УДК 514.174+519.174.7+519.175.4+519.176+519.179.1

А. М. Райгородский

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Избранные задачи комбинаторной геометрии и теории графов

Рассматривается несколько современных направлений в комбинаторной геометрии и теории графов. Приводятся основные проблемы и обсуждаются наиболее перспективные области исследований.

Ключевые слова: граф, случайный граф, дистанционный граф, веб-граф, хроматическое число, теория Рамсея, гиперграф.

1. Введение

Комбинаторная геометрия — это очень современная и бурно развивающаяся наука, находящаяся на стыке геометрии и дискретного анализа. Основные задачи комбинаторной геометрии состоят в изучении комбинаторных свойств различных совокупностей геометрических объектов. В самостоятельную дисциплину, богатую красивыми и трудными проблемами, а также разнообразными приложениями комбинаторная геометрия оформилась лишь к середине XX века. И значительную роль в этом сыграли такие основополагающие задачи, как проблема Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра и проблема Нелсона—Хадвигера о раскрасках метрических пространств. Именно этих двух проблем мы коснёмся во втором и третьем разделах настоящего обзора.

Впоследствии пришло понимание глубокой связи между задачами комбинаторной геометрии и теоретико-графовой проблематикой. Оказалось, что многие геометрические вопросы легко выражаются на языке теории графов и на языке теории кодирования. Таким образом, возникла возможность использования соответствующих методов для решения комбинаторно-геометрических задач. В частности, активно стала развиваться техника случайных графов в применении к геометрии. Некоторые из подобных подходов мы опишем в четвёртом разделе статьи.

В данном обзоре мы вовсе не претендуем на полноту изложения теории, а скорее, хотим познакомить читателя с рядом тесно связанных между собою задач, которыми активно занимаются ведущие специалисты в мире и которые особенно интересны сотрудникам нашей кафедры. В частности, мы поговорим о случайных графах и законах нуля или единицы (раздел 3), о случайных веб-графах (раздел 5), о проблемах теории Рамсея (разделы 6 и 7) и о раскраске гиперграфов (раздел 8).

2. Проблема Борсука

Эта классическая проблема комбинаторной геометрии возникла в 1933 году благодаря К. Борсуку (см. [1]). Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество диаметра 1 (*диаметр* — это супремум попарных расстояний между точками множества; обозначается $\operatorname{diam}\,\Omega$). Обозначим через $f(\Omega)$ минимальное число частей меньшего диаметра, на которые можно разбить Ω. Нетрудно видеть, что $f(\Omega)$ всегда конечно. Например, можно покрыть Ω кубом со стороной 1 и затем разбить куб на кубики диаметра < 1 (таких кубиков будет заведомо не больше n^n). В итоге корректно определена величина $f(n) = \max f(\Omega)$, где максимум берётся по всем множествам диаметра 1. Иными словами, $f(n)$ — это минимальное количество частей меньшего диаметра, на которые разбивается произвольное множество диаметра 1 в n-мерном евклидовом пространстве.

В 1933 году Борсук высказал гипотезу о том, что $f(n) = n + 1$. Мотивировками для гипотезы послужили следующие факты. Во-первых, очевидно, что $f(n) \geqslant n + 1$ (достаточно взять множество Ω вершин правильного n-мерного симплекса со стороной 1 и убедиться в том, что $f(\Omega) = n + 1$). Более того, сам Борсук доказал, что $f(B^n) = n + 1$, где B^n — шар в $\mathbb{R}^n$. Во-вторых, столь же очевидно, что $f(1) = 2$, и не очень сложно понять, что $f(2) = 3$ (достаточно показать, что любое множество диаметра 1 на плоскости можно движением перевести внутрь правильного шестиугольника с расстоянием 1 между параллельными сторонами, и затем разбить шестиугольник на три части диаметра $\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}866\ldots < 1$).

Интрига состояла в том, что большинство специалистов верило в справедливость гипотезы. И это немудрено: ещё в 1945 году Г. Хадвигер показал, что если у Ω граница C^1 гладкая, то $f(\Omega) \leqslant n + 1$ (см. [2]). Казалось бы, сгладим границу произвольного множества, и всё получится. Но не тут-то было. Целых 60 лет прошло в попытках доказательства гипотезы, и в 1993 году она была *опровергнута.*

Авторы первого контрпримера к гипотезе Борсука — Дж. Кан и Г. Калаи — сообразили, по сути, что можно использовать технику теории графов для опровержения гипотезы (см. [3]). Скажем несколько слов об основной идее результата.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — *конечное* множество точек в пространстве. Назовём *графом диаметров* этого множества граф $G_\Omega = (\Omega, E)$, где рёбра из множества E возникают тогда и только тогда, когда расстояние между соответствующими вершинами равно диаметру Ω. Напомним, что *хроматическим числом* графа G называется минимальное число $\chi(G)$ цветов, в которые можно так покрасить все вершины графа, чтобы вершины, соединённые ребром, имели разные цвета. Заметим, что $f(\Omega) = \chi(G_\Omega)$, и здесь важно, что Ω конечно. Хорошо известно, что $\chi(G) \geqslant \frac{|V|}{\alpha(G)}$, где V — множество вершин графа G, а $\alpha(G)$ — *число независимости* графа, т. е. размер самого большого подмножества множества его вершин, элементы которого попарно не соединены рёбрами (такое подмножество само называется *независимым*). В итоге задача получения нижней оценки для величины $f(n)$ может быть сведена к отысканию конечного графа диаметров с большим отношением числа вершин к числу независимости. Именно такой граф и нашли Кан и Калаи, использовав конструкцию, которую ещё в 1981 году предложили П. Франкл и Р. М. Уилсон (см. [4]).

У Кана и Калаи получилась оценка $f(n) \geqslant (1{,}203\ldots + o(1))^{\sqrt{n}}$, а минимальная размерность контрпримера оказалась равной 2015. Сейчас известно, что

$$(1{,}2255\ldots + o(1))^{\sqrt{n}} \leqslant f(n) \leqslant (1{,}224\ldots + o(1))^n.$$

Нижняя оценка принадлежит А. М. Райгородскому [5], а верхняя — О. Шрамму [6] и Ж. Бургену и Й. Линденштрауссу [7]. Также известно, что гипотеза верна при $n \leqslant 3$ и неверна, начиная с размерности 298.

