УДК 512.6; 519.2; 530.145

О. В. Висков

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Московский физико-технический институт (государственный университет)

Упорядоченная форма квадратичного экспоненциала в алгебре Гейзенберга–Вейля

Предлагается новый подход к факторизации квадратичного экспоненциала в алгебре Гейзенберга—Вейля.

Ключевые слова: канонические коммутационные соотношения, факторизация, процесс Орнстейна—Уленбека, сжимающий оператор.

1. Введение

Чтобы читатель сразу понял тематику предлагаемой статьи и используемые в ней технические приемы, начнем, вопреки обыкновению, с двух известных результатов, получивших свое отражение даже в монографической литературе. Оба эти результата оказываются частными случаями доказанной в п. 6^0 теоремы и иллюстрируют ее возможности.

2. Процесс Орнстейна—Уленбека

Первый из этих результатов связан с теорией вероятностей.

В своем замечательном учебнике [1] Феллер, выписав обратное уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \rho x \frac{\partial u(t,x)}{\partial x}, \tag{1}$$

для случайного процесса Орнстейна—Уленбека, описывающего движение броуновской частицы при воздействии упругой силы, рекомендует сначала произвести в уравнении (1) замену функции

$$v(t,x) = u(t, x\exp(\rho t)), \tag{2}$$

а затем ввести «новое время»:

$$\tau = \frac{1-\exp(-2\rho t)}{2\rho}. \tag{3}$$

В результате этих операций уравнение (1) превращается в стандартное уравнение диффузии, откуда становится очевидным тот факт, что плотности переходных вероятностей рассматриваемого процесса являются гауссовскими со средним значением $x\exp(-\rho t)$ и дисперсией τ, задаваемой (3).

Разумеется, совсем нетрудно провести предлагаемые выкладки и убедиться в правильности приведенных рекомендаций. Однако, почему именно необходимо производить указанные замены, в учебнике никак не объясняется, что не может не вызвать у критически настроенного читателя чувства некоторого неудовлетворения.

Покажем, что рекомендуемые Феллером преобразования вытекают из следующих алгебраических соображений. Довольно понятно, что решение $u(t,x)$ задачи Коши для уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $u(0,x) = f(x)$, может быть записано в виде

$$u(t,x) = \exp\{t(D^2/2 - \rho x D)\}[f(x)], \tag{4}$$

где символом $D = d/dx$ (здесь и далее) обозначен оператор дифференцирования по x, а сам символ x понимается как оператор умножения на x. Однако, как это легко выводится из доказанного в п. 6^0 результата, экспоненциальный оператор в (4) допускает следующую факторизацию:

$$\exp\{t(D^2/2 - \rho x D)\} = \exp\{-t\rho x D)\} \exp\{\tau D^2/2\}, \tag{5}$$

где τ задается соотношением (3).

Экспоненциальные сомножители в (5), как нетрудно в этом убедиться, представляют собой операторы, действующие согласно соотношениям (заметим, что $\tau > 0$)

$$\exp\{-t\rho x D)\}[f(x)] = f(x\exp(-\rho t)), \tag{6}$$

и

$$\exp\{\tau(D^2/2\}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\tau\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\tau}\right\} f(x+y)d\,y. \tag{7}$$

3. Гармонический осциллятор

Второй иллюстративный пример связан с квантовой механикой.

В монографии [2] (Теорема 12.63) приводятся пять различных доказательств следующего утверждения.

