Московский физико-технический институт (ГУ)
Факультет инноваций и высоких технологий
Математическая логика и теория алгоритмов, осень 2012
Набор зачётных задач №1

Каждая задача оценивается исходя из 5 баллов. Набранные баллы суммируются с баллами за первую контрольную, но сумма за каждую задачу не может превышать 10. Каждая задача засчитывается, если на контрольной набрано меньше 8 баллов за задачу с тем же номером. Можно сдавать любой пункт, но каждый пункт засчитывается не более чем k_n студентам из группы n. (Значения k указаны отдельно для каждой задачи). Список «свободных» задач для каждой группы доступен по адресу `http://bit.ly/TlLFqr`.

1. ($k_{295} = 1$, $k_{294} = k_{296} = k_{297} = k_{299} = 2$) Верна ли теорема об однозначности разбора для следующих правил написания формул?

a) Переменная есть формула; если φ и ψ — формулы, то $|\varphi\psi$ — формула.
b) Переменная есть формула; если φ и ψ — формулы, то $|\varphi|\psi$ — формула.
c) Переменная есть формула; если φ, ψ и η — формулы, то $|\varphi|\psi|\eta$ — формула.
d) Переменная есть формула; если φ и ψ — формулы, то $|\varphi|\psi|$ — формула.
e) Переменная есть формула; если φ, ψ и η — формулы, то $|\varphi|\psi|\eta|$ — формула.
f) Переменная есть формула; если φ и ψ — формулы, то $|\varphi||\psi|$ — формула.
g) Переменная есть формула; если φ и ψ — формулы, то $|\varphi|\psi|$ и $|\varphi||\psi|$ — формулы.
h) Переменная есть формула; если φ и ψ — формулы, то $|\varphi|$ и $|\varphi\psi|$ — формулы.
i) Буква a есть формула; если φ — формула, то φb и $\varphi\overline{\varphi}$ — формулы. (Через $\overline{\varphi}$ обозначена φ, в которой все буквы a заменены на b, и наоборот).

2. ($k = 1$ для всех групп) Напишите таблицу истинности для следующих формул, приведите их к КНФ и ДНФ, а также напишите эквивалентный им многочлен Жегалкина.

a) $(((p \wedge \neg q) \vee r) \to ((r \to \neg p) \wedge q)) \wedge (\neg r \to p)$;
b) $(((\neg p \wedge r) \vee \neg q) \to ((r \to q) \wedge \neg p)) \to (p \wedge \neg r)$;
c) $((r \vee (p \to \neg q)) \to ((q \vee \neg p) \wedge r)) \wedge (q \to r)$;
d) $((\neg q \vee (p \to \neg r)) \to (\neg p \wedge (q \vee r))) \wedge (\neg q \to p)$;
e) $(((r \to p) \wedge \neg q) \vee (\neg r \wedge (q \to \neg p))) \to (\neg p \wedge q)$;
f) $(((p \vee r) \to \neg q) \vee (\neg r \to (\neg p \wedge q))) \to (r \wedge \neg p)$;
g) $((p \to (q \wedge \neg r)) \wedge ((q \to p) \vee r)) \to (\neg q \wedge r)$;
h) $(\neg(p \to (q \wedge \neg r)) \wedge (\neg q \vee (\neg p \wedge r))) \vee (r \wedge \neg q)$;
i) $(\neg(p \wedge (q \to \neg r)) \wedge (\neg r \to (p \wedge \neg q))) \vee (q \wedge \neg r)$.

3. ($k = 1$ для всех групп) Являются ли следующие наборы связок полными? Если нет, то докажите; если являются, то выразите через них штрих Шеффера (напишите полную формулу).

a) $\langle +, \to \rangle$;
b) $\langle \to, \mathrm{diff} \rangle$, где diff — функция трёх аргументов, истинная, если среди аргументов есть два различных;
c) $\langle /, \mathrm{eq} \rangle$, где x/y, если $\neg(x \to y)$, а eq — функция трёх аргументов, истинная, если все её аргументы одинаковы;
d) $\langle \leftrightarrow, \mathrm{diff} \rangle$;

e) $\langle 0, 1, \wedge, \mathrm{odd}\rangle$, где odd — функция трёх аргументов, истинная, если истинно нечётное число её аргументов;
f) $\langle 0, \mathrm{minor}\rangle$, где minor — функция трёх аргументов, принимающая то же значение, что и меньшинство аргументов;
g) $\langle 0, 1, \vee, \mathrm{odd}\rangle$;
h) $\langle \mathrm{eq}, \mathrm{even}\rangle$, где even — функция трёх аргументов, истинная, если истинно чётное число её аргументов;
i) $\langle 0, \neg, \leftrightarrow, \mathrm{odd}\rangle$;
j) $\langle 0, 1, \mathrm{maj}, \mathrm{odd}\rangle$, где maj — функция трёх аргументов, принимающая то же значение, что и большинство аргументов;
k) $\langle 1, \neg, +, \mathrm{even}\rangle$;