Сейчас основными вопросами являются следующие два.

1) Как устранить зазор между верхней экспоненциальной и нижней субэкспоненциальной оценками величины $f(n)$?

2) Какова минимальная размерность контрпримера к гипотезе?

Мы рискнём предположить, что ответ на второй вопрос — это 5. Относительно первого вопроса трудно даже высказывать гипотезы.

Также изучают различные структурные свойства графов диаметров (максимальное число рёбер, клик и др.). Подробнее о проблеме Борсука и об устройстве графа диаметров можно почитать в источниках [8–15].

3. Проблема Нелсона–Хадвигера

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, а $\mathcal{A}$ — множество положительных вещественных чисел. Назовём *хроматическим числом пространства* (X, ρ) *с множеством запрещённых расстояний* $\mathcal{A}$ величину $\chi((X, \rho); \mathcal{A})$, равную минимальному количеству цветов, в которые можно так покрасить все точки множества X, чтобы расстояние между одноцветными точками не принадлежало множеству $\mathcal{A}$: мы *запрещаем* точкам одного цвета отстоять друг от друга на расстояние из $\mathcal{A}$.

Изначально (на рубеже 40–50-х годов XX века) проблема отыскания хроматического числа ставилась только для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ и одного запрещённого расстояния. Поскольку пространство $\mathbb{R}^n$ однородно, это расстояние можно было выбирать произвольно — например, равным единице. В результате обозначение для хроматического числа было более простым — $\chi(\mathbb{R}^n)$.

Разумеется, $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$. Однако — и это главная интрига текущего раздела — никто не знает, чему равно $\chi(\mathbb{R}^2)$. Хорошо известно (и доказательство по силам продвинутому школьнику), что

$$4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7.$$

И это всё! Существуют различные специальные результаты. Так, если потребовать, чтобы все цвета в раскраске были измеримыми по Лебегу, то возникнет так называемое *измеримое* хроматическое число χ_m и $\chi_m(\mathbb{R}^2) \geqslant 5$. А если считать, что каждый цвет — это объединение непересекающихся многоугольников, то и пятью цветами не обойтись.

Величину $\chi(\mathbb{R}^n)$ оценивали в разных размерностях. Сейчас, среди прочего, известны следующие результаты:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant$	2	4	6	7	9	11	15	16	21	23	25	27

$$\chi(\mathbb{R}^3) \leqslant 15, \quad \chi(\mathbb{R}^4) \leqslant 54, \quad (1{,}239\ldots + o(1))^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^n) \leqslant (3 + o(1))^n.$$

Точные ссылки на все эти и многие другие результаты можно найти в статьях [8, 13, 15]. О хроматических числах других метрических пространств можно почитать как в уже указанных источниках, так и в книгах [16–18].

Проблема Нельсона—Хадвигера имеет такой же выход на теорию графов, как и проблема Борсука. Только на сей раз речь идёт о *графах расстояний*. Пусть $G = (V, E)$ — граф, у которого $V \subseteq \mathbb{R}^n$, а

$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1\}.$$

Такой граф называется *графом единичных расстояний*. Понятно, что $\chi(\mathbb{R}^n)$ — это хроматическое число графа единичных расстояний, у которого множество вершин совпадает с $\mathbb{R}^n$. Любопытно то, что по некоторым соображениям компактности значение $\chi(\mathbb{R}^n)$ достигается на конечном графе расстояний. Любопытно также и то, что первая экспоненциальная нижняя оценка величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ была получена в той же самой работе [4], которую Кан и Калаи использовали впоследствии для опровержения гипотезы Борсука. Иными словами, проблема Борсука и проблема Нелсона—Хадвигера не только внешне, но и методологически весьма тесно связаны.

Возвращаясь к случаю плоскости, можно сформулировать ещё один примечательный и сравнительно недавний результат, принадлежащий П. О'Доннеллу (см. [19, 20]): для любого k существует граф расстояний на плоскости, имеющий обхват k и хроматическое число 4 (*обхватом* графа называется длина кратчайшего цикла в нём). Пафос результата в том, что, оказывается, ни наличие треугольников, ни присутствие циклов какой-либо малой длины не являются необходимыми условиями для того, чтобы граф расстояний на плоскости имел максимальное известное хроматическое число. Это довольно неожиданно, особенно в свете гипотезы Эрдеша (в которую мы тоже верим), состоящей в том, что $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$. Отметим также, что если гипотеза верна, то ввиду неравенства $\chi_m(\mathbb{R}^2) \geqslant 5$ соответствующая четырёхцветная раскраска должна включать в себя неизмеримые по Лебегу цвета.

4. Классические случайные графы

В теории графов очень важно бывает оценивать «вероятности» тех или иных свойств графа. Это нужно и с точки зрения практики (например, речь может идти о надёжности сети или о качестве вероятностного алгоритма на графе), и для нужд чистой теории (зачастую доказательство существования графа с необходимыми нам свойствами — это доказательство того, что случайный граф этими свойствами обладает с положительной вероятностью). Соответственно на рубеже 50–60-х годов XX века П. Эрдеш и А. Реньи предложили модель случайного графа, которую теперь принято называть *классической.*

Итак, пусть $n \in \mathbb{N}$, $V_n = \{1, \ldots, n\}$ — множество вершин будущего графа, а рёбра мы выбираем случайно из множества рёбер полного графа K_n на вершинах из V_n: фиксируем $p \in [0, 1]$ и выбираем каждое ребро независимо от всех остальных рёбер с вероятностью p. В итоге конкретный граф $G = (V_n, E)$ возникает с вероятностью $P_{n,p}(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2 - |E|}$. Такая вот простая схема Бернулли.

К настоящему времени развита колоссальная наука о классических случайных графах. И литература по ней имеется обширная (см., например, [21–24]). Приложения случайных графов есть и в физике, и в биологии, и в Интернете (об этом подробнее позже), и в очень многих других областях знаний. Ниже мы приведём несколько важных и интересных нам сюжетов.