Теорема. *Оператор* $\exp\{-tH\}$, *где* $H = -D^2 + x^2 - 1$ – *гамильтониан гармонического осциллятора, является ядерным интегральным оператором, ядро которого имеет вид*

$$Q_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-\exp(-4t))}} \exp(-F_t(x,y)), \tag{8}$$

где

$$F_t(x,y) = \frac{1}{1-\exp(-4t)} \left[\frac{1}{2}(1-\exp(-4t))(x^2+y^2) - 2xy\exp(-2t)\right]. \tag{9}$$

Приведенный результат опять-таки является следствием доказываемой в настоящей работе теоремы, из которой в качестве частного случая вытекает следующее факторизационное тождество:

$$\exp\{t(D^2 - x^2)\} = (\cosh 2t)^{-1/2} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\tanh 2t\right] \times \tag{10}$$

$$\times \exp\left[-xD\ln\cosh 2t\right] \exp\left[\frac{D^2}{2}\tanh 2t\right].$$

Это тождество вместе с соотношениями (6) и (7) позволяет утверждать, что

$$\exp\left[t(D^2 - x^2)\right]\left[f(x)\right] = (\cosh 2t)^{-1/2} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\kappa\right] \mathbf{E} f\left(\frac{x}{\cosh 2t} + \eta_\kappa\right),$$

где $\kappa = \tanh 2t$, η_κ обозначена случайная величина, имеющая нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией κ, а $\mathbf{E}$ – знак математического ожидания. Это равенство позволяет представить соотношения (8) и (9) приведенной теоремы в более экономном виде, а именно:

$$\exp\{-tH\}[f(x)] = \exp(t)(\cosh 2t)^{-1/2} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\kappa\right] \mathbf{E} f\left(\frac{x}{\cosh 2t} + \eta_\kappa\right). \tag{11}$$

4. Алгебра Гейзенберга—Вейля

Часто алгеброй Гейзенберга—Вейля [3], а иногда просто алгеброй Вейля, называют кольцо дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами над фиксированным полем (с нулевой, как правило, характеристикой). Нам удобнее определить этот объект более абстрактно как фактор-алгебру свободной алгебры (над произвольным полем) с тремя образующими a, b и c по идеалу, порожденному тождествами

$$[a, b] = ab - ba = c, \quad [a, c] = [b, c] = 0. \tag{12}$$

Эти равенства в квантовой физике называют каноническими коммутационными соотношениями. Именно таким коммутационным соотношениям подчиняются как бозонные операторы рождения и уничтожения, так и операторы положения и момента в квантовой механике [2].

5. Квадратичный экспоненциал

Обозначим

$$H = \alpha a^2 + \beta ab + \gamma ba + \delta b^2, \tag{13}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — заданные постоянные, а символы a, b и c подчиняются соотношениям (12). Формальный степенной ряд по формальной переменной t вида

$$g = g(t; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \exp(tH), \tag{14}$$

где H задается (13), будем называть квадратичным экспоненциалом в алгебре Гейзенберга—Вейля. Наша основная цель — найти удобное для использования разложение функции $g(t; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ переменных a, b, c, подчиняющихся соотношениям (12), на «простые» множители.

6. Факторизация

Нас будет интересовать представление g в виде

$$\exp(tH) = \exp(\xi a^2) \exp(\eta ab) \exp(\zeta ba) \exp(\theta b^2) \equiv e_1 e_2 e_3 e_4, \tag{15}$$

где ξ, η, ζ и θ — искомые функции аргументов $\alpha, \beta, \gamma, \delta, c$ и t. Чтобы найти эти функции, продифференцируем соотношение (15) по t, снося при этом показатели соответствующих экспонент вправо от них. Это приводит к равенству

$$\exp(tH)H = \xi' e_1 a^2 e_2 e_3 e_4 + \eta' e_1 e_2 ab e_3 e_4 + \zeta' e_1 e_2 e_3 ba e_4 + \theta' e_1 e_2 e_3 e_4 b^2. \tag{16}$$

Удобно переписать соотношение (16) с учетом равенства (15) в виде

$$H = \xi' e_4^{-1} e_3^{-1} e_2^{-1} a^2 e_2 e_3 e_4 + \eta' e_4^{-1} e_3^{-1} ab e_3 e_4 + \zeta' e_4^{-1} ba e_4 + \theta' b^2. \tag{17}$$

