УДК 514.113

Н.О. Ермилов

Институт системного анализа РАН

Тетраэдры с одинаковым набором длин рёбер и объёмом, вписанные в одну сферу

Восстановление тетраэдра по заданному набору длин рёбер зависит от распределения этих длин по рёбрам тетраэдра. В качестве других характеристик, которые в совокупности с длинами рёбер могут однозначно определить тетраэдр, рассматриваются объём и радиус описанной сферы. Однако существуют пример, когда по этим восьми параметрам тетраэдр определяется неоднозначно.

Ключевые слова: тетраэдр, набор длин рёбер, объём, радиус описанной сферы.

Проблема распознавания равных симплексов связана с поиском общих геометрических характеристик, равенство которых позволит доказать изоморфизм симплексов [1]. Естественно в качестве общих характеристик выбирать длины рёбер симплекса. Однако для симплексов в R^3 (тетраэдров) равенство наборов длин рёбер ещё не обеспечивает их конгруэнтность. Другими наиболее естественными геометрическими характеристиками, связанными с тетраэдром, являются радиус описанной сферы и объём. Попытки автора доказать символьно конгруэнтность тетраэдров с данным набором длин рёбер, объёмом и радиусом описанной сферы не привели к положительному результату, но зато удалось построить контрпример, который приводится в данной работе.

Утверждение. Существуют неконгруэнтные тетраэдры с одинаковым набором длин рёбер и объёмом, вписанные в одну сферу. □

Будем считать, что нам задано конкретное распределение положительных чисел l_i $(1 \leqslant i \leqslant 6)$ по рёбрам тетраэдра (см. рис. 1).

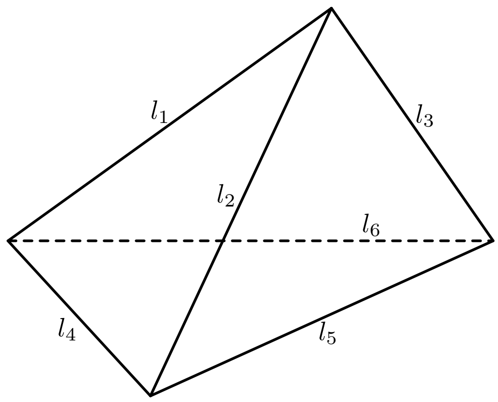

Рис. 1

Выпишем для этого распределения формулы для вычисления объёма (V) и радиуса описанной сферы (R) [2] и [3]:

$$36 \cdot V^2 \cdot R^2 = Q \cdot (Q - l_1 \cdot l_5) \cdot (Q - l_2 \cdot l_6) \cdot (Q - l_3 \cdot l_4),$$

$$\begin{aligned}144 \cdot V^2 = {} & l_1^2 \cdot l_5^2 \cdot (l_2^2 + l_6^2 + l_3^2 + l_4^2 - l_5^2 - l_1^2) + \\ & + l_2^2 \cdot l_6^2 \cdot (l_3^2 + l_4^2 + l_1^2 + l_5^2 - l_2^2 - l_6^2) + \\ & + l_3^2 \cdot l_4^2 \cdot (l_1^2 + l_5^2 + l_2^2 + l_6^2 - l_3^2 - l_4^2) - \\ & - l_1^2 \cdot l_2^2 \cdot l_4^2 - l_2^2 \cdot l_3^2 \cdot l_5^2 - l_1^2 \cdot l_3^2 \cdot l_6^2 - l_4^2 \cdot l_5^2 \cdot l_6^2,\end{aligned}$$

где $Q = \dfrac{l_1 \cdot l_5 + l_2 \cdot l_6 + l_3 \cdot l_4}{2}$.

Теперь поменяем местами рёбра l_1 и l_2. Будем считать, что для рассматриваемых нами распределений соответствующие значения объёмов и радиусов совпадают. В результате такого сопоставления получаются 2 полиномиальные связи на длины рёбер тетраэдра. После упрощения и разложения на множители получается следующая система уравнений:

$$\begin{cases} (l_1^2 - l_2^2) \cdot (l_5^2 - l_6^2) \times \\ \times (l_1^2 \cdot l_5^2 + l_2^2 \cdot l_5^2 + l_1^2 \cdot l_6^2 + l_2^2 \cdot l_6^2 - 2 \cdot l_3^2 \cdot l_4^2) = 0, \\ (l_1^2 - l_2^2) \cdot (l_5^2 - l_6^2) \times \\ \qquad \times (l_5^2 + l_6^2 + l_1^2 + l_2^2 - l_4^2 - 2 \cdot l_3^2) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим все варианты совместимости полученной системы уравнений.

$l_1 = l_2$ (остальные рёбра произвольны).

Так как именно эти рёбра менялись местами, то получаются конгруэнтные тетраэдры.

$l_5 = l_6 = c$ (остальные рёбра произвольны).

В данном случае получаются конгруэнтные тетраэдры (см. рис. 2).

Действительно, у таких тетраэдров есть грань, построенная на отрезках c, c, l_4. Кроме того, у каждого тетраэдра есть ровно по одной вершине, из которой выходят рёбра l_1, l_2, l_3. Таким образом, существует движение, переводящее один тетраэдр в другой.

Совместна следующая система уравнений:

$$\begin{cases} l_1^2 \cdot l_5^2 + l_2^2 \cdot l_5^2 + l_1^2 \cdot l_6^2 + l_2^2 \cdot l_6^2 - 2 \cdot l_3^2 \cdot l_4^2 = 0, \\ l_5^2 + l_6^2 + l_1^2 + l_2^2 - l_4^2 - 2 \cdot l_3^2 = 0. \end{cases}$$

Приведём систему к следующему виду:

$$\begin{cases} (l_1^2 + l_2^2) \cdot (l_5^2 + l_6^2) = 2 \cdot l_3^2 \cdot l_4^2, \\ (l_1^2 + l_2^2) + (l_5^2 + l_6^2) = l_4^2 + 2 \cdot l_3^2. \end{cases}$$

Теперь воспользуемся леммой.