Начнём со связности (надёжности сети). Скажем, что случайный граф обладает некоторым свойством *почти всегда*, если вероятность этого свойства (т. е. множества графов, которые этим свойством обладают) стремится к единице при $n \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $p = \frac{c \ln n}{n}$. *Если* $c > 1$, *то почти всегда случайный граф связен. Если* $c < 1$, *то почти всегда случайный граф не является связным.*

Оказывается, что если число вершин случайного графа растёт, то вероятности ребра можно разрешить стремиться к нулю и всё равно почти всегда случайный граф будет связным. В утверждении теоремы 1 содержится *фазовый переход*: резкий скачок от почти всегда связности к почти всегда несвязности при преодолении вероятностью ребра рубежа $\frac{\ln n}{n}$. «Внутри» фазового перехода (т. е. при $p \sim \frac{\ln n}{n}$) вероятность связности может стремиться к пределу из интервала $(0, 1)$. В частности, если $p = \frac{\ln n + c + o(1)}{n}$, то

$$P_{n,p}(G \text{ связен}) \to e^{-e^{-c}}.$$

Теорему 1 доказали сами авторы модели (см. [25–27]). Также они доказали следующий красивый факт.

Теорема 2. *Пусть* $p = \frac{c}{n}$. *Если* $c < 1$, *то найдётся такая константа* $\beta = \beta(c)$, *что почти всегда размер каждой связной компоненты случайного графа не превосходит* $\beta \ln n$. *Если же* $c > 1$, *то найдётся такая константа* $\gamma = \gamma(c)$, *что почти всегда в случайном графе есть ровно одна компонента размера* $\geqslant \gamma n$.

Это теорема о возникновении «гигантской» компоненты в случайном графе. При преодолении вероятностью ребра рубежа $\frac{1}{n}$ мы от «феодальной раздробленности» (все компоненты имеют логарифмический размер) переходим к «империи» (гигантской компоненте, у которой порядка n вершин). Более подробные комментарии к теоремам 1 и 2 можно найти в статье [28].

Перейдём к хроматическому числу графа, которое, по понятным причинам, мы не можем обойти стороной. Здесь хочется выделить следующие две замечательные теоремы, которые в 80-е годы прошлого века доказал Б. Боллобаш (см. [21, 23, 24, 29]).

Теорема 3. *Пусть* $p = \frac{1}{2}$. *Тогда существует такая функция* $f = o\left(\frac{n}{\ln n}\right)$, *что*

$$P_{n,p}\left(\left|\chi(G) - \frac{n}{2\log_2 n}\right| > f(n)\right) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Теорема 4. *Пусть* $p = n^{-\alpha}$, $\alpha > \frac{5}{6}$. *Тогда существует такая функция* $u = u(n, \alpha)$, *что* $P_{n,p}\,(u \leqslant \chi(G) \leqslant u + 3) \to 1$ *при* $n \to \infty$.

Теорема 3 — это утверждение о том, что при $p = 1/2$ почти всегда хроматическое число асимптотически мало уклоняется от величины $\frac{n}{2\log_2 n}$. Теорема 4 ещё более удивительна: она говорит, что если вероятность ребра совсем маленькая, то почти всегда хроматическое число случайного графа — это одно из четырёх возможных чисел! Очень аккуратные доказательства обеих теорем приведены в книге [24], а многочисленные смежные результаты следует искать в [23].

В завершение раздела расскажем о так называемых законах нуля или единицы для случайных графов. Напомним, что *язык первого порядка* для графа состоит из символов $x, y, x_1, \ldots$, обозначающих вершины графа, отношений $=$ и $\sim$, где запись $x \sim y$ означает, что вершины x, y соединены ребром, конъюнкции $\cap$ и дизъюнкции $\cup$, а также кванторов, импликации и отрицания. Все фразы в языке конечны. Язык используют для записи свойств графов. Например, свойство «граф содержит треугольник» — это выражение

$$\exists\, x\, \exists\, y\, \exists\, z \quad (x \sim y) \cap (x \sim z) \cap (y \sim z).$$

Заметим, что свойство «граф связен» или свойство «хроматическое число графа больше $n/2$» на языке первого порядка выразить нельзя. Тем не менее класс свойств, которые подлежат записи на языке первого порядка, достаточно богат.

В 1969 году Ю. В. Глебский, Д. И. Коган, М. И. Лиогонький и В. А. Таланов доказали следующую теорему, которую в 1976 году переоткрыл Р. Фагин.

Теорема 5. *Если $p = p(n)$ — такая функция, что $pn^{\alpha} \to \infty$ и $(1-p)n^{\alpha} \to \infty$ для любого $\alpha > 0$, а A — произвольное свойство графа, которое можно выразить на языке первого порядка, то либо почти всегда свойство A выполнено, либо почти всегда оно не имеет места. Иными словами, либо $P_{n,p}(A) \to 1$, либо $P_{n,p}(A) \to 0$.*

Это и есть *закон нуля или единицы*. Фактически закону подчиняется вероятность ребра, ведь именно от неё, как видно из формулировки, зависит, будет иметь место жёсткая альтернатива «предел 0 vs. предел 1» или нет.

При других p (отличных от тех, что в теореме) всё ещё интереснее.

Теорема 6. *Если $p = n^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$ — иррациональное число, а A — произвольное свойство графа, которое можно выразить на языке первого порядка, то либо почти всегда свойство A выполнено, либо почти всегда оно не имеет места. Иными словами, либо $P_{n,p}(A) \to 1$, либо $P_{n,p}(A) \to 0$.*

Теорему 6 получили С. Шеллах и Дж. Спенсер в 1988 году. Замечательно то, что при $\alpha \in \mathbb{Q}$ закона нуля или единицы нет.

Доказательства теорем 5 и 6 на уровне идей проведены в книгах [24] и [29].