Правую часть равенства (17) можно легко преобразовать, последовательно используя следующие соотношения:

$$\exp(-\tau ba) a^2 \exp(\tau ba) = a^2 \exp(2\tau c); \tag{18}$$

$$\exp(-\tau ab) a^2 \exp(\tau ab) = a^2 \exp(2\tau c); \tag{19}$$

$$\exp(-\tau b^2) ba \exp(\tau b^2) = ba + 2\tau c b^2; \tag{20}$$

$$\exp(-\tau b^2) ab \exp(\tau b^2) = ab + 2\tau c b^2; \tag{21}$$

$$\exp(-\tau b^2)a^2\exp(\tau b^2) = a^2 + 2\tau c(ab+ba) + 4\tau^2c^2b^2. \tag{22}$$

Установим справедливость лишь наиболее сложного равенства (22), поскольку все остальные соотношения доказываются аналогично (только короче). Обозначим временно символом y выражение $\exp(-\tau b^2)a^2\exp(\tau b^2)$. Дифференцируя y по τ, находим, что

$$y' = \exp(-\tau b^2)[a^2, b^2]\exp(\tau b^2).$$

Заметим теперь, что из коммутационных соотношений (12) следует равенство

$$[a^2, b^2] = 2c(ab+ba).$$

Поэтому использование (20) и (21) приводит к следующей задаче Коши:

$$y' = 2c(ab+ba+4\tau cb^2),\ y|_{\tau=0} = a^2,$$

решение которой задается (22). Если с использованием (18) — (22) преобразовать тождество (17), сравнить коэффициенты при a^2, ab, ba и b^2 и разрешить полученные равенства относительно $\xi', \eta', \zeta', \theta'$, то в результате приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\xi' = \alpha\exp(-2c(\eta+\zeta));\\ &\eta' = \beta - 2c\alpha\theta;\\ &\zeta' = \gamma - 2c\alpha\theta;\\ &\theta' = \delta - 2c(\beta+\gamma)\theta + 4\alpha c^2\theta^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Отметим сразу же, что, как нетрудно убедиться непосредственной проверкой, решение θ последнего уравнения в (23) имеет вид

$$\theta = \delta\frac{\sinh t\mu}{\mu\cosh t\mu + c(\beta+\gamma)\sinh t\mu}, \tag{24}$$

где

$$\mu = c\sqrt{(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta}. \tag{25}$$

Из (23) видно, что остальные искомые функции ξ, η и ζ находятся с помощью последовательного интегрирования правых частей оставшихся уравнений.

Оказывается, что можно найти функции ξ, η и ζ и без использования операции интегрирования. В самом деле, если повторить описанную выше процедуру, приведшую к системе дифференциальных уравнений (23), с той разницей, что при дифференцировании (15) по t сносить показатели соответствующих экспонент влево (а не вправо, как это было) от них, то в результате придем к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\xi' = \alpha - 2c(\beta+\gamma)\xi + 4\delta c^2\xi^2;\\ &\eta' = \beta - 2c\delta\xi;\\ &\zeta' = \gamma - 2c\delta\xi;\\ &\theta' = \delta\exp(-2c(\eta+\zeta)). \end{aligned} \tag{26}$$

Сравнение вторых (или третьих) уравнений в (23) и (26) приводит к равенству

$$\delta\xi = \alpha\theta,$$

и поэтому

$$\xi = \alpha\frac{\sinh t\mu}{\mu\cosh t\mu + c(\beta+\gamma)\sinh t\mu}, \tag{27}$$

где μ задается (25).

Вычитая средние равенства системы (23) (или (26)) одно из другого, убеждаемся, что

$$\eta - \zeta = (\beta - \gamma)t. \tag{28}$$

Наконец, соотношения (27) и (25) вместе с равенством

$$\alpha - 2c(\beta+\gamma)\xi + 4c^2\delta\xi^2 = \alpha\exp(-2c(\eta+\zeta)),$$

получаемым приравниванием правых частей первых уравнений в (23) и (26), дают возможность показать, что

$$\eta + \zeta = \frac{1}{c}\ln\left(\cosh t\mu + \frac{c(\beta+\gamma)}{\mu}\sinh t\mu\right). \tag{29}$$

Полусумма и полуразность правых частей (28) и(29) определяют искомые функции η и ζ, соответственно.

