УДК 517.9

Е.С. Половинкин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Интегрирование по Риману многозначных отображений*

В работе получены новые результаты об интегрировании по Риману на отрезке многозначных отображений с невыпуклыми компактными значениями из равномерно гладкого банахова пространства. Показано, что интеграл Римана на отрезке от такого отображения является выпуклым компактом. Получены общие свойства интеграла Римана. Найдены необходимые и достаточные условия интегрируемости по Риману невыпуклозначного многозначного отображения со значениями в сепарабельном равномерно гладком банаховом пространстве. Эти условия состоят в том, что выпуклая оболочка значений отображения должна быть непрерывной почти всюду.

Ключевые слова: сумма множеств Минковского, метрика Хаусдорфа, интеграл Римана многозначного отображения, равномерно гладкое банахово пространство, необходимые и достаточные условия интегрируемости по Риману.

I. Введение

Проблему интегрирования многозначных отображений $F : T \to 2^E$ исследовали многие ученые, начиная со второй половины двадцатого века. В случае, когда пространство E является конечномерным евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, основное признание получило понятие интеграла Аумана (R.J. Aumann) [1] как совокупности значений от всех интегрируемых по Лебегу ветвей многозначного отображения. Такой подход был обоснован рядом хороших свойств этого интеграла, в первую очередь тем, что его значение является выпуклым и компактным множеством в $\mathbb{R}^n$. Имеется целый ряд работ, развивающих и обобщающих результаты Аумана (см., например, [2–6]), в том числе для случая, когда пространство E является банаховым (см., например, [7, 8]).

В данной работе автор развивает свои результаты [9–12], основанные на другом подходе к определению интеграла от многозначного отображения с компактными значениями, опирающийся на частичную линейность совокупности подмножеств из банахова пространства, получаемую использованием понятия суммы множеств по Минковскому. Такой подход позволяет развивать классическое понятие интеграла Римана на случай многозначного отображения. В работе обобщаются результаты, полученные автором ранее для случая многозначных отображений с компактными значениями из $\mathbb{R}^n$, на случай отображений с компактными значениями из равномерно гладких банаховых пространств. Показано, в частности, что в таких банаховых пространствах интеграл Римана на отрезке, определяемый как предел римановых сумм от ограниченного невыпуклозначного отображения, является выпуклым компактом. Доказаны необходимые и достаточные условия интегрируемости невыпуклозначного многозначного отображения со значениями в сепарабельном равномерно гладком банаховом пространстве.

II. Определения и вспомогательные результаты

Через 2^E обозначаем множество всех подмножеств из банахова пространства E, через $\mathcal{K}(E)$ — множество всех непустых компактов из банахова пространства E, через $\operatorname{co}\mathcal{K}(E)$ — совокупность всех выпуклых подмножеств из $\mathcal{K}(E)$. Если задан компакт $X \in \mathcal{K}(E)$, то через $\mathcal{K}(X)$ обозначаем совокупность всех непустых компактов из E, которые содержатся в X.

Алгебраической суммой (иначе называемой суммой Минковского) непустых множеств A и B из банахова пространства E называется множество $A + B = \{x|\ x \in E,\ x = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$. *Произведением множества* $A \subset E$, $A \neq \varnothing$, *на число* $\lambda \in \mathbb{R}^1$ называется множество $\lambda A = \{x \in E|\ x = \lambda a,\ a \in A\}$. *Полунормой множества* $A \in E$ называется число $\|A\| \doteq \sup\{\|a\||\ a \in A\}$.

В пространстве $\mathcal{K}(E)$ можно определить *расстояние* между двумя компактами $A, B \in \mathcal{K}(E)$, которое задается *метрикой Хаусдорфа*:

$$h(A,B) \doteq \inf\{r \geqslant 0 \mid A \subset B + B_r(0),\ B \subset A + B_r(0)\}, \quad (2.1)$$

где $B_r(a) \doteq \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$ — открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in E$.

Пусть в банаховом пространстве E задано замкнутое множество A. Пусть E^* — пространство, сопряженное к пространству E.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-01-00139а и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России».

Опорной функцией множества A называется скалярная функция $s(p, A)$ аргумента $p \in E^*$, определяемая равенством

$$s(p, A) \doteq \sup\{\langle p, x\rangle \mid x \in A\}, \tag{2.2}$$

где $\langle p, x\rangle$ — значение линейного функционала p в точке x.

Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность замкнутых множеств из банахова пространства E, содержащихся в некотором ограниченном подмножестве пространства E. Совокупность всех точек $x \in E$, для каждой из которых найдется последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in A_k$, такая, что $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$, называется *нижним пределом последовательности* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ и обозначается $\liminf\limits_{k\to\infty} A_k$.

Модулем гладкости банахова пространства E называется функция ϱ: $[0, +\infty) \to [0, +\infty)$ вида

$$\varrho(\tau) \doteq \left\{ \left\| \frac{x+y}{2} \right\| + \left\| \frac{x-y}{2} \right\| - 1 \mid x, y \in E, \; \|x\| = 1, \|y\| = \tau \right\}. \tag{2.3}$$

В силу определения модуль гладкости $\varrho(\cdot)$ является выпуклой возрастающей функцией, причем $\varrho(\tau) \leqslant \tau$ при всех $\tau \geqslant 0$.

Банахово пространство E называется *равномерно гладким*, если его модуль гладкости является o-малым от τ при $\tau \to +0$, т.е. $\lim\limits_{\tau\to+0} \frac{\varrho(\tau)}{\tau} = 0$.

Примерами равномерно гладких банаховых пространств являются гильбертовы пространства, пространства Лебега $L_p[a, b]$ при $p > 1$ и другие (о равномерно гладких пространствах см, например, [13]).

В силу монотонности модуля гладкости пространства E для функции $\varrho(\cdot)$ из (2.3) существует ее обратная функция $\varrho^{-1}(\cdot)$, причем в случае, когда пространство E является равномерно гладким, очевидно, справедливы выражения

$$\lim_{\tau\to+0} \frac{\tau}{\varrho^{-1}(\tau)} = 0, \quad \lim_{\tau\to+0} \varrho^{-1}(\tau) = 0. \tag{2.4}$$

Для обоснования основных результатов нам потребуется следующая теорема об усреднении множеств, являющаяся обобщением аналогичной теоремы из [11], полученной для гильбертовых пространств. Данное обобщение получено мною совместно с Г.М. Ивановым и представлено к печати в [14].

Теорема 2.1 (об усреднении). Пусть в равномерно гладком банаховом пространстве E задано выпуклое ограниченное замкнутое множество X. Пусть A_k^p, где $k \in \mathbb{N}$, $p \in \overline{(1,k)}$, — двухпараметрическое счётное семейство (невыпуклых) замкнутых подмножеств множества X. Определим множества $D_k \doteq \frac{1}{k}\sum\limits_{p=1}^{k} A_k^p$ и $\widetilde{D_k} \doteq \frac{1}{k}\sum\limits_{p=1}^{k} \overline{\mathrm{co}} A_k^p$ при $k \in \mathbb{N}$.

1) Тогда множество $D \doteq \liminf\limits_{k\to\infty} D_k$, если оно не пусто, будет выпуклым замкнутым множеством из E.
2) Если последовательность $\{D_k\}$ сходится в метрике Хаусдорфа, то и последовательность $\{\widetilde{D_k}\}$ также сходится, причем к тому же пределу. $\square$

Доказательство. Из условия следуют включения $D_k \subset X$ $\forall k \in \mathbb{N}$ и $D \subset X$, а также то, что рассматриваемые множества A_k^p, как подмножества X, ограничены в совокупности по полунорме, т.е. существует число $\alpha < +\infty$ такое, что $\|A_k^p\| \leqslant \alpha$ при любых k, p.