Велась большая деятельность по уточнению результатов теорем 5 и 6. Например, изучались формулы, записанные на языке первого порядка и имеющие ограниченную заданным наперёд числом k кванторную глубину. Так, недавно сотрудник нашей кафедры М. Е. Жуковский показал, что если $p = n^{-\alpha}$ и α — любое число, строго меньшее, чем $\frac{1}{k-2}$, то для формул с кванторной глубиной, не превосходящей k, имеет место закон нуля или единицы; если же $\alpha = \frac{1}{k-2}$, то закон не выполнен.

5. Случайные графы расстояний

Как мы уже говорили в предыдущем разделе, случайность зачастую нужна для доказательства существования некоторых объектов. Приведём пример важной задачи такого типа, которая лежит на стыке комбинаторной геометрии и теории графов. Мы знаем, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant (1{,}239\ldots + o(1))^n$. Иными словами, существует последовательность $\{G_n\}$ графов расстояний, у которых $\chi(G_n) \geqslant (1{,}239\ldots + o(1))^n$. А существует ли последовательность графов расстояний, хроматические числа которых тоже экспоненциально растут и у которых тем не менее отсутствуют клики (полные подграфы) с данным числом вершин k? Вопрос абсолютно нетривиальный, ведь, казалось бы, хроматическое число тем больше, чем бóльшие клики есть в графе. Действовать можно по следующей схеме. Возьмём какую-нибудь последовательность графов расстояний с экспоненциально растущими хроматическими числами. Например, для большей простоты вычислений рассмотрим графы Франкла–Уилсона, упоминавшиеся во втором и третьем разделах. У них $n = 4m$,

$$V_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) : \ x_i \in \{0,1\}, \ x_1 + \ldots + x_n = 2m\}, \quad E_n = \left\{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \sqrt{m}\right\}.$$

Хроматические числа у этих графов оцениваются снизу величиной $(1{,}139\ldots + o(1))^n$. Константа в основании экспоненты на одну десятую меньше наилучшей известной, но для нас это сейчас не так важно.

Станем удалять рёбра в графе $G_n = (V_n, E_n)$ независимо друг от друга с одной и той же вероятностью $q \in [0,1]$. Получится случайный граф. Если у этого графа с положительной вероятностью хроматическое число экспоненциально и одновременно нет клик размера больше k, то мы нашли то, что искали. При этом в выборе величины q мы вольны.

В последние годы изучению таких случайных графов, называемых *случайными графами расстояний*, уделялось много внимания (см. [13, 24]). Во-первых, с их помощью действительно была полностью решена описанная выше задача. Во-вторых, исследовались вопросы связности этих графов, изучались задачи о концентрации их хроматических чисел, и даже законам нуля или единицы уделялось внимание. Как выяснилось, для случайных графов расстояний обычные законы нуля или единицы не выполняются. Однако эти законы можно ослабить (вводя ограничения на число кванторов и вид кванторов в формулах), и тогда снова возникают нетривиальные закономерности.

Бывают и совсем другого рода случайные графы расстояний. Наиболее типичные из них устроены так. Берётся компакт в $\mathbb{R}^n$ и из него в соответствии с заданным совместным распределением (как правило, независимо и равномерно) извлекаются n точек. Пары этих точек соединяются рёбрами, если расстояния между их элементами не превосходят заданной величины. Разумеется, эти случайные графы совсем не похожи на случайные подграфы описанного выше графа G_n.

6. Случайные веб-графы

Одним из самых современных направлений в теории случайных графов является наука о построении адекватных моделей веба. Под «реальным» вебом мы понимаем здесь граф, вершинами которого служат сайты в Интернете, а рёбра образованы гиперссылками. Ещё на рубеже XX и XXI веков появились статистические исследования, призванные определить наиболее существенные свойства реального веб-графа. Одно из наиболее важных исследований такого типа, осуществлённое в 1999 году А. Барабаши и Р. Альберт, показало, что имеют место следующие закономерности [30–32]:

1) веб-граф разрежен, т. е. у него на n вершинах примерно kn рёбер, где k — константа;

2) диаметр веб-графа (т. е. максимальное из кратчайших расстояний между парами его вершин) — это величина порядка 5–6;

3) распределение степеней вершин веб-графа $G = (V, E)$ при правильном обрезании «хвостов» подчиняется (асимптотически) степенному закону с показателем 2,1, т. е. если n — число вершин веб-графа и $d \in \mathbb{N}$, то

$$\frac{|\{v \in V : \ \deg v = d\}|}{n} \sim \frac{c}{d^\lambda},$$

где $\lambda \approx 2{,}1$, а c — константа, вычисляемая из соображений «сумма вероятностей равна единице».

В статье [28] мы подробно описали различные модели, которые так или иначе отражают перечисленные свойства. Кроме того, много подобной информации можно найти в [21] и [33]. Ниже мы скажем несколько слов лишь об одной модели, которая замечательна тем, что одновременно сравнительно проста (и потому про неё можно доказывать нетривиальные теоремы) и достаточно адекватна реальности. Это модель Боллобаша—Риордана (см. [34–36]).

Сперва построим последовательность (случайных) графов $\{G_1^n\}$, в которой у графа с номером n число вершин и рёбер равно n. Затем сделаем из неё последовательность $\{G_k^n\}$, в которой у графа с номером n число вершин равно n, а число рёбер равно kn, $k \in \mathbb{N}$.

Итак, пусть $G_1^1 = (\{1\}, \{(1,1)\})$, т. е. в начальный момент времени есть одна вершина и одна петля. Пусть теперь граф G_1^{n-1} уже построен. У него вершины образуют множество $\{1, \ldots, n-1\}$, а количество рёбер у него тоже $n-1$. Добавим вершину n и ребро (n, i), у которого $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ребро (n, n) будет появляться с вероятностью $\frac{1}{2n-1}$; ребро (n, i) возникнет с вероятностью $\frac{\deg\, i}{2n-1}$, где $\deg\, i$ – степень вершины i в графе G_1^{n-1}. Очевидно, что распределение вероятностей задано корректно, поскольку

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\deg\, i}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1} + \frac{1}{2n-1} = 1.$$

Случайный граф G_1^n построен.

