 - z)p_k,$$

$$-\gamma_1 zP(z) + ((\gamma_2 + \gamma_3)z - \nu(1 - z))Q(z) - \gamma_4 zS(z) =$$

$$= -\nu q_0(1 - z),$$

$$-\gamma_3 P(z) + ((\gamma_1 + \gamma_4) + \nu(1 - z))R(z) - \gamma_2 S(z) =$$

$$= \nu r_k z^k(1 - z),$$

$$-\gamma_1 R(z) - \gamma_3 Q(z) + (\gamma_2 + \gamma_4)S(z) = 0.$$

Введем дополнительные обозначения

$$a_1(z) = (\gamma_1 + \gamma_3)z - \nu(1 - z)^2,$$

$$a_2(z) = \gamma_2(\gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4)(\gamma_2 + \gamma_4)^{-1}z - \nu(1 - z),$$

$$a_3(z) = \gamma_4(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_4)(\gamma_2 + \gamma_4)^{-1} + \nu(1 - z),$$

$$b_1(z) = -\nu(1 - z)p_0 + \nu z^{k+1}p_k,$$

$$b_2 = \nu q_0, \quad b_3(z) = \nu z^k r_k.$$

Положим также

$$g_1(z) = \gamma_1 z(\gamma_3\gamma_4 + (\gamma_2 + \gamma_4)a_3(z)),$$

$$g_2(z) = \gamma_3(a_2(z)(\gamma_2 + \gamma_4) + \gamma_1\gamma_2 z),$$

$$d_1(z) = (\gamma_2 + \gamma_4)(\gamma_1 z b_3(z) - \gamma_3 b_2)g_2(z)^{-1},$$

$$d_2(z) = \gamma_3^{-1}b_3(z) - \gamma_2(\gamma_2 + \gamma_4)^{-1}d_1(z),$$

наконец,

$$f(z) = [(a_1(z)a_3(z)\gamma_3^{-1} - \gamma_4 z)g_2(z) - (\gamma_2(\gamma_2 + \gamma_4)^{-1}\times$$

$$\times a_1(z) + \gamma_2 z)g_1(z)](1 - z)^{-1}.$$

Решая уравнения для производящих функций, мы получим

$$R(z) = \frac{b_1(z) + \gamma_2 z d_1(z) - a_1(z)d_2(z)}{f(z)}g_2(z).$$

Нетрудно показать, что $f(z)$ — это полином третьей степени, имеющий три действительных корня z_i, $i = 1, 2, 3$. Поскольку функция $R(z)$ аналитическая, мы имеем три уравнения для определения неизвестных коэффициентов p_0, q_0, p_k, q_k:

$$b_1(z_i) + \gamma_2 z d_1(z_i) - a_1(z_i)d_2(z_i) = 0,$$

$$i = 1, 2, 3. \tag{34}$$

Четвертое уравнение — это условие нормировки

$$R(1) = \frac{\gamma_2\gamma_3}{(\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_3 + \gamma_4)}. \tag{35}$$

Теорема 7. Цепь Маркова $X(t)$ эргодична тогда и только тогда, когда

$$\lambda < \nu(\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1} - p_k - r_k), \tag{36}$$

где постоянные p_k, r_k удовлетворяют уравнениям (34) и (35).

Доказательство. Пусть $A(t)$ — это число автомобилей, которые прибыли к первому светофору до момента t, а $Y(t)$ — это число автомобилей, которые могли пройти перекресток (быть обслужены), если бы очередь была все время не пустая. Тогда $A(t)$ и $Y(t)$ независимы, $A(t)$ — пуассоновский процесс с параметром λ, в то время как $Y(t)$ — дважды стохастический пуассоновский процесс. Введенный выше процесс $U(t)$ может рассматриваться как случайная среда для первого прибора (светофора) согласно определению, данному в [26], кроме того

$$E(A(t)|U(s),\, 0 \leqslant s \leqslant t) = \int_0^t g(U(s))ds = \lambda t,$$

$$E(Y(t)|U(s),\, 0 \leqslant s \leqslant t) = \int_0^t \varphi(U(s))ds =$$

$$= \nu \int_0^t I(u_2(s) < k,\, e_1(s) = 1)ds.$$

Поскольку у процесса $U(t)$ существует стационарное распределение π, загрузка первого прибора, функционирующего в случайной среде, в соответствии с [26] имеет вид

$$\rho = \frac{E_\pi g(U)}{E_\pi \varphi(U)} = \frac{\lambda}{\nu(P(e_1 = 1) - P(e_1 = 1, u_2 = k))}.$$

В силу доказанной в [26] теоремы число автомобилей перед первым светофором стохастически ограничено тогда и только тогда, когда $\rho < 1$. Поскольку цепь Маркова $X(t)$ неприводимая и непериодическая, ее стохастическая ограниченность эквивалентна эргодичности.