Подводя итог приведенным рассуждениям, можно утверждать, что справедлива следующая

Теорема. *Пусть*

$$H = \alpha a^2 + \beta ab + \gamma ba + \delta b^2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — заданные постоянные, а символы a, b и c подчиняются коммутационным соотношениям

$$[a,b] = ab - ba = c, \quad [a,c] = [b,c] = 0.$$

Тогда для формального степенного ряда $\exp(tH)$ (по формальной переменной t) справедливо факторизационное тождество

$$\exp(tH) = \exp(\xi a^2)\exp(\eta ab)\exp(\zeta ba)\exp(\theta b^2),$$

где

$$\xi = \alpha\frac{\sinh t\mu}{\mu\cosh t\mu + c(\beta+\gamma)\sinh t\mu},$$

$$\eta = \frac{\beta-\gamma}{2}t + \frac{1}{2c}\ln\left(\cosh t\mu + \frac{c(\beta+\gamma)}{\mu}\sinh t\mu\right),$$

$$\zeta = \frac{\gamma-\beta}{2}t + \frac{1}{2c}\ln\left(\cosh t\mu + \frac{c(\beta+\gamma)}{\mu}\sinh t\mu\right),$$

$$\theta = \delta\frac{\sinh t\mu}{\mu\cosh t\mu + c(\beta+\gamma)\sinh t\mu},$$

и

$$\mu = c\sqrt{(\beta+\gamma)^2 - 4\alpha\delta}.$$

7. Процесс Орнстейна—Уленбека

Чтобы убедиться, что соотношение (5) является простым следствием доказанной теоремы, следует прежде всего заметить, что коммутатором оператора дифференцирования $D = d/dx$ и оператора x умножения на аргумент является тождественный оператор 1. Поэтому, полагая в теореме $a = x, b = D, c = -1$ и выбирая параметры квадратичного экспоненциала $\alpha = 0, \beta = -\rho, \gamma = 0$ и $\delta = 1/2$, после несложных подсчетов находим, что $\xi = 0, \eta = -\rho t, \zeta = 0$ и $\theta = \tau$, где τ задается соотношением (3), что и приводит к равенству (5). Стоит отметить, что равенства (6) и (7) наряду с (5) позволяют записать решение (4) в виде

$$u(t,x) = \mathbf{E}f(\eta_\tau + x\exp(-\rho t)), \tag{30}$$

где η_t — стандартный винеровский процесс, $\mathbf{E}$ — знак математического ожидания, а τ задается соотношением (3).

Представляет также интерес двойственное к (5) представление

$$\exp\{t(D^2/2 - \rho x D)\} = \exp\{\lambda D^2/2\} \exp\{-t\rho x D)\}, \tag{31}$$

где

$$\lambda = \frac{\exp(2\rho t) - 1}{2\rho}. \tag{32}$$

Этот результат также является следствием доказанной теоремы, поскольку если в ней выбрать $a = D, b = x, c = 1$, то моментально обнаруживается, что $\xi = \lambda, \eta = 0, \zeta = -\rho t$ и $\theta = 0$, поэтому имеет место (31) и (32). Приведенные соображения позволяют представить решение (4) в двойственной по отношению к (30) форме:

$$u(t,x) = \mathbf{E} f((\eta_\lambda + x)\exp(-\rho t)),$$

где по-прежнему η_t — стандартный винеровский процесс, $\mathbf{E}$ — знак математического ожидания, а λ задается соотношением (32).