1. Множества D_k и непустое (по условию) множество $D \doteq \liminf\limits_{k\to\infty} D_k$ очевидно являются замкнутыми множествами. Покажем выпуклость множества D, т.е. покажем, что для всякой пары точек x, y из D и всякого числа $\lambda \in [0, 1]$ точка $z \doteq \lambda x + (1-\lambda) y$ также принадлежит множеству D. По определению нижнего предела для выбранных точек $x, y \in D$ существуют последовательности точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \in D_k$, $y_k \in D_k$ такие, что $x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$ и $y = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$. В свою очередь, для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ найдутся точки $x_k^p \in A_k^p$, $y_k^p \in A_k^p$ при $p \in \overline{(1,k)}$ такие, что справедливы равенства $x_k = \frac{1}{k}(x_k^1 + \dots + x_k^k)$, $y_k = \frac{1}{k}(y_k^1 + \dots + y_k^k)$.

Построим последовательность точек $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $z_k \in D_k$ вида $z_k = \frac{1}{k}(z_k^1 + \dots + z_k^k)$, где точки $z_k^p \in A_k^p$ в паре со вспомогательными точками $S_k^p \in E$ будем вычислять по формулам:

$$S_k^0 \doteq 0,$$

$$z_k^p = \begin{cases} x_k^p, \text{если} \left\| S_k^{p-1} + y_k^p - x_k^p \right\| \leqslant \left\| S_k^{p-1} + x_k^p - y_k^p \right\|, \\ y_k^p, \text{если} \left\| S_k^{p-1} + y_k^p - x_k^p \right\| > \left\| S_k^{p-1} + x_k^p - y_k^p \right\|, \end{cases}$$

$$S_k^p = S_k^{p-1} + (\lambda x_k^p + (1-\lambda) y_k^p - z_k^p) \quad \forall\, p \in \overline{(1,k)}.$$

При этом при выборе $z_k^p = x_k^p$ получаем равенство $S_k^p = S_k^{p-1} + (1-\lambda)(y_k^p - x_k^p)$, из которого очевидно следует оценка

$$\|S_k^p\| \leqslant \max\{\|S_k^{p-1}\|, \|S_k^{p-1} + y_k^p - x_k^p\|\},$$

а при выборе $z_k^p = y_k^p$ получаем равенство $S_k^p = S_k^{p-1} + \lambda(x_k^p - y_k^p)$, из которого следует оценка

$$\|S_k^p\| \leqslant \max\{\|S_k^{p-1}\|, \|S_k^{p-1} + x_k^p - y_k^p\|\}.$$

В итоге получаем общую оценку

$$\|S_k^p\| \leqslant \max\{\|S_k^{p-1}\|, \min\{\|S_k^{p-1} + y_k^p - x_k^p\|, \|S_k^{p-1} + x_k^p - y_k^p\|\}\}. \tag{2.5}$$

По определению модуля гладкости $\varrho(\cdot)$ (см. (2.3)) в случае, когда $S_k^{p-1} \neq 0$, справедливо неравенство

$$\left\| \frac{S_k^{p-1}}{\|S_k^{p-1}\|} + \frac{y_k^p - x_k^p}{\|S_k^{p-1}\|} \right\| + \left\| \frac{S_k^{p-1}}{\|S_k^{p-1}\|} + \frac{x_k^p - y_k^p}{\|S_k^{p-1}\|} \right\| \leqslant \leqslant 2\left(1 + \varrho\left(\frac{\|y_k^p - x_k^p\|}{\|S_k^{p-1}\|}\right)\right),$$

откуда (и учитывая, что $\|y_k^p - x_k^p\| \leqslant 2\alpha$) получаем

$$\min\left\{\left\|\frac{S_k^{p-1}}{\|S_k^{p-1}\|} + \frac{y_k^p - x_k^p}{\|S_k^{p-1}\|}\right\|, \left\|\frac{S_k^{p-1}}{\|S_k^{p-1}\|} + \frac{x_k^p - y_k^p}{\|S_k^{p-1}\|}\right\|\right\} \leqslant$$
$$\leqslant 1 + \varrho\left(\frac{2\alpha}{\|S_k^{p-1}\|}\right). \quad (2.6)$$

В итоге из выражений (2.5) и (2.6) получаем, что для любых $p \in \overline{(2,k)}$, при которых $S_k^{p-1} \neq 0$, справедливы неравенства

$$\|S_k^p\| \leqslant \|S_k^{p-1}\|\left(1 + \varrho\left(\frac{2\alpha}{\|S_k^{p-1}\|}\right)\right). \quad (2.7)$$

Кроме того, для любого $p \in \overline{(2,k)}$:

$$\|S_k^p\| \leqslant \|S_k^{p-1}\| + 2\alpha. \quad (2.8)$$

Определим числовую последовательность $a_k \doteq \dfrac{2\alpha}{\varrho^{-1}(\frac{1}{k})}$ при всех $k \in \mathbb{N}$, где $\varrho^{-1}(\cdot)$ — обратная функция к модулю гладкости. В силу (2.4) получаем, что

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = +\infty, \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{k} = 0. \quad (2.9)$$

Поэтому найдется номер k_0 такой, что $a_k > 2\alpha$ при всех $k \geqslant k_0$, т. е., в частности, получаем оценку

$$\|S_k^1\| \leqslant 2\alpha < a_k \quad \forall\, k \geqslant k_0. \quad (2.10)$$

Для всякого $k \geqslant k_0$ докажем оценку $\|S_k^k\| \leqslant 2ea_k$. Если $\|S_k^k\| \leqslant a_k$, то требуемое неравенство очевидно верно. Пусть $\|S_k^k\| > a_k$. Тогда согласно (2.10) существует номер $m \geqslant 1$, $m < k$, такой, что справедливы неравенства $\|S_k^p\| > a_k$ при всех $p = k,\ k-1,\ \ldots,\ m+1$, но $\|S_k^m\| \leqslant a_k$. Поэтому в силу неравенств (2.6), (2.7) и определения a_k получаем

$$\|S_k^k\| \leqslant \|S_k^{k-1}\|\left(1 + \varrho\left(\frac{2\alpha}{\|S_k^{k-1}\|}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \|S_k^{k-1}\|\left(1 + \varrho\left(\frac{2\alpha}{a_k}\right)\right) =$$
$$= \|S_k^{k-1}\|\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \|S_k^{k-2}\|\left(1 + \frac{1}{k}\right)^2 \leqslant \ldots$$
$$\leqslant \|S_k^{m+1}\|\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k-m-1} \leqslant$$
$$\leqslant (\|S_k^m\| + 2\alpha)\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k-m-1} < 2a_k\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k-m-1} < 2a_k e.$$

Согласно полученной оценке для любого $k \geqslant k_0$ имеем

$$\|\lambda x_k + (1-\lambda)y_k - z_k\| = \frac{1}{k}\,\|S_k^k\| < 2e\,\frac{a_k}{k}\,,$$

откуда и из (2.9) следует, что построенная последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $z_k \in D_k$, сходится к точке $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, то есть $z \in D$. Выпуклость множества D доказана.

2. По построению получаем равенство $\widetilde{D_k} = \overline{\mathrm{co}} D_k$. По доказанному выше множество $D = \lim\limits_{k\to+\infty} D_k$ является выпуклым множеством. Отсюда и из очевидного неравенства $h(\widetilde{D_k}, D) = h(\overline{\mathrm{co}} D_k, \overline{\mathrm{co}} D) \leqslant h(D_k, D)$ получаем, что $D = \lim\limits_{k\to+\infty} \widetilde{D_k}$. Теорема доказана. ■

Пусть T, Y — произвольные множества. *Многозначным отображением* F множества T во множество Y называется такое соответствие, когда каждой точке $t \in T$ сопоставляется некоторое (возможно пустое) подмножество $F(t) \subset Y$, называемое значением отображения F в точке t. Такое многозначное отображение будем записывать в виде $F\colon T \to 2^Y$.