Осталось перейти к G_k^n. Берём G_1^{kn}. Это граф с kn вершинами и kn рёбрами. Делим множество его вершин на последовательные куски размера k:

$$\{1, \ldots, k\}, \quad \{k+1, \ldots, 2k\}, \quad \ldots, \quad \{k(n-1)+1, \ldots, kn\}.$$

Объявляем каждый кусок «вершиной», а рёбра сохраняем, т. е. если внутри куска были рёбра, то будут кратные петли, а если рёбра были между двумя различными кусками — будут кратные рёбра. Вершин стало n, а рёбер — по-прежнему kn. Первое наблюдение Барабаши—Альберт полностью учтено в модели.

Замечательно то, что второе и третье наблюдения получаются уже в качестве теорем.

Теорема 7. *Для любого $k \geqslant 2$ и любого $\varepsilon > 0$*

$$P\left((1-\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln\ln n} \leqslant \operatorname{diam} G_k^n \leqslant (1+\varepsilon)\frac{\ln n}{\ln\ln n}\right) \to 1, \quad n \to \infty.$$

При $n \approx 2 \cdot 10^7$ имеем в аккурат $5{,}96 \in [5, 6]$, а как раз таким был размер Интернета в 1999 году.

Теорема 8. *Для любого $k \geqslant 1$ и любого $d \leqslant n^{1/15}$*

$$M\left(\frac{\left|\left\{i = 1, \ldots, n :\, \deg_{G_k^n} i = d\right\}\right|}{n}\right) \sim \frac{2k(k+1)}{(d+k+1)(d+k+2)(d+k+3)}. \tag{1}$$

Поскольку k — константа, выражение в правой части (1) имеет вид const/d^3. Это в точности степенной закон.

У теоремы 8 есть всё же два неприятных момента. Первый состоит в том, что степень d в степенном законе, который в ней устанавливается, равна не 2,1, а 3. Второй — это ограничение $d \leqslant n^{1/15}$, которое ставит крест на практической применимости теоремы. Даже при $n \approx 10^{12}$, чего в природе (пока) не бывает, мы имеем лишь $d \leqslant 10^{4/5}$, и это нелепо.

Последний недостаток недавно устранил Е. А. Гречников — исследователь-разработчик в Яндексе, который получил более точный результат практически без ограничений на d [37].

Первым же недостатком занимались много и, в частности, предлагали различные альтернативные модели [28].

Также изучалось распределение вторых степеней вершин случайного веб-графа в модели Боллобаша–Риордана при $k = 1$:

$$d_2(t) = |\{(i,j) :\; i \neq t,\; j \neq t,\; (i,t) \in G_1^n,\; (i,j) \in G_1^n\}|.$$

Теорема 9. *Для любого* $d > 1$ *выполнено*

$$M\left(\frac{|\{t \in G_1^n: \ d_2(t) = d\}|}{n}\right) = \frac{4}{d^2}\left(1 + O\left(\frac{\ln^2 d}{d}\right) + O\left(\frac{d^2}{n}\right)\right).$$

Иными словами, при полном отсутствии каких-либо ограничений мы имеем степенной закон и для вторых степеней. Теорема 9 недавно доказана Л. А. Остроумовой при участии Гречникова (см. [38]).

7. Некоторые вопросы теории Рамсея

Пусть даны натуральные числа s и t. Классическое *число Рамсея* $R(s,t)$ — это минимальное натуральное n, такое, что при любой раскраске рёбер полного графа K_n в красный и синий цвета либо найдётся подграф $K_s \subseteq K_n$, у которого все рёбра красные, либо найдётся подграф $K_t \subseteq K_n$, у которого все рёбра синие. Вопрос об отыскании величины $R(s,t)$ — один из наиболее глубоких вопросов современной экстремальной комбинаторики. Очевидно, что $R(s,t) = R(t,s)$, $R(1,t) = 1$, $R(2,t) = t$, и известно несколько значений величины $R(s,t)$ при маленьких s и t. Например, равенство $R(3,3) = 6$ — это школьное утверждение о том, что среди любых шести человек либо есть трое попарно знакомых, либо есть трое попарно незнакомых. Другие подобные равенства можно найти в [39].

В асимптотике по s и t получена масса результатов относительно величины $R(s,t)$. Упомянем лишь некоторые из них, отсылая заинтересованного читателя к книгам [21, 29, 40, 41]:

$$\frac{\sqrt{2}}{e}(1 + o(1))s2^{\frac{s}{2}} \leqslant R(s,s) \leqslant e^{-\gamma\frac{\ln^2 s}{\ln\ln s}} \cdot 4^s, \quad \gamma > 0,$$

$$\left(\frac{1}{162} + o(1)\right)\frac{t^2}{\ln t} \leqslant R(3,t) \leqslant (1 + o(1))\frac{t^2}{\ln t}.$$

Верхние оценки — это так или иначе рекурсия, уточняющая известное неравенство Эрдеша—Секереша (см. [42]):

$$R(s,t) \leqslant R(s-1,t) + R(s,t-1),$$

а нижние оценки — это исключительно вероятностный метод. Что значит сделать нижнюю оценку для $R(s,s)$? Это значит, для как можно большего n найти такую раскраску рёбер графа K_n в красный и синий цвета, что в этой раскраске K_n не имеет ни одного одноцветного подграфа K_s. Можно сказать по-другому: для как можно большего n найти такой граф на n вершинах, что в нём нет ни клик (полных подграфов), ни независимых множеств (пустых подграфов) на s вершинах. Так вот, отыскание такого графа — это типичная задача теории случайных графов (см. раздел 4). Примечательно то, что явные конструкции подобных графов дают гораздо худшие оценки чисел Рамсея. Например, всё та же работа [4], которую мы уже неоднократно цитировали в разных контекстах (см. разделы 2, 3, 5), содержит оценку

$$R(s,s) \geqslant \left(e^{\frac{1}{4}} + o(1)\right)^{\frac{\ln^2 s}{\ln\ln s}},$$

и это практически лучшее, что известно сейчас. Вообще явные оценки очень важны для теории алгоритмов, и ими занимается огромное количество специалистов в мире.