8. Гармонический осциллятор

Покажем, что факторизационное тождество (10) является следствием доказанного нами утверждения. В самом деле, как и в п. 7, полагаем в теореме $a = x, b = D, c = -1$ и выбираем параметры квадратичного экспоненциала $\alpha = -1, \beta = \gamma = 0$ и $\delta = 1$. Легло убедиться, что при таком выборе параметров получаем $\xi = -\frac{1}{2}\tanh 2t, \eta = \zeta = -\frac{1}{2}\ln\cosh 2t$ и $\theta = \frac{1}{2}\tanh 2t$. Следовательно, имеет место представление

$$\exp\{t(D^2 - x^2)\} = \exp\left[-\kappa\frac{x^2}{2}\right]\exp\left[-\frac{xD}{2}\ln\coth 2t\right]\times \tag{33}$$

$$\times\exp\left[-Dx\ln\cosh 2t\right]\exp\left[\kappa\frac{D^2}{2}\right],$$

где $\kappa = \tanh 2t$. Если в третьем сомножителе равенства (33) заменить оператор Dx равным ему оператором $1 + xD$, то придем с соотношению (10).

Отметим также двойственное к (33) равенство

$$\exp\{t(D^2 - x^2)\} = \exp\left[\kappa\frac{D^2}{2}\right]\exp\left[\frac{Dx}{2}\ln\coth 2t\right]\times \tag{34}$$

$$\times\exp\left[xD\ln\cosh 2t\right]\exp\left[-\kappa\frac{x^2}{2}\right],$$

которое получается, если в факторизационной теореме положить $a = D, b = x$ и, следовательно, $c = 1$. Соотношение (34) в свою очередь приводит к альтернативному представлению ядра оператора, рассматриваемого в теореме п. 3.

9. Упорядоченность

Доказанное в п. 6 факторизационное тождество может быть представлено в несколько иной форме, более приспособленной для решения некоторых задач, возникающих в квантовой физике. Заметим прежде всего, что, в силу коммутационных соотношений (12),

$$\exp\{\eta ab\}\exp\{\zeta ba\} = \exp\{(\eta + \zeta)ab\}\exp\{-c\zeta\}. \tag{35}$$

Покажем теперь, что для формального степенного ряда $\exp\{tab\}$ справедливо представление

$$\exp\{tab\} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n b^n}{n!}\left[\frac{1 - \exp\{-ct\}}{c}\right]^n. \tag{36}$$

В самом деле, если искать упорядоченное представление экспоненты, стоящей слева в равенстве (36) в виде

$$\exp\{tab\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n b^n}{n!} [\mu]^n ,$$

где μ — искомый степенной ряд по формальной переменной t, то дифференцирование этого соотношения по t приводит к равенству

$$ab \exp\{tab\} = \mu' a \exp\{tab\} b.$$

Остается лишь заметить, что из коммутационных соотношений (12) вытекает равенство

$$\exp\{\eta tab\} b \exp\{-\eta ab\} = b \exp\{ct\}.$$

Следовательно, $\mu' = \exp\{-ct\}$, что и доказывает (36).

Удобно представление (36) записывать в виде

$$\exp\{tab\} = \exp\left\{ a_2 b_1 \left[\frac{1 - \exp\{-ct\}}{c} \right] \right\} , \tag{37}$$

где символы a_2 и b_1 считаются коммутирующими, в любом мономе результирующего выражения символ a_2 ставится левее символа b_1, и после этого индексы удаляются. Придерживаясь этого соглашения и используя равенство (29), убеждаемся, что

$$\exp\{(\eta + \zeta)ab\} = \exp\left\{ a_2 b_1 \left[\frac{r(t) - 1}{cr(t)} \right] \right\} , \tag{38}$$

где

$$r(t) = \coth t\mu + c(\beta + \gamma) \frac{\sinh t\mu}{\mu}.$$

Кроме того, ясно, что

$$\exp\{-c\zeta\} = r(t)^{-1/2} \exp\left\{ \frac{\beta - \gamma}{2} ct \right\}.$$

Приведенные соображения позволяют переформулировать теорему п. 6 в следующем виде.