Если значения многозначного отображения F, т. е. множества $F(t)$ при всех $t \in T$ замкнуты, компактны или выпуклы и компактны в E, то будем записывать соответственно в виде $F\colon T \to \mathcal{F}(E)$, $F\colon T \to \mathcal{K}(E)$ и $F\colon T \to \mathrm{co}\,\mathcal{K}(E)$.

Отображение $F\colon T \to \mathcal{K}(E)$ называется *компактно ограниченным*, если существует выпуклый компакт $X \subset E$ такой, что $F(t) \in \mathcal{K}(X)\ \ \forall\, t \in T$.

Отображение $F\colon T \to \mathcal{K}(E)$ называется *непрерывным в точке* $t_0 \in T$ *в метрике Хаусдорфа*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(t_0)$ точки t_0 такая, что для всех $t \in U(t_0)$ справедливо неравенство $h(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$.

Теорема 2.2. Пусть T — топологическое пространство, X — выпуклый компакт из равномерно гладкого банахова пространства E, и число $\gamma < +\infty$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\nu = \nu(\varepsilon, X) > 0$ такое, что для любого конечного набора точек $\{\xi_i\}_{i\in I} \subset T$, для любого конечного набора положительных чисел $\{\lambda_i\}_{i\in I}$, таких, что $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i = 1$ и $\max\{\lambda_i \mid i \in I\} < \nu$, а также для любых многозначных отображений $G : T \to \mathrm{co}\,\mathcal{K}(X)$ и $F\colon T \to \mathcal{K}(X)$, удовлетворяющих оценке

$$h(G(t), \mathrm{co}\, F(t)) < \gamma \quad \forall\, t \in T, \quad (2.11)$$

справедливо неравенство

$$h\left(\sum_{i\in I} G(\xi_i)\lambda_i,\ \sum_{i\in I} F(\xi_i)\lambda_i\right) < \gamma + \varepsilon. \quad \square \quad (2.12)$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что для любого конечного набора положительных чисел $\{\lambda_i\}_{i\in I}$, таких, что $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i = 1$, и любого конечного набора точек $\{\xi_i\}_{i\in I} \subset T$ и любой пары многозначных отображений G, F, удовлетворяющих условиям теоремы (неравенству (2.11)), справедливы включения

$$\begin{aligned} &\sum_{i\in I} F(\xi_i)\lambda_i \subset \sum_{i\in I} G(\xi_i)\lambda_i + B_\gamma(0); \\ &\sum_{i\in I} G(\xi_i)\lambda_i \subset \sum_{i\in I} \mathrm{co}\, F(\xi_i)\lambda_i + B_\gamma(0). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Допустим, что неравенство (2.12) не верно. Тогда, учитывая первое включение в (2.13), получаем, что найдутся: 1) число $\varepsilon_0 > 0$, а также для каждого $k \in \mathbb{N}$, 2) пара многозначных отображений

G_k, F_k, удовлетворяющих оценке (2.11), 3) конечный набор номеров $I_k \doteq \{1, 2, \ldots, m_k\} \subset \mathbb{N}$, точек $\{\xi_i^k\}_{i \in I_k} \subset T$ и положительных чисел $\{\lambda_i^k\}_{i \in I_k}$, удовлетворяющих условиям $\sum\limits_{i \in I_k} \lambda_i^k = 1$ и $\max\{\lambda_i^k \mid i \in I_k\} < \frac{1}{k}$, для которых при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливы выражения

$$Q_k \not\subset D_k + (\gamma + \varepsilon_0)\overline{B_1(0)},$$

$$\text{где } Q_k \doteq \sum_{i=1}^{m_k} G_k(\xi_i^k)\lambda_i^k, \; D_k \doteq \sum_{i=1}^{m_k} F_k(\xi_i^k)\lambda_i^k. \quad (2.14)$$

Так как по условию отображения G_k, F_k ограничены на T, а именно: $G_k(t) \subset X$ и $F_k(t) \subset X$ при всех $t \in T$, то и все множества Q_k и D_k, где $k \in \mathbb{N}$, ограничены, точнее $Q_k \subset X$ и $D_k \subset X$. В силу свойства компактности подпространства $\mathcal{K}(X)$, состоящего из компактов, содержащихся в заданном компакте X, из последовательностей $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить сходящиеся в метрике Хаусдорфа подпоследовательности. Без ограничения общности полагаем, что последовательности $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходятся в $\mathcal{K}(X)$ к некоторым компактам $Q \in \operatorname{co}\mathcal{K}(X)$ и $D \in \mathcal{K}(X)$ соответственно. Поэтому из (2.14) в пределе получаем, что

$$Q \not\subset D + \overline{B_\gamma(0)}. \quad (2.15)$$

С другой стороны, из второго включения в (2.13) получаем, что $Q_k \subset \operatorname{co} D_k + B_\gamma(0)$. Учитывая к тому же то, что последовательность $\{\operatorname{co} D_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к $\operatorname{co} D$ в $\mathcal{K}(X)$, в пределе получаем включение

$$Q \subset \operatorname{co} D + B_\gamma(0). \quad (2.16)$$

Выражения (2.15) и (2.16) возможны лишь в случае, когда $D \neq \operatorname{co} D$. Покажем, что это не так, откуда допущение о несправедливости неравенства (2.12) будет опровергнуто. Перегруппируем слагаемые в каждом D_k в (2.14) так, чтобы получить новый вид: $D_k = \dfrac{A_k^1 + \cdots + A_k^k}{k}$. Для этого полагаем

$$A_k^p \doteq k \cdot \sum_{i=r_{p-1}+1}^{r_p} F_k(\xi_i^k)\lambda_i^k \quad \forall p \in \overline{(1, k)},$$

где натуральные числа $r_0 = 0 < r_1 < r_2 < \cdots < r_k = m_k$ таковы, что справедливы неравенства $\sum\limits_{i=1}^{r_p} \lambda_i^k \leqslant \frac{p}{k} < \sum\limits_{i=1}^{r_p+1} \lambda_i^k$ при любом $p \in \overline{(1, k-1)}$. Так как по построению $\max\{\lambda_i^k \mid i \in I_k\} < \frac{1}{k}$, то такие числа r_p, где $p \in \overline{(1, k-1)}$, существуют, причём справедлива оценка $A_k^p \subset X$. Осталось применить теорему 2.1 об усреднении, из которой следует, что $D = \operatorname{co} D$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. Пусть T — топологическое пространство, X — выпуклый компакт из равномерно гладкого банахова пространства E. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\nu = \nu(\varepsilon, X) > 0$ такое, что для любого многозначного отображения $F\colon\ T \to \mathcal{K}(X)$, любого конечного набора точек $\{\xi_i\}_{i \in I} \subset T$ и для любого конечного набора положительных чисел $\{\lambda_i\}_{i \in I}$, таких, что $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i = 1$ и $\max\{\lambda_i \mid i \in I\} < \nu$, справедливо неравенство

$$h\left(\sum_{i \in I} (\operatorname{co} F(\xi_i))\lambda_i, \; \sum_{i \in I} F(\xi_i)\lambda_i\right) < \varepsilon. \quad \square \; (2.17)$$

III. Интеграл Римана на отрезке для отображений в $\mathcal{K}(E)$

Всюду считаем, что E — равномерно гладкое банахово пространство. Так как в метрическом пространстве $\mathcal{K}(E)$ были введены операции сложения и умножения на действительное число, то мы вправе ввести интеграл Римана на отрезке для отображений $F\colon\ [a, b] \to \mathcal{K}(E)$, как и для функций, через предел конечных сумм вида (см. [15–17]):

$$\sum_{i=1}^{m} F(\xi_i)\Delta t_i, \text{ где } \xi_i \in [t_{i-1}, t_i], \; \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad (3.1)$$
$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b.$$

Однако пространство $\mathcal{K}(E)$ не является линейным и нормированным. Это не позволяет воспользоваться формально теорией интегрирования по Риману функций со значениями в банаховом пространстве, хотя общую схему рассуждений [18] в какой-то мере можно сохранить (ср. [5, 9]).