Столь же (если не более) важны для теории алгоритмов «двудольные» числа Рамсея. Здесь $b(s,t)$ — это минимальное натуральное n, такое, что при любой раскраске рёбер полного двудольного графа $K_{n,n}$ в красный и синий цвета либо найдётся подграф $K_{s,s} \subseteq K_{n,n}$, у которого все рёбра красные, либо найдётся подграф $K_{t,t} \subseteq K_{n,n}$, у которого все рёбра синие. Наилучшие оценки при $s = t$ приведены ниже:

$$\frac{2}{e}(1 + o(1))s2^{\frac{s}{2}} \leqslant b(s,s) \leqslant (1 + o(1))2^{s+1}\log_2 s.$$

Как видно, зазор между оценками для $b(s,s)$ значительно меньше, чем для $R(s,s)$. Нижняя оценка — это по-прежнему вероятностный метод, верхняя оценка принадлежит Д. Конлону [43].

Рассматриваются многочисленные обобщения классических чисел Рамсея. Например, изучаются числа Рамсея в случае нескольких цветов, а также в случае, когда графы заменяются гиперграфами. Есть и другие нетривиальные обобщения (см. [41]). Однако в контексте этой статьи хочется сказать о так называемых дистанционных числах Рамсея. Чтобы определение, которое мы скоро выпишем, было понятнее, введём ряд дополнительных обозначений.

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф. Если $H = (W, F)$ является подграфом в G, то будем писать $H \subseteq G$. Если, сверх того, H — остовный подграф в G (т. е. $W = V$), то, желая подчеркнуть этот факт, напишем $H \preceq G$. Скажем, что H — *индуцированный* или *порождённый* подграф в G, коль скоро $F = E|_W$, т. е. пара вершин x, y из W образует ребро $\{x, y\}$, принадлежащее F, тогда и только тогда, когда $\{x, y\} \in E$.

Если $G = (V, F) \preceq K_n$ (т. е., попросту говоря, G — произвольный граф на n вершинах), то его *дополнением* (до полного графа) назовём граф $[G] = (V, F') \preceq K_n$, у которого $\{x, y\} \in F'$ тогда и только тогда, когда $\{x, y\} \notin F$.

В новых терминах можно дать такое эквивалентное определение числа Рамсея: $R(s,t)$ — это минимальное $n \in \mathbb{N}$, такое, что для любого $G \preceq K_n$ либо G содержит некоторый порождённый подграф K_n на s вершинах, либо $[G]$ содержит некоторый порождённый подграф K_n на t вершинах.

Рассмотрим графы G_n из раздела 5. Как мы уже поняли, они играют заглавную роль и в проблеме Борсука, и в задаче Нелсона—Хадвигера, и даже в вопросе получения явных оценок для классических чисел Рамсея. Эти графы назовём *полными графами расстояний.*

Пусть $G \preceq G_n$. Тогда его *дополнением* (до полного графа расстояний) назовём граф $[G]_{\text{dist}} \preceq G_n$, у которого любые две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда они не соединены ребром в G, но соединены ребром в G_n. Например, для $G = (V_n, \emptyset)$ имеем $[G]_{\text{dist}} = G_n$.

Для данных $s, t \in \mathbb{N}$ положим $R_{\text{dist}}(s,t)$ равным минимальному $n \in \mathbb{N}$, такому, что корректно определён граф G_n и для любого $G \preceq G_n$ либо G содержит некоторый порождённый подграф G_n на s вершинах, либо $[G]_{\text{dist}}$ содержит некоторый порождённый подграф G_n на t вершинах.

Иначе говоря, величина $R_{\text{dist}}(s,t)$ полностью аналогична величине $R(s,t)$, коль скоро мы K_n и дополнение в нём заменяем на G_n и дополнение в нём.

Величины $R_{\text{dist}}(s,t)$ и их асимптотическое поведение в деталях изучены в книге [24]. Отметим, что порядок их роста — это вовсе не экспонента, но лишь полином от s.

8. Проблемы Эрдеша—Секереша

С задачами предыдущего раздела тесно связаны различные проблемы комбинаторной геометрии, которые восходят к работе П. Эрдеша и Д. Секереша [42], уже цитированной нами. Первая из них была предложена авторами указанной статьи в 1935 году.

Первая проблема Эрдеша—Секереша. *Для любого целого $n \geqslant 3$ найти минимальное положительное число $g(n)$, такое, что из любого множества точек на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $g(n)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n, элементы которого являются вершинами выпуклого n-угольника.*

Под «общим положением» здесь понимается отсутствие троек точек на одной прямой.

Для первой проблемы Эрдеша—Секереша известно, что (см. [44, 45])

$$g(3) = 3, \quad g(4) = 5, \quad g(5) = 9, \quad g(6) = 17, \quad 2^{n-2} + 1 \leqslant g(n) \leqslant C_{2n-5}^{n-3} + 1,$$

и гипотеза состоит в том, что $g(n) = 2^{n-2} + 1$.

Первая проблема Эрдеша—Секереша неоднократно обобщалась. Известны, в частности, следующие постановки.

Вторая проблема Эрдеша—Секереша. *Для любого целого $n \geqslant 3$ найти минимальное положительное число $h(n)$, такое, что из любого множества точек $\mathcal{X}$ на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $h(n)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n, элементы которого являются вершинами выпуклого и пустого n-угольника, то есть этот n-угольник не содержит внутри себя других точек из $\mathcal{X}$.*

Третья проблема типа Эрдеша—Секереша. *Для любых целых $n \geqslant 3$ и $k \geqslant 0$ найти минимальное положительное число $h(n, k)$, такое, что из любого множества точек $\mathcal{X}$ на плоскости, находящегося в общем положении и содержащего по крайней мере $h(n, k)$ точек, можно выбрать подмножество мощности n, элементы которого являются вершинами выпуклого n-угольника C с условием $|(C \setminus \partial C) \cap \mathcal{X}| \leqslant k$, то есть этот n-угольник содержит внутри себя не более k других точек из $\mathcal{X}$.*

Любопытно, что величина $h(n)$ не всегда конечна. Начиная с $n = 7$, она не определена (см. [46]). Также известно (см. [44]), что $h(3) = 3$, $h(4) = 5$, $h(5) = 10$, и лишь для $h(6)$ нет окончательного результата. Текущие рекорды здесь принадлежат М. Овермарсу и В. А. Кошелеву [45].