Замечание 2. Найти явный вид решения уравнений (34)–(35) не удается. Мы проанализировали влияние параметра k на условия эргодичности в симметрическом случае $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0{,}5$. Долгие и утомительные вычисления показали, что условие (36) при больших k может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{\lambda}{\nu} < \frac{1}{2} - \frac{\nu + 2}{2k} + o(k^{-1}),$$

откуда при $k = \infty$ мы получаем $\lambda < \nu/2$, что согласуется с теоремой 5.

Интересно также рассмотреть тот случай, когда часть автомобилей, прибывающих к первому светофору во втором направлении (перпендикулярном к основной трассе), может завернуть, то есть после перекрестка следовать в первом направлении. При этом возникает следующая задача.

Предположим, что первый светофор расположен на пересечении двух перпендикулярных дорог. Пусть λ_i, $i = 1,\, 2,$ — интенсивность пуассоновского потока, прибывающего к первому светофору по i-й дороге. Автомобили, проезжающие в первом направлении перекресток (в то время, как для них горит зеленый свет), продолжают движение ко второму светофору в том же направлении (вдоль главной дороги). С другой стороны, каждый из автомобилей, прибывающих к перекрестку по второй (второстепенной) дороге, с вероятностью β, независимо от других автомобилей, может повернуть на перекрестке на главную дорогу (в то время как для главного направления горит красный свет), а с вероятностью $1 - \beta$ продолжить движение в первоначальном направлении. Предположим, что светофоры работают синхронно, иначе говоря, зеленый (и красный) свет на них загорается одновременно, то есть $\gamma_3 = \gamma_1$ и $\gamma_4 = \gamma_2$. Такая система описывается цепью Маркова $X(t) = (X_1(t),\, X_2(t),\, X_3(t),\, e(t))$. Здесь $X_1(t)$ и $X_2(t)$ имеют тот же смысл, что и ранее, а $X_3(t)$ — это число автомобилей перед первым светофором на второстепенном направлении, кроме того, $e(t) = 1$, если на обоих светофорах горит зеленый свет для главной дороги, в противном случае $e(t) = 0$.

Чтобы сформулировать условия эргодичности, введем вспомогательную одноканальную систему со входящим дважды стохастическим пуассоновским потоком, имеющим интенсивность $\lambda(t,\omega) = \nu I(e(t) = 1) + \beta\nu I(e(t) = 0)$. Остальные предположения сохраняются. В частности, $u_2(t)$ — это число клиентов во вспомогательной системе в момент t, и мы изучаем стационарный режим. Положим теперь $p_j = P(u_2(t) = j,\, e(t) = 1)$ и $q_j = P(u_2(t) = j,\, e(t) = 0)$. Производящая функция $P(z) = \sum_{j=0}^{\infty} p_j z^j$, как нетрудно показать, имеет следующий вид:

$$P(z) = \frac{p_0 v(z) + p_k g(z) + q_k w(z)}{-\nu\mu z^2 + (\gamma_1\mu + \gamma_2\nu + 2\mu\nu)z - \gamma_2\nu - \nu\mu} \tag{37}$$

с $\mu = \beta\nu$ и $v(z) = -\nu(1 - z)(\gamma_2 + \mu(1 - z))$, $g(z) = \nu(\gamma_2 + \mu(1 - z)z^{k+1})$, $w(z) = \gamma_2\mu z^{k+1} q_k$.

Знаменатель в выражении (37) имеет два действительных корня z_1 и z_2. Значит, мы получаем два уравнения для определения коэффициентов p_0, p_k и q_k:

$$v(z_i)p_0 + g(z_i)p_k + w(z_i)q_k = 0, \quad i = 1,\, 2. \tag{38}$$

Третье уравнение получается из условия нормировки

$$P(1) = \frac{\gamma_2(p_k + \beta q_k)}{\gamma_1\beta} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2},$$

откуда немедленно вытекает

$$p_k + \beta q_k = \pi_2\beta. \tag{39}$$

Вспомним, что $\pi_2 = P(e(t) = 0) = \gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$. Решая уравнения (38)–(39), мы получаем

$$q_k =$$

$$= \frac{\beta\pi_2(g(z_1)v(z_2) - g(z_2)v(z_1))}{w(z_2)v(z_1) - w(z_1)v(z_2) + \beta(g(z_1)v(z_2) - g(z_2)v(z_1))}, \tag{40}$$

$$p_k = \beta(\pi_2 - q_k). \tag{41}$$

Теорема 8. Система эргодична, если выполнены следующие неравенства

$$\lambda_1 < \nu(\gamma_2(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1} - p_k),$$

$$\lambda_2 < \nu(\gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1} - \beta q_k), \tag{42}$$

где p_k и q_k задаются с помощью (40) и (41).