Теорема. *Пусть*

$$H = \alpha a^2 + \beta ab + \gamma ba + \delta b^2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *— заданные постоянные, а символы* a, b *и* c *подчиняются коммутационным соотношениям*

$$[a, b] = ab - ba = c, \quad [a, c] = [b, c] = 0.$$

Тогда для формального степенного ряда $\exp(tH)$ (по формальной переменной t) справедливо тождество

$$\exp(tH) = r(t)^{-1/2} \exp\left\{ \xi a_2^2 + a_2 b_1 \frac{r(t) - 1}{cr(t)} + \theta b_1^2 + \frac{(\beta - \gamma)ct}{2} \right\} ,$$

где

$$\xi = \alpha \frac{\sinh t\mu}{\mu r(t)},$$

$$\theta = \delta \frac{\sinh t\mu}{\mu r(t)},$$

и введены обозначения

$$\mu = c\sqrt{(\beta + \gamma)^2 - 4\alpha\delta},$$

$$r(t) = \coth t\mu + c(\beta + \gamma) \frac{\sinh t\mu}{\mu}.$$

Символы с индексами (т.е. a_2 и b_1) в правой части приведенного равенства считаются коммутирующими и предполагается, что в любом мономе результирующего выражения символ b_1 ставится правее символа a_2, после чего индексы удаляются.

10. Сжимающий оператор

Ограничимся лишь одним примером, иллюстрирующим сформулированное утверждение.

Концепция сжатых состояний возникла в квантовой оптике еще в семидесятых годах прошлого века [4] и оказалась весьма полезной в различных разделах квантовой физики (см., например, обзор [5]). Сжимающим оператором называют оператор

$$S = \exp\{i\lambda(QP - i/2)\}, \tag{39}$$

где Q и P — связанные с гармоническим осциллятором операторы положения и момента соответственно и λ — параметр, характеризующий сжатие. Эти операторы удовлетворяют коммутационному соотношению:

$$[P, Q] = i.$$

Если выразить оператор S в терминах бозонных операторов рождения $A^\dagger$ и уничтожения A, учитывая, что

$$Q = 2^{-1/2}(A^\dagger + A), \qquad P = i2^{-1/2}(A^\dagger - A),$$

то (39) примет вид

$$S = \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(A^2 - A^{\dagger 2})\right\}. \tag{40}$$

Поскольку бозонные операторы A и $A^\dagger$ подчиняются коммутационному соотношению

$$[A, A^\dagger] = 1,$$

где 1 означает тождественный оператор, сформулированное в предыдущем пункте утверждение после простых подсчетов приводит к равенству

$$S = (\coth\lambda)^{-1/2} : \exp\left\{-\frac{\tanh\lambda}{2}A^{\dagger 2} + \frac{1-\coth\lambda}{\coth\lambda}AA^\dagger + \frac{\tanh\lambda}{2}A^2\right\} : .$$

Здесь символ : . : означает *нормальную* упорядоченность соответствующего выражения, при которой сначала действует оператор уничтожения A и лишь затем оператор рождения $A^\dagger$.

Если символом $\vdots\,\vdots$ обозначить *антинормальную* упорядоченность, когда в любом мономе оператор рождения стоит правее оператора уничтожения, то, как легко убедиться, из теоремы п. 8 вытекает представление

$$S = (\coth\lambda)^{-1/2} \vdots \exp\left\{\frac{\tanh\lambda}{2}A^2 + \frac{\coth\lambda - 1}{\coth\lambda}AA^\dagger - \frac{\tanh\lambda}{2}A^{\dagger 2}\right\} \vdots .$$

Литература

1. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее применения. — Т. 2. — М.: Мир, 1984. — С. 381–382.
2. *Цикон Х., Фрезе Р., Кирш И., Саймон Б.* Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. — М.: Мир, 1990. — 406 с.
3. *Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. — М.: Наука, 1978.
4. *Stoler D.* Equivalence classes of minimum uncertainty packets // Phys. Rev. D. — 1970. — V. 1, N 12. — P. 3217–3219.
5. *Dodonov V.V.* «Nonclassical» states in quantum optics: a «squeezed» review of the first 75 years // J. Opt. B. — 2002. — V. 4, N 1. — P. R1—R33.

Поступила в редакцию 07.09.2011.