Относительно третьей проблемы известно в каком-то смысле ещё больше (есть масса различных оценок для величин $h(n, k)$). Однако окончательных результатов тут, конечно, только меньше (см. [44] и [47]).

Имеется ещё несколько обобщений первоначального вопроса [44, 48].

9. Раскраски гиперграфов

Напомним, что *гиперграф*, как и граф, — это пара $H = (V, E)$, где V — произвольное конечное множество, называемое множеством вершин, а E — совокупность некоторых подмножеств множества V, называемых рёбрами гиперграфа. Если все рёбра имеют одинаковую мощность n, то гиперграф называется *n-однородным.* В частности, любой 2-однородный гиперграф — это обычный граф.

Напомним также, что *хроматическое число* $\chi(H)$ гиперграфа H — это минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить его вершины, чтобы в каждом ребре присутствовали хотя бы два цвета.

В 1963 году П. Эрдеш и А. Хайнал заметили, что если для n-однородного гиперграфа $H = (V, E)$ выполнено $|E| \leqslant 2^{n-1}$, то $\chi(H) \leqslant 2$. Это мотивировало их ввести величину

$$m(n) = \min \left\{ |E(H)| : \ H \text{ — } n\text{-однородный гиперграф}, \ \chi(H) > 2 \right\}.$$

Поскольку недавно был написан очень подробный обзор [49] результатов, касающихся величины $m(n)$ и её многочисленных обобщений, мы будем цитировать лишь его: все ссылки на оригинальные работы в нём есть.

Сейчас известно, что

$$0{,}1 \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{2}} 2^n \leqslant m(n) \leqslant e(\ln 2) n^2 2^{n-2} (1 + o(1)),$$

и гипотеза гласит, что $m(n) = \Theta\left(n 2^n\right)$.

Важным и естественным обобщением величины $m(n)$ служит величина

$$m(n, r) = \min \left\{ |E(H)| : \ H \text{ — } n\text{-однородный гиперграф}, \ \chi(H) > r \right\}.$$

Про неё известно довольно много, но до окончательного результата далеко. Наилучшие верхние оценки при различных соотношениях между параметрами n, r таковы:

$$m(n, r) \leqslant \frac{e}{2} n^2 (r-1) r^{n-1} (\ln r) \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{2}$$

$$m(n,r) \leqslant C_{rn}^{n} \frac{\ln n}{\ln n - 1} \frac{1}{\lfloor n/\ln n \rfloor}, \tag{3}$$

$$m(n,r) = O\left(n^{3/2}(\ln n)\left(\frac{3}{4}\right)^{n} C_{r(n-1)+1}^{n}\right), \quad \frac{r(n)}{n} \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Оценка (2) принадлежит Эрдешу, оценки (3) и (4) — Н. Алону. Соотношения между ними следующие.

1) Если r фиксировано, а n растёт, то наилучшей является оценка (2).

2) Если же, наоборот, n фиксировано, а r растёт, то наилучшей является оценка (3).

3) Если $r = r(n)$ удовлетворяет условию $\left(\frac{3e}{4}\right)^n \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) = o(\ln r)$ при $n \to \infty$, то асимптотически наилучшей является оценка (4).

Теперь о наилучших нижних оценках:

$$m(n,2) = m(n) \geqslant 0{,}1\ \left(\frac{n}{\ln n}\right)^{\frac{1}{2}} 2^n, \tag{5}$$

$$m(n,r) \geqslant e^{-4r^2}\left(\frac{n}{\ln n}\right)^{a/(a+1)} r^n, \quad r < \sqrt{1/8\ln((\ln n)/2)}, \quad a = \lfloor \log_2 r \rfloor, \tag{6}$$

$$m(n,r) \geqslant \left(\pi^{\frac{1}{r}}\ e^{-\frac{1}{12(n-1)}}\right) \frac{1}{e\sqrt{2\pi}}\ (n-1)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2r}}\ r^{n+2/r}, \quad n \geqslant 2, \quad r \geqslant 2, \tag{7}$$

$$m(n,r) \geqslant \frac{1}{4}\ n^{1/2} r^{n-1}, \quad n \geqslant 2, \quad r \geqslant 3. \tag{8}$$

Оценка (5) принадлежит Дж. Радхакришнану и А. Сринивасану, оценка (6) — А. В. Косточке, оценки (7) и (8) — Д. А. Шабанову. Соотношения между ними следующие.

1) Если $r = 2$, то наилучшей является оценка (5).

2) Если $r = 3$, то наилучшей является оценка (8).

3) Если $3 < r < \sqrt{1/8\ln((\ln n)/2)}$, то асимптотически наилучшей является оценка (6).

4) Если $\sqrt{1/8\ln((\ln n)/2)} \leqslant r \leqslant c\frac{\ln n}{\ln\ln n}$ при $c \in (0, 1/2)$, то асимптотически наилучшей является оценка (8).

5) Если $r \geqslant c\frac{\ln n}{\ln\ln n}$ при $c > 1/2$, то асимптотически наилучшей является оценка (7).

Проблематика очень важная и популярная в мире, и есть огромное количество обобщений описанных задач и их приложений в теории Рамсея (см. [49]).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 09–01–00294, гранта Президента РФ МД–8390.2010.1, гранта поддержки ведущих научных школ НШ–8784.2010.1.

Литература

1. *Borsuk K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Math. — 1933. — V. 20. — P. 177–190.

2. *Hadwiger H.* Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers // Comm. Math. Helv. — 1945/46. — V. 18. — P. 73–75.

3. *Kahn J., Kalai G.* A counterexample to Borsuk's conjecture // Bulletin (new series) of the AMS. — 1933. — V. 29, N 1. — P. 60–62.

4. *Frankl P., Wilson R.M.* Intersection theorems with geometric consequences // Combinatorica. — 1981. — V. 1. — P. 357–368.

5. *Райгородский А.М.* Об одной оценке в проблеме Борсука // Успехи матем. наук. — 1999. — Т. 54, вып. 2. — С. 185–186.

