УДК 571.9

В.Б. Трушин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Существование решений некоторых вариационных неравенств*

В работе рассматриваются некоэрцитивные условия разрешимости для вариационных неравенств.

Ключевые слова: монотонность, псевдомонотонность, вариационное неравенство, коэрцитивность.

Здесь будут доказаны результаты, доложенные автором на международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения С.М. Никольского [1].

Всюду ниже будем предполагать, что:

L — вещественное линейное пространство;

L^* — двойственное L пространство;

(f,x) — значение линейного функционала $f \in L^*$ на векторе $x \in L$.

Пусть D и K — выпуклые подмножества из L, состоящие более чем из одной точки, такие, что $K \cap D \neq \varnothing$ и $K \setminus D \neq \varnothing$.

Для x, $w \in L$ введём $x_t(w) = tx + (1-t)w \quad (t \geqslant 0)$.

Пусть $D^w = \{x \in D : \quad [\exists\, t > 1 : \quad x = x_t(w)]\}$, $\Gamma^w = D \setminus D^w$.

Множество D^w является аналогом внутренности множества D, а Γ^w — его границы.

Пусть A — оператор, действующий из K в L^*, j — такой собственно выпуклый функционал, определенный на выпуклой оболочке множества $K \cup w$, что $j(x) \not\equiv +\infty$ при $x \in K \cap D$, $j(w) \neq +\infty$.

Введём $f(x,y) = (Ax, y-x) + j(y) - j(x)$.

Приведём две теоремы, являющиеся основными результатами работы.

Теорема 1. Из разрешимости вариационного неравенства (ВН):

$$\exists\, x \in D \cap K : \quad f(x,y) \geqslant 0 \quad \forall\, y \in K \cap D \tag{1}$$

следует, что x является решением ВН:

$$\exists\, x \in K : \quad f(x,y) \geqslant 0 \quad \forall\, y \in K, \tag{2}$$

если для некоторой точки $w \in L$ выполняются следующие условия:

$$D^w \cap K \neq \varnothing, \tag{3}$$

$$\forall\, x \in K \cap \Gamma^w \quad \exists\, t \in (0;1) : \quad x_t(w) \in K \cap D, \tag{4}$$

$$\forall\, x \in K \setminus D \quad \exists\, t \in (0;1) : \quad x_t(w) \in D, \tag{5}$$

$$\forall\, x \in K \cap \Gamma^w : \quad f(x,w) < 0. \quad \square \tag{6}$$

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 заменить условия (5), (6) на условия

$$\forall\, x \in K \setminus D \quad \exists\, t \in (0;1) : \quad x_t(w) \in K \cap D, \tag{7}$$

$$\forall\, x \in K \cap \Gamma^w : \quad f(x,w) \leqslant 0, \tag{8}$$

то справедливо заключение теоремы 1. $\square$

Лемма 1. Условие

$$\forall\, y \in K \cap D^w \quad \forall\, x \in K \quad \exists\, t \in (0;1) : \quad x_t(y) \in K \cap D \tag{9}$$

является следствием условия (5). $\square$

Замечание 1. В этой работе мы не накладываем никаких топологических ограничений на пространство L. Кроме того, в теоремах 1 и 2 не предполагаем, что точка w принадлежит множеству D или K.

Замечание 2. Условия (3), (4) и (7) означают, что множество $K \cap D$ и точка w порождают K, т.е. $\forall\, x \in K$ существует $x_0 \in K \cap D$, принадлежащий интервалу $(w;x)$. Отметим также, что если $w \in D$, то по определению $w \in D^w$, т.к. $w = w_t(w)$ для любых t.

Замечание 3. Если $w \in K$, то условия (3, 4, 7) являются следствиями условия (5).

Действительно, если $w \in K$, то по условию (5) $\exists\, t \in (0;1)$ такое, что $w = w_t(w) \in D$, т.е. $w \in K \cap D^w$, что доказывает условие (3). Если $x \in K \setminus D$, то отрезок $[x,w] \subset K$, а часть его по условию (5) лежит в D при некотором числе $t \in (0;1)$. Последнее утверждение доказывает (7). Условие (4) вытекает из включений $x \in K \cap \Gamma^w \subset K \cap D$ и $w \in K \cap D^w$ и выпуклости множества $K \cap D$.

Докажем теперь анонсированные выше результаты.

Доказательство леммы 1.

Пусть $y \in K \cap D^w$ и для выпуклых множеств D и K выполняется условие (5), тогда $\exists\, t \in (0;1)$ такое, что $\forall\, x \in K$ справедливо включение (9): $x_t(y) \in K \cap D$. Без ограничения общности положим $w = 0$ и доказательство леммы разобьем на несколько этапов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1/12136

1. Если $y = x$, то $x_t(y) = y \in K \cap D$ при всех t, а при $x \neq y$ и $x \in K \cap D$, из выпуклости множества $K \cap D$ отрезок $[x, y] \subset K \cap D$, что доказывает (9).

2. Если $w = 0 \in K$, то $0 \in K \cap D^w$.

3. Пусть $x \in K \setminus D$ и $y = w = 0$, то из первого этапа имеем $x \neq y$. Но при этом отрезок $[0, x] \subset K$, а из (5) следует, что $\exists\, t \in (0; 1)$ такое, что $tx \in D$, что доказывает (9).