Для построения интеграла Римана на отрезке, как обычно, потребуется ввести понятие разбиения отрезка.

Римановым разбиением (или просто: разбиением) отрезка $[a, b]$ называется конечная совокупность интервалов $\omega([a, b]) \doteq \{T_1, T_2, \ldots, T_{m_\omega}\}$, где $T_i \doteq (t_{i-1}, t_i)$, и $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{m_\omega} = b$, причем точки t_i, $i \in \overline{(0, m)}$, будем называть *точками разбиения* $\omega([a, b])$. *Диаметром разбиения* $\omega([a, b])$ называется величина $|\omega([a, b])| \doteq \max\{|T_i| \mid i \in \overline{(1, m_\omega)}\}$, где $|T_i| \doteq t_i - t_{i-1}$.

Определение 3.1. Отображение $F\colon\ [a, b] \to \mathcal{K}(E)$ называется *ступенчатым*, если существует такое риманово разбиение $\omega([a, b])$ отрезка $[a, b]$, что на каждом из интервалов $T_i \in \omega([a, b])$ отображение F постоянно.

Указанное в определении 3.1 ступенчатого отображения разбиение $\omega([a, b])$ называется *допустимым* для ступенчатого отображения F.

Будем различать ступенчатые отображения не только по их значениям, но и по выбору допустимого разбиения.

Определение 3.2. Пара $(\omega([a, b]), F)$, где $F\colon\ [a, b] \to \mathcal{K}(E)$ — ступенчатое отображение, а $\omega([a, b])$ — допустимое для этого отображения разбиение отрезка $[a, b]$, называется *ступенчатой парой*.

Определение 3.3. *Предынтегралом Римана ступенчатой пары* $(\omega([a, b]), F)$, где $F\colon\ [a, b] \to$

$\to \mathcal{K}(E)$, называется множество

$$\int\limits_{[a,b]} (\omega([a,b]), F)\, dt \doteq \sum_{i=1}^{m_\omega} F(\xi_i)|T_i|, \quad \xi_i \in T_i, \quad (3.2)$$

где $\omega([a,b]) \doteq \{T_1, T_2, \ldots, T_{m_\omega}\}$.

Легко увидеть, что при отсутствии выпуклости значений $F(t)$ для одного и того же ступенчатого отображения F, выбирая различные допустимые разбиения в формуле (3.2), можем получить разные значения сумм.

В свою очередь, если ступенчатое отображение F принимает лишь выпуклые значения, то формула (3.2) дает один и тот же результат при любом выборе допустимых разбиений. В частности, для ступенчатого отображения $F : [a,b] \to \mathcal{K}(E)$ можно корректно определить интеграл от выпуклозначного ступенчатого отображения $\operatorname{co} F$ по формуле

$$\int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F\, dt \equiv \sum_{i=1}^{m_\omega} \operatorname{co} F(\xi_i)|T_i|, \quad \xi_i \in T_i, \quad (3.3)$$

где $\omega([a,b]) \doteq \{T_1, T_2, \ldots, T_{m_\omega}\}$ — любое допустимое разбиение отображения F.

В силу данной формулы (3.3) интеграл от выпуклой оболочки ступенчатого отображения как конечная сумма выпуклых компактов есть выпуклый компакт в E, и для ступенчатых отображений F, G: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$, очевидно, справедливы равенства ($\alpha \in \mathbb{R}^1$):

$$\int\limits_{[a,b]} \alpha(\operatorname{co} F)\, dt = \alpha \int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F\, dt,$$
$$\int\limits_{[a,b]} (\operatorname{co} F + \operatorname{co} G)\, dt = \int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F\, dt + \int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} G\, dt. \quad (3.4)$$

Из формулы (3.3) для ступенчатого отображения F: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$, очевидно, следует равенство опорных функций

$$s(p, \int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F\, dt) = \int\limits_{[a,b]} s(p, F)\, dt \quad \forall\, p \in \mathbb{R}^n. \quad (3.5)$$

Если рассматривать ступенчатую функцию f: $[a,b] \to E$, то определение интеграла Римана для неё очевидным образом получается из формулы (3.3), если многозначное отображение таково, что каждое его значение состоит из одной точки $F(\xi_i) = \{f(\xi_i)\}$.

Следуя [18], получаем, что для вещественной ограниченной функции $f \geqslant 0$ на отрезке $[a,b]$ *верхним интегралом* Римана $\int\limits_{[a,b]}^{*} f dt$ этой функции f называется число

$$\int\limits_{[a,b]}^{*} f\, dt = \inf\Bigg\{ \int\limits_{[a,b]} g\, dt \mid g : [a,b] \to \mathbb{R}^1 \text{ — ступенчатая, } g \geqslant f \Bigg\}.$$

Определение 3.4. Отображение F: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ называется *интегрируемым по Риману на* $[a,b]$, если оно компактно ограничено, т. е. существует компакт $X \in \operatorname{co}\mathcal{K}(E)$ такой, что $F(t) \in \mathcal{K}(X)$ $\forall\, t \in [a,b]$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует такая ступенчатая пара $(\omega([a,b]), G)$, где $|\omega([a,b])| < \varepsilon$, а отображение G: $[a,b] \to \mathcal{K}(X)$ таково, что справедливо неравенство $\int\limits_{[a,b]}^{*} h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} G)\, dt \leqslant \varepsilon$.

Определение 3.4 эквивалентно существованию последовательности ступенчатых пар $\{(\omega_k([a,b]), F_k)\}$, где F_k: $[a,b] \to \mathcal{K}(X)$, $k \in \mathbb{N}$, для которых последовательности диаметров $\{|\omega_k([a,b])|\}$ и верхних интегралов $\{\int\limits_{[a,b]}^{*} h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} F_k)\, dt\}$ сходятся к нулю при $k \to \infty$. Такая последовательность пар $\{(\omega_k([a,b]), F_k)\}_{k=1}^{\infty}$ называется *аппроксимирующей последовательностью ступенчатых пар* для интеграла Римана на отрезке $[a,b]$ отображения F.

Лемма 3.1. Пусть $X \in \operatorname{co}\mathcal{K}(E)$. Компактно ограниченное отображение F: $[a,b] \to \mathcal{K}(X)$ интегрируемо по Риману тогда и только тогда, когда для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует ступенчатая пара $(\omega([a,b]), G)$, где отображение G: $[a,b] \to \mathcal{K}(X)$, и ступенчатая функция λ: $[a,b] \to \mathbb{R}_+$ такие, что справедливы оценки $|\omega([a,b])| < \varepsilon$, $h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} G) \leqslant \lambda$ и $\int\limits_{[a,b]} \lambda\, dt \leqslant \varepsilon$. □

Теорема 3.1. Пусть F: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ — интегрируемое по Риману отображение и $\{(\omega_k([a,b]), F_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — его аппроксимирующая последовательность ступенчатых пар. Тогда в пространстве $\mathcal{K}(E)$ существует предел последовательности прединтегралов $\Big\{\int\limits_{[a,b]} (\omega_k([a,b]), F_k)\, dt\Big\}_{k=1}^{\infty}$, являющийся выпуклым компактом, и этот предел не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности ступенчатых пар. □

Доказательство. При любых $m, k \in \mathbb{N}$ для ступенчатых отображений $\operatorname{co} F_m$ и $\operatorname{co} F_k$ выберем общее допустимое разбиение отрезка $[a,b]$, и в силу соотношения (3.3), получаем

$$h\left(\int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F_m\, dt, \int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F_k\, dt\right) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{[a,b]} h(\operatorname{co} F_m, \operatorname{co} F_k)\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{[a,b]}^{*} h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} F_m)\, dt + \int\limits_{[a,b]}^{*} h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} F_k)\, dt.$$

Отсюда следует, что при m и k, стремящихся к бесконечности, величина $h\left(\int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F_m\, dt, \int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F_k dt\right)$

стремится к нулю. Следовательно, последовательность интегралов $\left\{\int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F_k dt\right\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальна и, в силу полноты метрического пространства $\mathcal{K}(E)$, эта последовательность имеет предел в $\operatorname{co}\mathcal{K}(E)$.