6. *Schramm O.* Illuminating sets of constant width // Mathematika. — 1988. — V. 35. — P. 180–189.

7. *Bourgain J., Lindenstrauss J.* On covering a set in $\mathbb{R}^d$ by balls of the same diameter // Lecture Notes in Math. — 1991. — V. 1469. — P. 138–144.

8. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи матем. наук. — 2001. — Т. 56, вып. 1. — С. 107–146.

9. *Райгородский А.М.* Проблема Борсука. — М.: МЦНМО, 2006. — 56 с.

10. *Райгородский А.М.* Вокруг гипотезы Борсука // Итоги науки и техники. — 2007. — Т. 23. — С. 147–164.

11. *Raigorodskii A.M.* Three lectures on the Borsuk partition problem // London Mathematical Society Lecture Note Series. — 2007. — V. 347. — P. 202–248.

12. *Raigorodskii A.M.* The Borsuk partition problem: the seventieth anniversary // Mathematical Intelligencer. — 2004. — V. 26, N 3. — P. 4–12.

13. *Raigorodskii A.M.* Coloring distance graphs and graphs of diameters // to appear.

14. *Boltyanski V.G., Martini H., Soltan P.S.* Excursions into combinatorial geometry. — Berlin: Springer, 1997. — 500 c.

15. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research problems in discrete geometry. — Berlin: Springer, 2005. — 500 c.

16. *Райгородский А.М.* Хроматические числа. — М.: МЦНМО, 2003. — 44 с.

17. *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2007. — 136 с.

18. *Soifer A.* The Mathematical Coloring Book. — Springer, 2009. — 800 c.

19. *O'Donnell P.* Arbitrary girth, 4-chromatic unit distnace graphs in the plane. Graph description // Geombinatorics. — 2000. — V. 9. — P. 145–152.

20. *O'Donnell P.* Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. Graph embedding // Geombinatorics. — 2000. — V. 9. — P. 180–193.

21. *Bollobás B.* Random Graphs. — Cambridge Univ. Press, 2001. — 520 c.

22. *Колчин В.Ф.* Случайные графы. — М.: Физматлит, 2004. — 256 с.

23. *Janson S., Łuczak T., Ruciński A.* Random graphs. — New York: Wiley, 2000. — 333 c.

24. *Райгородский А.М.* Модели случайных графов. — М.: МЦНМО, 2011. — 136 с.

25. *Erdős P., Rényi A.* On random graphs I // Publ. Math. Debrecen. — 1959. — V. 6. — P. 290–297.

26. *Erdős P., Rényi A.* On the evolution of random graphs. // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. — 1960. — V. 5. — P. 17–61.

27. *Erdős P., Rényi A.* On the evolution of random graphs // Bull. Inst. Int. Statist. Tokyo. — 1961. — V. 38. — P. 343–347.

28. *Райгородский А.М.* Модели случайных графов // Труды МФТИ. — 2010. — Т. 2, № 4(8). — С. 130–140.

29. *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. — М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. — 320 с.

30. *Barabási L.-A., Albert R.* Emergence of scaling in random networks // Science. — 1999. — V. 286. — P. 509–512.

31. *Barabási L.-A., Albert R., Jeong H.* Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web // Physica. — 2000. — V. A281. — P. 69–77.

32. *Albert R., Jeong H., Barabási L.A.* Diameter of the world-wide web // Nature. — 1999. — V. 401. — P. 130–131.

33. *Bollobás B., Riordan O.* Mathematical results on scale-free random graphs // Handbook of graphs and networks. — Weinheim: Wiley-VCH, 2003. — P. 1–34.

34. *Райгородский А.М.* Экстремальные задачи теории графов и анализ данных. — М.: Регулярная и хаотическая динамика, 2009. — 120 с.

35. *Bollobás B., Riordan O.* The diameter of a scale-free random graph // Combinatorica. — 2004. — V. 24, N 1. — P. 5–34.

36. *Bollobás B., Riordan O., Spencer J., Tusnády G.* The degree sequence of a scale-free random graph process // Random Structures Algorithms. — 2001. — V. 18, N 3. — P. 279–290.

37. *Grechnikov E.A.* An estimate for the number of edges between vertices of given degrees in random graphs in the Bollobás–Riordan model // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. — 2011. — V. 1, N 2.

38. *Ostroumova L.A., Grechnikov E.A.* The distribution of second degrees in the Bollobás–Riordan random graph model // arXiv:1108.5585v1.

39. *Radziszowski S.P.* Small Ramsey Numbers // http://www.combinatorics.org/Surveys/ds1/sur.pdf.

40. *Райгородский А.М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2010. — 64 с.

41. *Graham R.L., Rothschild B.L., Spencer J.H.* Ramsey theory. — New York: John Wily and Sons, 1990. — 300 c.

42. *Erdős P., Szekeres G.* A combinatorial problem in geometry // Compositio Math. — 1935. — V. 2. — P. 463–470.

43. *Conlon D.* A new upper bound for the bipartite Ramsey problem // J. Graph Theory. — 2000. — V. 58. — P. 351–356.

44. *Morris W., Soltan V.* The Erdős–Szekeres problem on points in convex position // Bulletin (new series) of the Amer. Math. Soc. — 2000. — V. 37, N 4. — P. 437–458.

45. *Кошелев В.А.* Задача Эрдеша–Секереша о пустых шестиугольниках на плоскости // Моделирование и анализ информационных систем. — 2009. — Т. 16, № 2. — С. 22–74.

46. *Horton J.D.* Sets with no empty 7-gons // Canad. Math. Bull. — 1983. — V. 26. — P. 482–484.

47. *Кошелев В.А.* Почти пустые шестиугольники // Фундаментальная и прикладная математика. — 2008. — Т. 14, № 6. — С. 91–120.

48. *Кошелев В.А.* Теорема Эрдеша–Секереша и сравнения // Математические заметки. В печати.

49. *Райгородский А.М., Шабанов Д.А.* Задача Эрдеша–Хайнала о раскрасках гиперграфов, ее обобщения и смежные проблемы // Успехи матем. наук. — 2011. — Т. 66.

Поступила в редакцию 07.09.2011