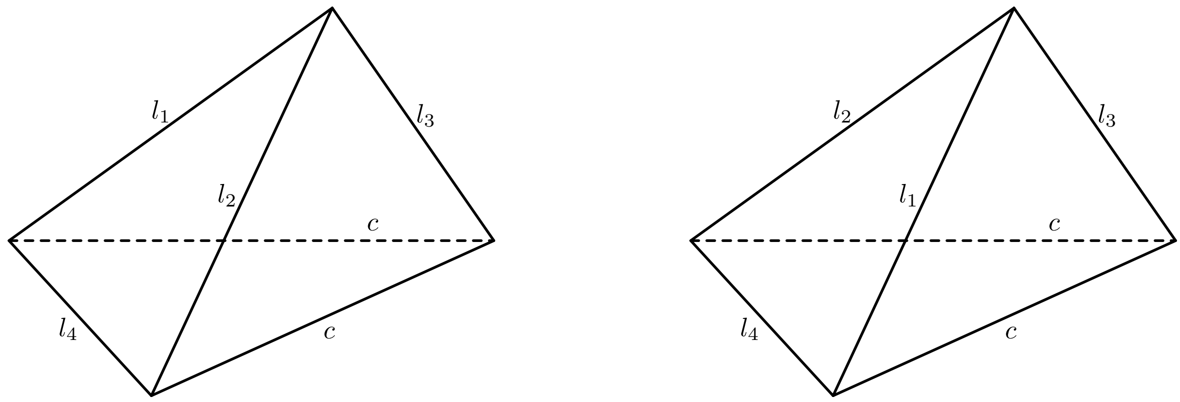

Рис. 2

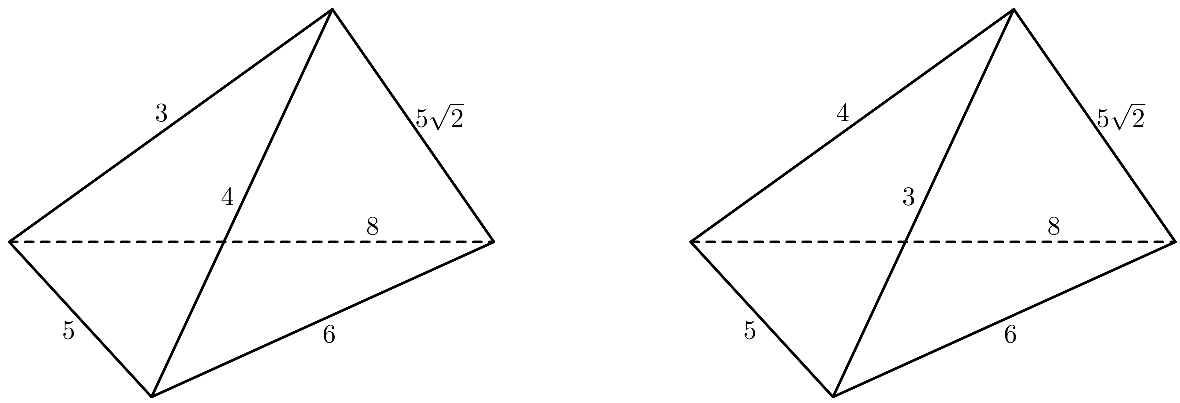

Рис. 3

Лемма. Пусть нам даны числа m, n, p, q, между которыми существует связь:

$$\begin{cases} m+n=p+q, \\ m\cdot n=p\cdot q. \end{cases}$$

Тогда наборы чисел $\{m,n\}$ и $\{p,q\}$ совпадают. □

Доказательство. Действительно, по теореме Виета эти наборы чисел являются корнями одного и того же квадратного уравнения, поэтому множества совпадают.

Таким образом, полученная нами система уравнений имеет две серии решений:

$$\left(\begin{array}{c} l_1^2+l_2^2=l_4^2 \\ l_5^2+l_6^2=2\cdot l_3^2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c} l_5^2+l_6^2=l_4^2 \\ l_1^2+l_2^2=2\cdot l_3^2 \end{array}\right).$$

Возьмём для рассмотрения первое решение (второе решение рассматривается аналогично). Придавая рёбрам l_1, l_2, l_5, l_6 конкретные числовые значения ($l_1=3$, $l_2=4$, $l_5=6$, $l_6=8$), получаем два неконгруэнтных тетраэдра (см. рис. 3).

Тетраэдры с такими длинами рёбер действительно существуют, так как для них выполнены условия реализуемости тетраэдров с данной метрикой и данным комбинаторным строением [4]: выполнение строгого неравенства треугольника для граней и положительность квадрата объёма.

В заключение приводится вычисленное значение объёма и радиуса описанной сферы построенных неконгруэнтных тетраэдров:

$$V=\frac{5\cdot\sqrt{203}}{6}\approx 11.873;$$

$$R=\frac{5\cdot\sqrt{203}\cdot\sqrt{527}}{406}\approx 4.028.$$

Литература

1. *Протасов В.Ю.* Изоморфизм графов и равенство симплексов // Математические заметки. – 2009. – Вып. 85, № 5. – С. 758–767.

2. *Сабитов И.Х.* Объёмы многогранников. – М.: МЦНМО, 2002.

3. *Берже М.* Геометрия. Т. 1 / пер. с франц. – М.: Мир, 1984.

4. *Blumenthal L.M.* Theory and applications of distance geometry. – Oxford: Oxford University Press, 1970.

Поступила в редакцию 22.01.2011