Отметим, что все отображения F_k компактно ограничены в совокупности. В силу (3.2), (3.3) получаем равенства

$$h\left(\int\limits_{[a,b]} (\omega_k([a,b]), F_k)\, dt, \int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F_k\, dt\right) = \\ = (b-a)h\left(\sum_{i=1}^{m_{\omega_k}} F_k(\xi_i^k)\lambda_i^k, \sum_{i=1}^{m_{\omega_k}} \operatorname{co} F_k(\xi_i^k)\lambda_i^k\right), \tag{3.6}$$

где $\lambda_i^k \doteq \dfrac{|T_i^k|}{b-a}$.

Поэтому и по следствию 2.1 для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\nu = \nu(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех номеров k, для которых $|\omega_k([a,b])| < (b-a)\nu$, величина (3.6) не превосходит числа $(b-a)\varepsilon$. Так как по условию $\lim\limits_{k\to+\infty} |\omega_k([a,b])| = 0$, то последовательность значений (3.6) стремится к нулю.

Это означает, что предел последовательности предынтегралов $\left\{\int\limits_{[a,b]} (\omega_k([a,b]), F_k)\, dt\right\}_{k=1}^{\infty}$ существует и равен пределу последовательности интегралов $\left\{\int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F_k\, dt\right\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. выпуклому компакту.

Рассмотрим две аппроксимирующие F последовательности ступенчатых пар $\{(\omega_k([a,b]), F_k)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{(\omega'_k([a,b]), G_k)\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда последовательность пар $(\omega_1([a,b]), F_1)$, $(\omega'_1([a,b]), G_1)$, $(\omega_2([a,b]), F_2)$, $(\omega'_2([a,b]), G_2)$, $\ldots$, $(\omega_k([a,b]), F_k)$, $\omega'_k([a,b]), G_k)$, $\ldots$, очевидно, также будет аппроксимирующей. Поэтому последовательность $\int\limits_{[a,b]} (\omega_1([a,b]), F_1)\, dt$, $\int\limits_{[a,b]} (\omega'_1([a,b]), G_1)\, dt$, $\int\limits_{[a,b]} (\omega_2([a,b]), F_2)\, dt$, $\int\limits_{[a,b]} (\omega'_2([a,b]), G_2)\, dt$, $\ldots$ должна иметь предел. Это и означает, что последовательности $\left\{\int\limits_{[a,b]} (\omega_k([a,b]), F_k)\, dt\right\}_{k=1}^{\infty}$, $\left\{\int\limits_{[a,b]} (\omega'_k([a,b]), G_k)\, dt\right\}_{k=1}^{\infty}$ имеют один общий предел. Теорема доказана.

Определение 3.5. Значение предела, указанного в теореме 3.1, называется *интегралом Римана интегрируемого отображения* F: $[a,b] \to \to \mathcal{K}(E)$ и обозначается через $\int\limits_a^b F(t)\, dt$, $\int\limits_{[a,b]} F\, dt$, или $(R) \int\limits_{[a,b]} F\, dt$.

Следствие 3.1. Пусть отображение F: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ интегрируемо по Риману, тогда и отображение $\operatorname{co} F$: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ интегрируемо по Риману, причем интегралы Римана от них равны между собой (т.е. справедливо равенство)

$$\int\limits_{[a,b]} F\, dt = \int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F\, dt. \qquad \square \tag{3.7}$$

Доказательство очевидно в силу доказательства теоремы, причем если $\{(\omega_k([a,b]), F_k)\}_{k=1}^{\infty}$ есть некоторая аппроксимирующая последовательность ступенчатых пар для F, то $\{(\omega_k([a,b]), \operatorname{co} F_k)\}_{k=1}^{\infty}$ будет аппроксимирующей последовательностью ступенчатых пар для $\operatorname{co} F$ и, как показано в теореме, пределы последовательностей интегралов от них совпадают.

Следствие 3.2. Пусть отображение F: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ является ступенчатым. Тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{[a,b]} F\, dt = \sum_{i=1}^{m_\omega} \operatorname{co} F(\xi_i)|T_i|, \quad \xi_i \in T_i, \tag{3.8}$$

где $\omega([a,b]) \doteq \{T_1, T_2, \ldots, T_{m_\omega}\}$ — любое допустимое разбиение отображения F. $\square$

Теорема 3.2. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^1$, а F, G: $[a,b] \to \to \mathcal{K}(E)$ — два интегрируемых по Риману отображения, тогда αF и $F + G$ также интегрируемы по Риману и для них справедливы формулы

$$\int\limits_{[a,b]} \alpha F\, dt = \alpha \int\limits_{[a,b]} F\, dt, \\ \int\limits_{[a,b]} (F+G)\, dt = \int\limits_{[a,b]} F\, dt + \int\limits_{[a,b]} G\, dt. \qquad \square \tag{3.9}$$

Доказательство. Равенство для αF в (3.9) очевидно. Пусть теперь $\{(\omega_k([a,b]), F_k)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{(\omega'_k([a,b]), G_k)\}_{k=1}^{\infty}$ — аппроксимирующие последовательности ступенчатых пар для отображений F и G соответственно. В силу неравенства $h(\operatorname{co}(F+G), \operatorname{co}(F_k+G_k)) \leqslant h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} F_k) + + h(\operatorname{co} G, \operatorname{co} G_k)$ получаем, что последовательность ступенчатых пар $\{(\widetilde{\omega}_k([a,b]), F_k + G_k)\}_{k=1}^{\infty}$, где разбиение $\widetilde{\omega}_k([a,b])$ содержит все точки разбиений $\omega_k([a,b])$ и $\omega'_k([a,b])$, будет аппроксимирующей для отображения $F+G$. Из правого равенства в (3.7), взятого для отображений F_k и G_k, и в силу непрерывности операции алгебраической суммы Минковского в пределе получаем нижнее равенство в (3.9) для отображений F и G.

Следствие 3.3. Пусть выбраны числа $a, b, c \in \in \mathbb{R}^1$, причем $a < b < c$. Отображение F: $[a,c] \to \to \mathcal{K}(E)$ интегрируемо по Риману на $[a,c]$ тогда и только тогда, когда оно интегрируемо по Риману как на $[a,b]$, так и на $[b,c]$. При этом справедливо равенство

$$\int\limits_{[a,c]} F\, dt = \int\limits_{[a,b]} F\, dt + \int\limits_{[b,c]} F\, dt. \qquad \square \tag{3.10}$$

Доказательство. Для произвольного множества A определим характеристическую функцию этого множества по формуле

$$\chi_A(t) \doteq \begin{cases} 1, & \text{если } t \in A, \\ 0, & \text{если } t \notin A. \end{cases}$$

Пусть отображение F интегрируемо по Риману на отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$, тогда на отрезке $[a,c]$ интегрируемы отображения $F \cdot \chi_{[a,b]}$ и $F \cdot \chi_{(b,c]}$, причем из равенства $F = F \cdot \chi_{[a,b]} + F \cdot \chi_{(b,c]}$ и теоремы 3.2 следует интегрируемость по Риману отображения F на отрезке $[a,c]$ и равенство (3.10). Обратно, пусть F интегрируемо по Риману на отрезке $[a,c]$ и пусть $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ — его аппроксимирующая последовательность и последовательность $\overset{*}{\int\limits_{[a,c]}} h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} F_k)\,dt$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Тогда очевидно существуют и стремятся к нулю последовательности интегралов $\overset{*}{\int\limits_{[a,b]}} h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} F_k)\,dt$ и $\overset{*}{\int\limits_{[b,c]}} h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} F_k)\,dt$, т.е. отображение F интегрируемо по Риману на отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$.