Для доказательства эргодичности достаточно установить стохастическую ограниченность $X_1(t)$ и $X_3(t)$. Достаточность первого из условий (42) для стохастической ограниченности $X_1(t)$ доказывается также, как в теореме 7, только

$r_k = 0$. Обратимся к процессу $X_3(t)$. Очевидно, что $X_3(t)$ — это длина очереди в одноканальной системе, функционирующей в случайной среде $U_2(t) = (u_2(t), e(t), j(t))$, где $j(t) = 1$, если автомобиль, приходящий к перекрестку во втором направлении, поворачивает на главную трассу. Вероятность такого события равна β. В противном случае полагаем $j(t) = 0$.

Пусть $V_2(t)$ — это число автомобилей, которые могут пройти до момента t через перекресток в перпендикулярном направлении (быть обслужены) в предположении, что прибор все время занят (имеется очередь автомобилей). Тогда

$$E(V_2(t)|U_2(s),\, 0 \leqslant s \leqslant t) =$$

$$= \nu \int\limits_0^t (I(e(s) = 0,\, j(s) = 0) + I(e(s) = 0,$$

$$j(s) = 1, u_2(s) < k))ds.$$

Нетрудно установить, что процесс $U_2(t)$ имеет собственное предельное распределение при $t \to \infty$ и $P(u_2(t) = k,\, e(t) = 0) \to \tilde{q}_k$. Таким образом, загрузка равна $\rho_2 = \lambda_2 \nu^{-1}(\gamma_1(\gamma_1 + \gamma_2)^{-1} - \beta\tilde{q}_k)^{-1}$.

Это означает, что необходимое и достаточное условие стохастической ограниченности $X_3(t)$ задается вторым неравенством в (42), где вместо q_k поставлено $\tilde{q}_k$. Очевидно, что вероятность $\tilde{q}_k$ зависит от поведения процесса $X_1(t)$. Например, если $X_1(t)$ стохастически неограничен, то число автомобилей $N_1(t)$, проходящих перекресток по главной трассе, является дважды стохастическим пуассоновским процессом с интенсивностью $\lambda_1(t,\omega) = \nu I(e(t) = 1)$. Более того, в любом случае такой дважды стохастический процесс доминирует $N_1(t)$, следовательно, $q_k \geqslant \tilde{q}_k$. А это значит, что второе условие (42) достаточно для стохастической ограниченности $X_3(t)$.

Замечание 3. Для $\beta = 0$ мы получаем предыдущую модель с синхронизацией светофоров. Устремив k к бесконечности в первом соотношении (42), мы приходим к условию эргодичности из теоремы 5.

VI. Выводы и направления будущих исследований

Мы рассмотрели ряд стохастических моделей транспортных потоков, для анализа которых полезными оказались методы теории очередей.

Для случая отдельного перекрестка, когда потоки прибывающих машин пуассоновские, установлены условия эргодичности в предположении, что интервалы между переключениями светофора имеют произвольное распределение (в частности, постоянны). Предложена процедура оптимизации функционирования светофора, что позволяет минимизировать суммарное среднее число ожидающих на перекрестке автомобилей. Численные расчеты показывают, что при малой загрузке показательно распределенные интервалы дают лучший результат, чем постоянные, а при высокой загрузке ситуация обратная. Более того, если коэффициент загрузки близок к 0,5, то характеристики системы мало зависят от типа распределения. Именно поэтому здесь можно использовать явный вид средних $m_i(x)$, полученный для случая показательного распределения. Изучение поведения системы в условиях высокой загрузки показало, что в такой ситуации оптимально иметь постоянные интервалы между переключениями.

Исследована также плотность потока автомобилей, движущихся с двумя разными скоростями по трассе без светофоров и предложен алгоритм ее подсчета с заданной степенью точности. При наличии светофоров плотность рассмотрена в предположении, что все автомобили движутся с одной и той же скоростью.

Модель с двумя последовательными светофорами, учитывающая размеры автомобилей, выглядит достаточно сложной. Однако полученные условия эргодичности позволяют определять интенсивности потоков и/или средние интервалов между переключениями, предотвращающие образование пробок.

Для применения полученных в работе результатов необходимо также решить целый ряд статистических задач. Оценка параметров входящих потоков может проводиться традиционными методами. С другой стороны, для того чтобы оценить среднее число автомобилей, проходящих через перекресток, можно применить нетрадиционный подход, например, воспользоваться теорией клеточных автоматов.