4. ($k = 1$ для всех групп) Не опирась на теорему о полноте, докажите выводимость в исчислении высказываний следующих формул. (Под эквивалентностью $\varphi \leftrightarrow \psi$ подразумевается сокращение $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$, можно использовать лемму о дедукции, правила вывода, сформулированные на лекциях, и формулы, выведенные на лекциях и семинарах).

a) $(A \to (\neg B \vee C)) \leftrightarrow ((A \to C) \vee (B \to C))$;
b) $(A \to (\neg B \vee C)) \leftrightarrow ((A \wedge B) \to C)$;
c) $(A \to (B \wedge C)) \leftrightarrow ((\neg B \vee \neg C) \to \neg A)$;
d) $((A \vee C) \wedge (B \vee C)) \leftrightarrow (\neg(A \to \neg B) \vee C)$;
e) $((A \wedge C) \vee (B \wedge C)) \leftrightarrow ((\neg A \to B) \wedge C)$;
f) $((A \wedge B) \vee C) \leftrightarrow ((\neg A \to C) \wedge (\neg B \to C))$;
g) $((A \vee B) \wedge C) \leftrightarrow \neg((A \to \neg C) \wedge (B \to \neg C))$;
h) $((A \vee B) \to C) \leftrightarrow ((\neg A \vee C) \wedge \neg(B \wedge \neg C))$;
i) $((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (\neg A \vee C \vee \neg(B \wedge \neg C))$;

5*. ($k = 2$ для всех групп)

a) Докажите, что любую монотонную функцию можно выразить через 0, 1, $\wedge$, $\vee$.
b) Докажите, что любую монотонную функцию можно выразить через 0, 1, maj.
c) Докажите, что любую самодвойственную функцию можно выразить через $\neg$ и maj.
d) Докажите, что любую самодвойственную функцию, сохраняющую 0 и 1, можно выразить через maj и $\oplus_3$, где $\oplus_3(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$.
e) Докажите, что любую монотонную самодвойственную функцию можно выразить через maj.
f) Опишите множество функций, которые можно выразить через even.
g) Докажите, что $\wedge$ нельзя выразить через $\vee$ и $\to$.
h) Докажите, что $\vee$ нельзя выразить через $\wedge$ и $\to$.
i) Классом T_1^∞ называется множество функций f, таких что для некоторого i выполнено $f(x_1, \ldots, x_n) \geqslant x_i$. Докажите, что если $f \in T_1^\infty$, то f можно выразить через импликацию.
j) Классом T_0^∞ называется множество функций f, таких что для некоторого i выполнено $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant x_i$. Докажите, что если $f \in T_0^\infty$, то f можно выразить через отрицание импликации.

6*. ($k = 3$ для всех групп)

a) Назовём формулу импликативной, если она состоит только из отрицаний и импликаций. Скажем, что формула φ является формулой с тесными отрицаниями, если все отрицания внутри φ стоят перед переменными. Любую ли функцию можно выразить импликативной формулой с тесными отрицаниями?

b) Верно ли, что любую функцию можно выразить формулой, в которой употребляются только отрицание, конъюнкция и дизъюнкция, при этом отрицание не стоит перед переменными, а во все (многоместные) конъюнкции и дизъюнкции входят разные подформулы. (Т.е. запрещены приёмы вроде замены $\neg p$ на $\neg(p \wedge p)$).

c) Говорят, что функция существенно зависит от переменной x_i, если можно так зафиксировать значения остальных переменных, что при $x_i = 0$ значение функции одно, а при $x_i = 1$ — другое. Докажите, что функция линейна тогда и только тогда, когда при фиксации значений части существенных переменных функция продолжает существенно зависеть от оставшихся (изначально) существенных переменных.

d) Докажите, что если две формулы, выраженные только через знаки $\neg$, $\vee$ и $\wedge$, эквивалентны, то они останутся эквивалентными, если заменить все знаки $\vee$ на $\wedge$, и наоборот.

e) Докажите, что если $A \to B$ есть тавтология, то найдётся формула C, зависящая только от переменных, общих для A и B, такая что $A \to C$ и $C \to B$ суть тавтологии.

f) Докажите, что формула, построенная из связок $\leftrightarrow$ и $\neg$, является тавтологией тогда и только тогда, когда каждая переменная, а также знак отрицания встречаются в ней чётное число раз.

g) Рассмотрим исчисление высказываний со схемами аксиом $A \to (B \to A)$, $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ и $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ и правилом вывода modus ponens. Заменим во всех формулах $A \wedge B$ на $\neg(A \to \neg B)$, а $A \vee B$ на $\neg A \to B$. Докажите, что после такой замены аксиомы 1–11 обычного исчисления высказываний выводимы в описанном.