Теорема 3.3. Пусть отображения F и G: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ интегрируемы по Риману. Тогда интегрируема по Риману функция $h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} G)$: $[a,b] \to \mathbb{R}^1_+$ и справедливо неравенство

$$h\left(\int\limits_{[a,b]} F\,dt, \int\limits_{[a,b]} G\,dt\right) \leqslant \int\limits_{[a,b]} h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} G)\,dt. \quad \square \quad (3.11)$$

Доказательство. Пусть $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ — аппроксимирующие последовательности отображений F и G соответственно. Тогда последовательности $\{\operatorname{co} F_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\operatorname{co} G_k\}_{k=1}^{\infty}$ являются аппроксимирующими для отображений $\operatorname{co} F$ и $\operatorname{co} G$ соответственно. Из этого и из неравенства $|h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} G) - h(\operatorname{co} F_k, \operatorname{co} G_k)| \leqslant h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} F_k) + h(\operatorname{co} G, \operatorname{co} G_k)$ следует стремление к нулю числовой последовательности $\left\{ \overset{*}{\int\limits_{[a,b]}} |h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} G) - h(\operatorname{co} F_k, \operatorname{co} G_k)|\,dt \right\}$ при $k \to \infty$. Таким образом, последовательность ступенчатых функций g_k, где $g_k(t) \doteq h(\operatorname{co} F_k(t), \operatorname{co} G_k(t))$, является аппроксимирующей для функции $f(t) \doteq h(\operatorname{co} F(t), \operatorname{co} G(t))$. Поэтому эта функция f интегрируема по Риману и $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} h(\operatorname{co} F_k, \operatorname{co} G_k)\,dt = \int\limits_{[a,b]} h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} G)\,dt$. Кроме того, по аналогии с доказательством теоремы 3.1 на общем допустимом для ступенчатых отображений $\operatorname{co} F_k$ и $\operatorname{co} G_k$ разбиении получаем неравенство

$$h\left(\int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} F_k\,dt, \int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} G_k\,dt\right) \leqslant \int\limits_{[a,b]} h(\operatorname{co} F_k, \operatorname{co} G_k)\,dt.$$

Переходя к пределу по $k \to \infty$, в силу равенства (3.7) получаем неравенство (3.11).

Следствие 3.4. Пусть F: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ интегрируемо по Риману. Тогда справедливо неравенство $\| \int\limits_{[a,b]} F\,dt\| \leqslant \int\limits_{[a,b]} \|F\|\,dt$. $\square$

Доказательство следует из (3.11) и определения полунормы ограниченного множества, положив при этом, что $G(t) \equiv \{0\}$ при всех $t \in [a,b]$.

Теорема 3.4. Пусть отображение F: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ интегрируемо по Риману. Тогда при любом $p \in E^*$ опорная функция $s(p,F)$: $[a,b] \to \mathbb{R}^1$ также интегрируема по Риману и справедливо равенство

$$s\left(p, \int\limits_{[a,b]} F\,dt\right) = \int\limits_{[a,b]} s(p,F)\,dt \quad \forall\, p \in E^*. \quad \square \quad (3.12)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.3. Пусть $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная аппроксимирующая последовательность для F и вектор $p \in E^*$ зафиксирован. В силу свойств хаусдорфовой метрики (см., например, [19]) справедливо неравенство $|s(p,F) - s(p,F_k)| \leqslant \|p\| h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} F_k)$, откуда числовая последовательность $\overset{*}{\int\limits_{[a,b]}} |s(p,F) - s(p,F_k)|\,dt$ стремится к нулю при $k \to \infty$. Следовательно, последовательность функций $\{s(p,F_k)\}_{k=1}^{\infty}$ является аппроксимирующей для функции $s(p,F)$, т.е. функция $t \to s(p,F(t))$ интегрируема по Риману и справедливо равенство $\int\limits_{[a,b]} s(p,F)\,dt = \lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_{[a,b]} s(p,F_k)\,dt$. В силу непрерывности опорной функции как функции множества, а также в силу равенства (3.5) для каждого отображения $\operatorname{co} F_k$, получаем в пределе равенство (3.5) для отображения F, откуда в силу равенства (3.7) получаем (3.12).

Следствие 3.5. Пусть отображения F и G: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ интегрируемы по Риману и удовлетворяют условию: $F(t) \subset G(t)$ при всех $t \in [a,b]$. Тогда справедливо включение

$$\int\limits_{[a,b]} F\,dt \subset \int\limits_{[a,b]} G\,dt. \qquad \square$$

Доказательство. Из условия следует, что для любого $p \in E^*$ справедливы неравенства $s(p,F(t)) \leqslant s(p,G(t))$ при всех $t \in [a,b]$, что по свойствам интегрируемых функций влечёт неравенство для интегралов $\int\limits_{[a,b]} s(p,F)\,dt \leqslant \int\limits_{[a,b]} s(p,G)\,dt$. По теореме 3.4 получаем неравенство $s\left(p, \int\limits_{[a,b]} F\,dt\right) \leqslant s\left(p, \int\limits_{[a,b]} G\,dt\right)$. Отсюда в силу произвольности $p \in E^*$, выпуклости интегралов Римана (теорема 3.1) и свойств опорных функций (см, например, [19]) получаем искомое включение для многозначных интегралов.

Покажем наконец, что в равномерно гладком банаховом пространстве E интеграл Римана может быть представлен как предел интегральных сумм Римана (3.1).

Лемма 3.2. Пусть число $\gamma < +\infty$, множества $X \in \operatorname{co}\mathcal{K}(E)$, $Q \in \operatorname{co}\mathcal{K}(X)$ и отображение F: $[\alpha,\beta] \to \mathcal{K}(X)$ (где $\alpha < \beta$) таковы, что

$$h(Q, \operatorname{co} F(t)) \leqslant \gamma \quad \forall\, t \in [\alpha,\beta]. \tag{3.13}$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого разбиения $\omega([\alpha,\beta]) = \{t_0, t_1, \ldots, t_{m_\omega}\}$ отрезка $[\alpha,\beta]$ с диаметром $|\omega([\alpha,\beta])| = \max\{t_i - t_{i-1} \mid i \in (\overline{1,m_\omega})\} \leqslant \eta$ и при любом выборе точек $\xi_i \in [\alpha,\beta]$, $i \in (\overline{1,m_\omega})$, справедливо неравенство

$$h\left(Q,\ \sum_{i=1}^{m_\omega}\left(F(\xi_i)\,\frac{t_i - t_{i-1}}{\beta-\alpha}\right)\right) \leqslant \gamma + \varepsilon. \ \square \tag{3.14}$$

Доказательство. Данная лемма является простым следствием теоремы 2.2, в которой следует выбрать $T \doteq [\alpha,\beta]$; $G(t) \equiv Q$; $\lambda_i \doteq \frac{t_i - t_{i-1}}{\beta-\alpha}$. По указанной в теореме 2.2 функции $\nu(\varepsilon)$ выбрать $\eta(\varepsilon) \leqslant \nu(\varepsilon)(\beta-\alpha)$.