Возникают и другие проблемы для будущих исследований. Так, для оптимизации работы светофоров можно использовать другие критерии. Например, зеленый свет может включаться, если число ожидающих автомобилей превысит определенный порог. Полезно также рассмотреть другие «точки задержки» на трассе, кроме светофоров. Это могут быть пункты оплаты за проезд, дорожно-транспортные происшествия или знаки дорожного движения, требующие уменьшения скорости. Интересно изучить неоднородные потоки автомобилей, влияние обгона и более сложную конфигурацию транспортной сети.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00266.

Литература

1. *Greenshields B.D.* A Study of Highway Capacity // Proc. Highway Res. — 1935. — V. 14. — P. 448–477.

2. *Greenberg H.* An Analysis of Traffic Flows // Oper. Res. — 1959. — V. 7. — P. 79–85.

3. *Иносе Х., Хамада Т.* Управление дорожным транспортом. — М.: Транспорт, 1983.

4. *May A.D.* Traffic Flow Fundamentals. — Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1990.

5. *Maerivoet S. and De Moor B.* Cellular automata models of road traffic // Phys. Rep. — 2005. — V. 419. — P. 1–64.

6. *Blank M.* Ergodic properties of a simple deterministic traffic flow model // J. Stat. Phys. — 2003. — V. 11. — P. 903–930.

7. *Chowdhury D.* Vehicular Traffic: A System of Interacting Particles Driven Far from Equilibrium // arXiv: cond-mat /9910173 v1 [cond-mat. stat-mech] 12 Oct. 1999.

8. *Fuks H. and Boccara N.* Convergence to equilibrium in a class of interacting particle system evolving in discrete time // Phys. Rev. E. — 2001. — V. 64, 016117.

9. *Helbing D.* Traffic and related self-driven many-particle systems // Rev. Modern Phys. — 2001. — V. 73. — P. 1067–1141.

10. *Schadschneider A.* Statistical Physics of Traffic Flow. — arXiv: cond-mat /0007418 v1 [cond-mat. stat-mech] 26 Jul 2000.

11. *Cáceres F.C., Ferrari P.A. and Pechersky E.* A slow to start traffic model related to a M / M /1 queue. — arXiv: cond-mat /0703709 v2 [cond-mat. stat-mech] 31 May 2007.

12. *Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.* Некоторые задачи для потоков взаимодействующих частиц // Сборник, посвященный 70-летию ректора МГУ В.А. Садовничего. «Современные проблемы математики и механики». — 2009. — Т. 2. — С. 55–68.

13. *Bulinskaya E., Afanas'eva L.* Estimation of interacting particles density // Proceedings of IWAP. Compiègne. — 2008. — P. 1–6.

14. *Григелионис Б.И.* О сходимости сумм ступенчатых случайных процессов к пуассоновскому // Теория вероятностей и ее применения. — 1963. — Т. 8, в. 2. — С. 189–194.

15. *Tanner J.C.* The Delay to Pedestrains Crossing a Road // Biometrica. — 1951. — V. 38. — P. 383–392.

16. *Franken P., König D., Arndt M., Schmidt V.* Queues and Point Processes. — Berlin: Akademie–Verlag, 1981.

17. *Боровков А.А.* Эргодичность и устойчивость случайных процессов. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.

18. *Kelly F.P. and Williams J. R* . Stochastic Networks // IMA Volumes in Mathematics and Applications. — V. 71. — New York: Springer, 1995.

19. *Боровков А.А.* Предельные теоремы для сетей обслуживания, I // Теория вероятностей и ее применения. — 1986. — Т. 31, В. 3. — С. 472–490.

20. *Боровков А.А.* Предельные теоремы для сетей обслуживания, II // Теория вероятностей и ее применения. — 1987. — Т. 32, В. 2. — С. 280–290.

21. *Foss S.G., Kalashnikov V.V.* Regeneration and renovation in queues // Queueing Systems. — 1991. — V. 8. — P. 211–223.

22. *Афанасьева Л.Г., Булинская Е.В.* Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами. — М.: Изд-во МГУ, 1980.

23. *Grandell J.* Doubly Stochastic Poisson Processes. // Lecture Notes in Mathematics. — V. 529. — New York: Springer, 1976.

24. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — Т. 2. — М.: Мир, 1967.

25. *Боровков А.А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. — М.: Наука, 1972.

26. *Афанасьева Л.Г.* Системы массового обслуживания с циклическими управляющими процессами // Кибернетика и системный анализ. — 2005. — № 1. — С. 54–68.

Поступила в редакцию 15.10.2010.