

Московский физико-технический институт (ГУ)
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Контрольная работа №2, вариант 1

1. Приведите к предварённой нормальной форме формулу

$$(\forall x A(x) \rightarrow \exists y B(x, y)) \wedge (\neg \exists z \forall x C(x, z) \rightarrow D(z)).$$

2. Являются ли следующие замкнутые формулы общезначимыми? Если да, то докажите, если нет, то предложите интерпретацию, в которой формула неверна.

а) $((\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) \rightarrow \forall x C(x)) \rightarrow \forall x ((A(x) \vee B(x)) \rightarrow C(x));$

б) $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \rightarrow \forall z \exists y \forall x P(x, y, z).$

3. Рассмотрим интерпретацию $\langle \mathcal{P}; M, E, P \rangle$, где \mathcal{P} — множество всех людей, $M(x)$ означает « x является мужчиной», $E(x, y)$ означает « x и y — супруги», $P(x, y)$ означает « x — родитель y ». Выразите в этой интерпретации предикат « x и y являются единоутробными братьями». (Это значит, что у них общая мать и разные отцы).

4. Рассмотрим интерпретацию $\langle \Xi, =, \cdot \rangle$, где Ξ — множество всех конечных последовательностей 0 и 1, $=$ понимается как совпадение строк, а \cdot как конкатенация. Докажите, что в этой интерпретации не выразим предикат: «В последовательности v нечётное число единиц».

5. Два натуральных числа называются дружественными, если сумма делителей первого (за исключением самого числа) равна второму, а сумма делителей второго (также за исключением самого числа) равна первому. Выразите в арифметике предикат « y x есть дружественное число, большее его».

6. Докажите, что любая формула в интерпретации $\langle [0, +\infty), 0, < \rangle$ эквивалентна некоторой бескванторной.

Московский физико-технический институт (ГУ)
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Контрольная работа №2, вариант 2

1. Приведите к предварённой нормальной форме формулу

$$(\exists xA(x, y) \rightarrow \forall zB(z)) \wedge (C(z) \rightarrow \neg \exists t \forall y D(y, t)).$$

2. Являются ли следующие замкнутые формулы общезначимыми? Если да, то докажите, если нет, то предложите интерпретацию, в которой формула неверна.

a) $(\forall xA(x) \rightarrow (\exists xB(x) \wedge \exists xC(x))) \rightarrow \exists x(A(x) \rightarrow (B(x) \wedge C(x)))$;

b) $\forall x \exists y \forall z P(x, y, z) \rightarrow \exists y \forall z \exists x P(x, y, z)$.

3. Рассмотрим интерпретацию $\langle \mathcal{P}; M, E, P \rangle$, где \mathcal{P} — множество всех людей, $M(x)$ означает « x является мужчиной», $E(x, y)$ означает « x и y — супруги», $P(x, y)$ означает « x — родитель y ». Выразите в этой интерпретации предикат « x и y являются единокровными сёстрами». (Это значит, что у них общий отец и разные матери).

4. Рассмотрим интерпретацию $\langle \Xi, =, \cdot \rangle$, где Ξ — множество всех конечных последовательностей 0 и 1, $=$ понимается как совпадение строк, а \cdot как конкатенация. Докажите, что в этой интерпретации не выразим предикат: «В последовательности v чётное число единиц».

5. Два натуральных числа называются дружественными, если сумма делителей первого (за исключением самого числа) равна второму, а сумма делителей второго (также за исключением самого числа) равна первому. Выразите в арифметике предикат « y — x есть дружественное число, меньшее его».

6. Докажите, что любая формула в интерпретации $\langle [0, 1], 0, 1, < \rangle$ эквивалентна некоторой бескванторной.