Теорема 3.5. Пусть отображение F: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ интегрируемо по Риману. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, обладающее следующим свойством: для любого разбиения $\omega([a,b]) = \{t_0, t_1, \ldots, t_{m_\omega}\}$ отрезка $[a,b]$, диаметр которого не превосходит числа δ, и при любом выборе точек $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$ справедливо неравенство

$$h\left(\int\limits_{[a,b]} F\,dt, \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i)\Delta t_i\right) \leqslant \varepsilon. \qquad \square \tag{3.15}$$

Доказательство. Пусть в силу компактной ограниченности F множество $X \in \operatorname{co}\mathcal{K}(E)$ таково, что F: $[a,b] \to \mathcal{K}(X)$. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$. По лемме 3.1 существуют ступенчатые отображение G: $[a,b] \to \mathcal{K}(X)$ и функция λ: $[a,b] \to \mathbb{R}_+$ такие, что $h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} G) \leqslant \lambda$ и $\int\limits_{[a,b]} \lambda\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Обозначим через $y_0 = a < y_1 < \cdots < y_N = b$ точки разбиения $\omega^0([a,b])$, являющегося общим допустимым для ступенчатых отображения G и функции λ.

Обозначим $\Delta y_s \doteq y_s - y_{s-1}$, а через G_s и λ_s — соответствующие значения $\operatorname{co} G(t)$ и $\lambda(t)$ при $t \in (y_{s-1}, y_s)$, $s \in (\overline{1,N})$. Так как справедливо неравенство $h(G_s, \operatorname{co} F(t)) \leqslant \lambda_s$ при $t \in (y_{s-1}, y_s)$, то по лемме 3.2 для числа $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ найдётся число $\eta(\varepsilon_1) > 0$ такое, что для всякого разбиения отрезка $[y_{s-1}, y_s]$ с диаметром, не превосходящим числа $\eta(\varepsilon_1)$, и при любом выборе точек $\xi_j^s \in (y_{s-1}, y_s)$ справедливы неравенства

$$h(G_s\Delta y_s, \sum_{j=1}^{m_s} F(\xi_j^s)\Delta t_j^s) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{\varepsilon}{4(b-a)} + \lambda_s\right)\Delta y_s \quad \forall\, s \in (\overline{1,N}). \tag{3.16}$$

Покажем, что $\delta \doteq \min\{\frac{\varepsilon}{8\|X\|N}, \eta(\varepsilon_1)\}$ обладает необходимым свойством, дающим (3.15). В самом деле, пусть $\omega([a,b]) = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a,b]$, причем $\max\{t_i - t_{i-1} \mid i \in (\overline{1,m})\} \leqslant \delta$. Пусть выбраны произвольные точки $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Через $\omega^*([a,b]) \doteq \{t_0^*, t_1^*, \ldots, t_k^*\}$ обозначим такое разбиение отрезка $[a,b]$, которое получится объединением всех точек разбиений $\omega^0([a,b])$ и $\omega([a,b])$. Тогда точки $\{\xi_j^*\}_{j=1}^k$ определим из равенства $\xi_j^* = \xi_i$, где $i \in (\overline{1,m})$ такое, что $[t_{i-1}, t_i] \supset [t_{j-1}^*, t_j^*]$. Обозначим $\Delta t_j^* \doteq t_j^* - t_{j-1}^*$ и $\Delta t_i \doteq t_i - t_{i-1}$. Оценим искомое расстояние (3.15) следующим образом:

$$h\left(\int\limits_{[a,b]} F\,dt, \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i)\Delta t_i\right) \leqslant$$
$$\leqslant h\left(\int\limits_{[a,b]} F\,dt, \int\limits_{[a,b]} G\,dt\right) +$$
$$+h\left(\int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} G\,dt, \sum_{j=1}^{k} F(\xi_j^*)\Delta t_j^*\right) +$$
$$+h\left(\sum_{j=1}^{k} F(\xi_j^*)\Delta t_j^*, \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i)\Delta t_i\right). \tag{3.17}$$

По теореме 3.3 получаем

$$h\left(\int\limits_{[a,b]} F\,dt, \int\limits_{[a,b]} G\,dt\right) \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{[a,b]} h(\operatorname{co} F, \operatorname{co} G)\,dt \leqslant \int\limits_{[a,b]} \lambda\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Суммируя неравенства (3.16) по s, получаем

$$h\left(\int\limits_{[a,b]} \operatorname{co} G\,dt, \sum_{j=1}^{k}(F(\xi_j^*)\Delta t_j^*)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{s=1}^{N}\left(\frac{\varepsilon}{4(b-a)} + \lambda_s\right)\Delta y_s = \frac{\varepsilon}{4} + \int\limits_{[a,b]} \lambda\,dt \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Множество $\sum\limits_{i=1}^{m} F(\xi_i)\Delta t_i$ отличается от множества $\sum\limits_{j=1}^{k} F(\xi_j^*)\Delta t_j^*$ лишь по тем слагаемым i, для которых интервалы (t_{i-1}, t_i) содержат точки из разбиения $\omega^0([a,b])$. Для любого номера $s \in (\overline{0,N})$ обозначим через $j(s)$ такой номер от 0 до k, при котором $y_s = t_{j(s)}^*$, где $y_s \in \omega^0([a,b])$, $t_{j(s)}^* \in \omega^*([a,b])$. Пусть $S^* \doteq \{s \in (\overline{1,N}) \mid y_s \notin \omega([a,b])\}$. Для любого номера $s \in S^*$ найдётся номер $i(s) \in (\overline{1,m})$ такой, что $\Delta t_{i(s)} = \Delta t_{j(s)}^* + \Delta t_{j(s)+1}^*$ и $\xi_{i(s)} = \xi_{j(s)}^* =$

$= \xi^*_{j(s)+1}$. Учитывая это, для третьего слагаемого в (3.17) получаем оценку

$$h\left(\sum_{j=1}^{k} F(\xi_j^*)\Delta t_j^*, \sum_{i=1}^{m} F(\xi_i)\Delta t_i\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{s\in S^*} h\Big(F(\xi^*_{j(s)})\Delta t^*_{j(s)} + F(\xi^*_{j(s)+1})\Delta t^*_{j(s)+1},$$
$$F(\xi_{i(s)})\Delta t_{i(s)}\Big) \leqslant 2N\delta\|X\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Теорема доказана.

IV. Необходимые и достаточные условия интегрируемости по Риману

В этом параграфе полагаем, что E — сепарабельное банахово пространство, у которого E^* также является сепарабельным пространством.

Теорема 4.1. Для того чтобы компактно ограниченное отображение F: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ было интегрируемо по Риману, необходимо, чтобы отображение $\operatorname{co} F$ было непрерывно почти всюду на $[a,b]$. □

Доказательство. Пусть F интегрируемо по Риману на $[a,b]$, тогда по теореме 3.4 при всяком $p \in E^*$ функция $t \to s(p, F(t))$ интегрируема по Риману. По известному (см., например, [18]) условию интегрируемости по Риману функций из того, что для каждого $p \in E^*$, $\|p\| = 1$, функция $t \to \to s(p, F(t))$ интегрируема на $[a,b]$ по Риману, следует, что она непрерывна почти всюду. В свою очередь в сепарабельных пространствах это означает, что отображение $\operatorname{co} F$ непрерывно почти всюду на $[a,b]$. Теорема доказана.

Для доказательства достаточных условий интегрируемости по Риману определим два понятия *колебаний* отображения F: $\mathbb{R}^1 \to \mathcal{K}(E)$ на множестве $A \subset \mathbb{R}^1$ и в точке $t \in \mathbb{R}^1$ по следующим формулам:

$$\Omega(F;A) \doteq \sup\{h(F(t_1), F(t_2)) \mid t_1, t_2 \in A\}; \quad (4.1)$$
$$\Omega_F(t) \doteq \inf\{\Omega(F;(c,d)) \mid c, d \in \mathbb{R}^1, \quad c < t < d\}. \quad (4.2)$$

Очевидно, что отображение F: $\mathbb{R}^1 \to \mathcal{K}(E)$ непрерывно в точке $t_0 \in \mathbb{R}^1$ тогда и только тогда, когда $\Omega_F(t_0) = 0$.