4. Пусть три точки $x \in K \setminus D$, $y \in K \cap D^w$ и $w = 0$ лежат на одной прямой и w лежит на интервале $(x, y) \subset K$, тогда доказательство леммы вытекает из второго этапа доказательства леммы и включения $w = 0 \in \in K$. Действительно в этом случае $w = x_t(y)$ при некотором $t \in (0; 1)$.

5. Пусть три точки $x \in K \setminus D$, $y \in K \cap D^w$ и $w = = 0$ лежат на одной прямой и w не лежит на отрезке $[x, y] \subset K$, тогда $y = mx$ при некотором $m > 0$. Из (5) получим $\exists\, t \in (0; 1)$ такое, что $tx = x_t(w) \in D$. Покажем от противного, что число $m \in (0; 1)$. Пусть $m \geqslant 1$, тогда отрезок $[tx, mx] \subset D$ содержит $x \in D$, что противоречит условию $x \in K \setminus D$. Так как $y \in D^w$, то $\exists\, r > 1$ такое, что $ry \in D$. Таким образом, множества (y, ry) и $[y, x]$ имеют непустое пересечение, т. к. $y = mx$ и $m \in (0; 1)$.

6. Рассмотрим последний случай, когда три точки $x \in K \setminus D$, $y \in K \cap D^w$ и $w = 0$ не лежат на одной прямой. Из (5) получим $\exists\, m \in (0; 1)$ такое, что $mx \in D$, а т. к. $y \in \in K \cap D^w$, то $\exists\, r > 1$ такое, что $ry \in D$. Из выпуклости множеств D и K следует, что $[x, y] \subset K$, а $[mx, ry] \subset D$. Докажем, что эти отрезки пересекаются в некоторой точке интервала $(x; y)$. Рассмотрим уравнение $tx + + (1 - t)y = sry + (1 - s)mx$. Так как точки x, y, $w = 0$ не лежат на одной прямой, то $t = m(1 - s)$ и $(1 - t) = sr$. То есть $s = (1 - - m)/(r - s) \in (0, 1)$ и $t = m(1 - s) \in (0, 1)$. Таким образом, на интервале $(x, y) \subset K$ найдется точка из D, что доказывает лемму и в этом случае.

Доказательство теоремы 1. Пусть ВН (1) имеет решение x (в этом случае $j(x) \neq +\infty$, т. к. $\exists\, y \in K \cap D$ такой, что $j(y) < +\infty$) и выполняются условия (3, 4, 5, 6). Тогда x является решением ВН (2). Докажем от противного, что $x \in K \cap D^w$. Пусть $x \in K \cap \Gamma^w$, тогда из (4) получим, что $\exists\, t \in \in (0; 1)$ такое, что $x_t(w) \in K \cap D$. Подставим $y = = x_t(w)$ в (1). Получим $0 \leqslant f(x, y) = (Ax, tx + (1 - - t)w - x) + j(tx + (1 - t)w) - j(x) \leqslant (1 - t) f(x, w)$, так как

$$j(tx + (1 - t)w) - j(x) \leqslant$$
$$\leqslant tj(x) + (1 - t)j(w) - j(x) = (1 - t)(j(w) - j(x)), \text{ т.е.}$$
$$f(x, w) \geqslant 0, \tag{10}$$

но (10) противоречит (6), что доказывает включение $x \in K \cap D^w$. Из последнего включения и леммы 1 имеем $\forall\, z \in K\ \exists\, t \in (0; 1)$ такое, что $z_t(x) \in K \cap D$. Как при доказательстве (10) подставим в (1) $y = z_t(x)$, и получим $f(x, z) \geqslant 0$, что совпадает с ВН (2). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть ВН (1) имеет решение x и выполняются условия (3), (4), (7), (8). Тогда x является решением ВН (2). Так как справедливо (4), а (7) является следствием (5), то по-прежнему справедливо неравенство (10), а с учетом (8) получим $f(x, w) = 0$. Из (1) теперь получим $0 \leqslant f(x, y) = f(x, y) - - f(x, w) = (Ax, y - w) + j(y) - j(w)$ при $\forall\, y \in K \cap D$. Из (7) имеем, что для $\forall\, z \in K \setminus D$ при некотором $t \in (0; 1)$ справедливо включение $y = z_t(w) \in K \cap \cap D$. Подставим этот y в предыдущее неравенство и, как выше, получим, что оно справедливо для $\forall\, z \in K \setminus D$. С учетом равенства $f(x, w) = 0$ и ВН (1) рассматриваемое неравенство выполняется для $\forall\, z \in K$ и совпадает с ВН (2).

В заключение отметим, что аналог условия (6) используется, например в [2], для доказательства результатов о существовании решений вариационных неравенств.

Литература

1. *Трушин В.Б.* О разрешимости некоторых вариационных неравенств // Тезисы докладов Международной конференции «Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ», посвященной 90-летию академика С.М. Никольского, 17 апреля–3 мая. – М.: ПАИМС, 1995. – С. 277–278.

2. *Байокки К., Капело А.* Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. – М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 16.01.2011