

Московский физико-технический институт (ГУ)
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Контрольная работа №3, вариант 1

1. Выведите в исчислении предикатов формулу

$$\forall x(A(x) \rightarrow (B(x) \rightarrow C(x))) \rightarrow ((\exists xA(x) \wedge \forall xB(x)) \rightarrow \exists xC(x)).$$

2. Кто выигрывает в игре Эренфойхта для интерпретаций $\langle [0, 1]^2, \leq_{stand} \rangle$ и $\langle [0, 1]^3, \leq_{stand} \rangle$? Какова выигрышная стратегия? ($(x_1, x_2) \leq_{stand} (y_1, y_2)$, если $x_1 \leq y_1$ и $x_2 \leq y_2$; $(x_1, x_2, x_3) \leq_{stand} (y_1, y_2, y_3)$, если $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$ и $x_3 \leq y_3$).

3. Докажите, что формула $\Box(p \wedge \Diamond q) \rightarrow (\Diamond p \wedge \Diamond q)$ общезначима в шкалах Крипке, обладающих свойствами транзитивности и «серийности» (из каждого мира выходит хотя бы одна стрелка). Может ли она быть общезначимой в какой-то нетранзитивной шкале?

4. Рассмотрим пропозициональную эквивалентность $(A \rightarrow \neg B) \leftrightarrow \neg(A \wedge B)$. В какую сторону она верна в интуиционистской логике? Выведите импликацию в эту сторону в интуиционистском исчислении высказываний и постройте контрмодель Крипке для импликации в обратную сторону.

5*. Спектром теории с равенством называется множество мощностей всех её конечных нормальных моделей. Постройте теорию, спектром которой является множество $\{x \in \mathbb{N} \mid x \equiv 1 \pmod{4} \text{ или } x \equiv 2 \pmod{4}\}$.

6*. Докажите, что формула $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1, x_1) \wedge (P(x_1, x_3) \rightarrow (P(x_1, x_2) \vee P(x_2, x_3)))) \rightarrow \exists y \forall z P(y, z)$ истинна в любой конечной интерпретации, но не общезначима.

Московский физико-технический институт (ГУ)
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Контрольная работа №3, вариант 2

1. Выведите в исчислении предикатов формулу

$$\forall x(A(x) \rightarrow (B(x) \rightarrow C(x))) \rightarrow ((\forall xA(x) \wedge \exists xB(x)) \rightarrow \exists xC(x)).$$

2. Кто выигрывает в игре Эренфойхта для интерпретаций $\langle \{a, b\}^*, \sqsubset \rangle$ и $\langle \{a, b, c\}^*, \sqsubset \rangle$? Какова выигрышная стратегия? (Σ^* — множество всех слов, составленных из символов алфавита Σ , через \sqsubset обозначено отношение «быть началом»).

3. Докажите, что формула $(\Box p \vee \Box q) \rightarrow \Diamond(p \vee \Box q)$ общезначима в шкалах Крипке, обладающих свойствами транзитивности и «серийности» (из каждого мира выходит хотя бы одна стрелка). Может ли она быть общезначимой в какой-то нетранзитивной шкале?

4. Рассмотрим пропозициональную эквивалентность $\neg(A \rightarrow B) \leftrightarrow (A \wedge \neg B)$. В какую сторону она верна в интуиционистской логике? Выведите импликацию в эту сторону в интуиционистском исчислении высказываний и постройте контрмодель Крипке для импликации в обратную сторону.

5*. Спектром теории с равенством называется множество мощностей всех её конечных нормальных моделей. Постройте теорию, спектром которой является множество $\{x \in \mathbb{N} \mid x \equiv 2 \pmod{4} \text{ или } x \equiv 3 \pmod{4}\}$.

6*. Докажите, что формула $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (P(x_1, x_1) \wedge (P(x_1, x_3) \rightarrow (P(x_1, x_2) \vee P(x_2, x_3)))) \rightarrow \exists z \forall y P(y, z)$ истинна в любой конечной интерпретации, но не общезначима.