Для любого $\delta > 0$ также определим на отрезке $T = [a,b]$ *множество*

$$I_\delta(F) = \{t \in T \mid \Omega_F(t) \geqslant \delta\}. \quad (4.3)$$

Легко показать, что множество $I_\delta(F)$ замкнуто.

Лемма 4.1. Для интегрируемости по Риману отображения F: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение $\omega_\varepsilon([a,b]) = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ отрезка $[a,b]$, при котором справедливо неравенство $\sum\limits_{i=1}^{k}(t_i - t_{i-1})\Omega_i \leqslant \varepsilon$, где $\Omega_i = \Omega(\operatorname{co} F, [t_{i-1}, t_i])$ (см. (4.1)). □

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы и $\omega_\varepsilon([a,b])$ — указанное там разбиение отрезка. Определим ступенчатые отображение G: $(a,b] \to \operatorname{co}\mathcal{K}(E)$ и функцию λ: $(a,b] \to \mathbb{R}^1_+$ так, что $G(t) = \operatorname{co} F(t_i)$ и $\lambda(t) = \Omega_i$ при всех $t \in (t_{i-1}, t_i]$, $i \in (\overline{1,k})$. Очевидно, что $h(G(t), \operatorname{co} F(t)) \leqslant \lambda(t)$ при $t \in (a,b]$. Кроме того, $\int\limits_{[a,b]} \lambda\, dt = \sum\limits_{i=1}^{k}(t_i - t_{i-1})\Omega_i \leqslant \leqslant \varepsilon$. В силу леммы 3.1 получаем, что отображение F интегрируемо по Риману.

Теорема 4.2. Пусть компактно ограниченное отображение F: $[a,b] \to \mathcal{K}(E)$ таково, что отображение $\operatorname{co} F$ непрерывно почти всюду на $[a,b]$. Тогда F интегрируемо по Риману на $[a,b]$. □

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $M \doteq \sup\{\|F(t)\| \mid t \in [a,b]\} \leqslant \|X\|$, $\Omega^* \doteq \Omega(\operatorname{co} F, [a,b])$ (см. (4.1)). Очевидно, что $\Omega^* \leqslant 2M < +\infty$. Пусть I^* — множество точек разрыва отображения $\operatorname{co} F$ на $[a,b]$. Согласно условию теоремы мера Лебега множества I^* равна нулю. Это значит, что для любого $\eta > 0$ множество I^* можно покрыть не более чем счётной системой открытых интервалов с суммарной длиной меньше η. Выбираем η таким, чтобы $\Omega^*\eta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Выберем число $\delta \doteq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ и рассмотрим множество точек $I_\delta(F)$ (см. (4.3)), колебание в которых не менее, чем данное δ. Так как $I_\delta(F) \subset I^*$, то множество $I_\delta(F)$ также покрывается этой системой интервалов. В силу компактности множества $I_\delta(F)$ выберем из указанной системы интервалов конечную совокупность интервалов, покрывающих $I_\delta(F)$, причём сумма их длин и подавно меньше η. Построим разбиение $\omega([a,b]) = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ отрезка $[a,b]$ такое, чтобы прежде всего в него входили все концы выделенного конечного множества интервалов, покрывающих $I_\delta(F)$. Кроме того, потребуем, чтобы оставшаяся вне этих интервалов часть отрезка $[a,b]$ была разбита точками из $\omega([a,b])$ на столь мелкие части $[t_{i-1}, t_i]$, чтобы колебание отображения $\operatorname{co} F$ на каждом из них не превышало δ. Для построенного разбиения $\omega([a,b])$ рассмотрим сумму вида $\sum\limits_{i=1}^{k}(t_i - t_{i-1})\Omega_i$, где $\Omega_i = \Omega(\operatorname{co} F, [t_{i-1}, t_i])$. Разобьём эту сумму на две группы слагаемых $\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$, где к первой из них отнесены индексы $i \in (\overline{1,k})$, для которых отрезки $[t_{i-1}, t_i]$ не содержит интервалы из конечного покрытия для $I_\delta(F)$, ко второму — остальные. Оценим каждое слагаемое:

$$\Sigma_1(t_i - t_{i-1})\Omega_i \leqslant \delta(b-a) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\Sigma_2(t_i - t_{i-1})\Omega_i \leqslant \Omega^*\eta \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу леммы 4.1 это означает интегрируемость F на $[a,b]$.

V. Заключение

В данной статье мы разобрали лишь простейший случай интеграла Римана от многозначного отображения на отрезке. Указанные результаты перенесены автором и на случай интеграла Римана от многозначного отображения, заданного на компактном топологическом пространстве с мерой, со значениями в пространстве компактов из равномерно гладкого банахова пространства. Показано, что в случае, когда мера, заданная на компакте, является непрерывной (неатомарной), то результаты получаются аналогичные случаю отрезка. Если же мера не является непрерывной, то интеграл Римана не обязан быть выпуклым компактом и условия интегрируемости по Риману многозначного отображения принимают другой вид. Эти и другие результаты будут описаны в моей книге «Многозначный анализ и дифференциальные включения», которую я планирую опубликовать в 2012 году.

Литература

1. *Aumann R.J.* Integrals of Set-valued Functions // J. Math. An. Appl. – 1965. – V. 12. – P. 1–12.

2. *Debreu G.* Integration of correspondences // Proc. of 5th Berkeley Symp. on Math. Statistics and Prob. – 1966. – V. 11, Part 1. – P. 351–372.

3. *Hukuhara M.* Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe // Publs. Res. Inst. Math. Sci. – 1968, B, N 16. – P. 205–223.

4. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач. – М.: Наука, 1974.

5. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. – М.: Мир, 1978.

6. *Olech, C.* Existence theorems for optimal control problems involving multiple integrals // J. Diff. Eq. – 1969. – N 6. – P. 512–526.

7. *Aubin, J.-P. and H. Frankovska.* Set-Valued Analisys. – Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 1990.

8. *Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. – М.: КомКнига, 2005. – 216 с.

9. *Polovinkin, E.S.* Riemannian Integral of Set-valued Function // Lecture Notes in Computer Science. – 1975. – V. 27. – P. 405–418.

10. *Половинкин Е.С.* Элементы теории многозначных отображений. – М.: Изд-во МФТИ, 1982.

11. *Половинкин Е.С.* Об интегрировании многозначных отображений // Докл. АН СССР. – 1983. – Т. 271, № 5. – С. 1069–1074.

12. *Половинкин Е.С.* Теория многозначных отображений. – М.: Изд-во МФТИ, 1983.

13. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. Избранные главы. – Киев: Вища школа, 1980; пер. с англ.: J. Diestel, Geometry of Banach spaces. Selected topics // Lecture Notes in Math., 485. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1975.

14. *Иванов Г.М., Половинкин Е.С.* Одно обобщение теоремы об усреднении множеств // Мат. сб. (в печати).

15. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх, 1 // Доклады АН СССР, 1967. – Т. 174, № 6. – С. 1276–1280.

16. *Понтрягин Л.С.* О линейных дифференциальных играх, 2 // Доклады АН СССР, 1967. – Т. 175, № 4, С. 764–766.

17. *Понтрягин Л.С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. Н.С. – 1980. – **112**, № 3. – С. 307–330.

18. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1, 2. – М.: Мир, 1972.

19. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2004 (первое изд.), 2007 (второе изд.).

Поступила в редакцию 17.01.2011