Вопросы к экзамену по курсу “Теория вероятностей”

лектор — к.ф.-м.н. Д. А. Шабанов

осенний семестр 2011

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Простейшие свойства вероятностной меры. Теорема о непрерывности в “нуле” вероятностной меры.

2. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры. Геометрические вероятности. Пример использования геометрической вероятности: задача о встрече.

3. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Априорные и апостериорные вероятности событий. Формула Байеса.

4. Системы множеств: алгебры, σ-алгебры, π- и λ-системы. Лемма о π- и λ-системах. Лемма о существовании наименьшей алгебры (σ-алгебры, π- или λ-системы), порожденной произвольной системой подмножеств. Борелевские σ-алгебры в $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\infty$.

5. Теорема о монотонных классах. Следствие из нее.

6. Независимость конечного набора событий: попарная и в совокупности. Пример Бернштейна. Независимость конечного набора систем событий. Критерий независимости для конечного набора σ-алгебр. Независимость бесконечного набора систем событий.

7. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (б/д). Лемма о совпадении вероятностных мер на σ-алгебре. Доказательство единственности продолжения вероятностной меры в теореме Каратеодори.

8. Функция распределения вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, ее основные свойства. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ по функции распределения (только общая идея доказательства)

9. Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой. Примеры дискретных распределений: равномерное, биномиальное, пуассоновское. Примеры абсолютно непрерывных распределений: равномерное, нормальное, гамма. Пример сингулярного распределения: “канторова лестница”. Теорема Лебега (б/д).

10. Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Многомерная функция распределения, ее основные свойства. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ по функции распределения (б/д). Примеры многомерных функций распределения, плотность многомерного распределения. Теорема Колмогорова о продолжении меры на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ (б/д).

11. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Независимость случайных величин. Математическое ожидание случайной величины, его основные свойства. Дисперсия случайной величины, ковариация двух случайных величин. Основные свойства дисперсии и ковариации.

12. Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве. Достаточное условие измеримости отображения. Следствие для случайных величин и векторов: критерий измеримости отображений в $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

13. Действия над случайными величинами. Борелевские функции в $\mathbb{R}^n$, доказательство того, что борелевская функция от случайного вектора есть случайный вектор. Арифметические операции над случайными величинами, взятие пределов, максимумов и минимумов у последовательности случайных величин

14. Характеристики случайной величины и случайного вектора: распределение вероятностей, функция распределения, порожденная σ-алгебра. Классификация случайных величин: простые, дискретные, непрерывные, абсолютно непрерывные и сингулярные. Теорема о приближении случайной величины ξ простыми $\mathcal{F}_\xi$-измеримыми случайными величинами.

15. Математическое ожидание случайной величины: определение для простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Проверка корректности определений. Основные свойства математического ожидания для простых случайных величин.

16. Свойства математического ожидания в общем случае: линейность, сохранение отношения порядка, совпадение математических ожиданий при совпадении п.н. случайных величин.

17. Свойства математического ожидания в общем случае: следствие из равенства нулю $\mathsf{E}\xi$ для неотрицательной с.в. ξ, соотношения между случайными величинами при условии соотношений между математическими ожиданиями вида $\mathsf{E}(\xi\, I_A)$ для всех событий A. Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин.

18. Независимость произвольного набора случайных величин. Критерий независимости в терминах совместной функции распределения. Теорема о независимости борелевских функций от независимых случайных векторов.

19. Дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции. Основные свойства дисперсии и ковариации, неравенство Коши – Буняковского. Следствие для дисперсии суммы независимых случайных величин. Матрица ковариаций случайного вектора, ее неотрицательная определенность.

20. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышева. Неравенство Йенсена. Закон больших чисел в форме Чебышева.

21. Виды сходимости случайных величин: с вероятностью 1 (почти наверное), по вероятности, в среднем порядка $p > 0$, по распределению. Критерий сходимости с вероятностью 1. Теорема о взаимоотношении различных видов сходимостей.

22. Фундаментальность с вероятностью 1 последовательности случайных величин. Критерий Коши для сходимости с вероятностью 1. Неравенство Колмогорова. Теорема о сходимости почти наверное ряда из случайных величин.

23. Леммы Теплица и Кронекера. Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова – Хинчина для независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями.

24. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема о монотонной сходимости (б/д), лемма Фату, теорема Лебега о мажорируемой сходимости.

25. Лемма Бореля – Кантелли. Двухстороннее неравенство для математического ожидания для неотрицательной случайной величины.

26. Усиленный закон больших чисел Колмогорова для независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожиданием.

27. Математическое ожидание как интеграл Лебега по вероятностной мере. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега. Следствия из нее: формулы для вычисления математических ожиданий функций от случайной величины (вектора) с помощью распределения и плотности распределения.

28. Прямое произведение вероятностных пространств. Теорема Фубини (б/д). Совместное распределение независимых случайных величин как прямое произведение. Лемма о свертке распределений. Формула свертки для вычисления плотности суммы независимых случайных величин.

29. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер и функций распределения. Теорема Александрова (б/д). Теорема об эквивалентности слабой сходимости и сходимости в основном для вероятностных мер и соответствующих им функций распределения. Следствие для сходимости по распределению случайных величин.

30. Схема Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли: теорема Пуассона и теорема Муавра – Лапласа (б/д). Интерпретация теорем Пуассона и Муавра – Лапласа в терминах сходимости по распределению случайных величин.

31. Характеристические функции случайных величин, функций распределения и вероятностных мер. Многомерные характеристические функции. Основные свойства характеристических функций.

32. Теорема о производных характеристических функций. Разложение характеристической функции в ряд в окрестности нуля.

33. Теорема единственности для характеристических функций распределения на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Формула обращения для характеристических функций (б/д).

34. Критерий независимость компонент случайного вектора в терминах характеристических функций. Неотрицательная определенность комплекснозначных функций на прямой. Теорема Бохнера – Хинчина (только док-во необходимости).

35. Теорема непрерывности для характеристических функций (только док-во необходимости). Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин, следствия из нее. Теорема Берри–Эссеена об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме (б/д).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — 8-е изд. — М.: УРСС, 2005.

2. *Ширяев А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2004.

3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. — М.: Мир, 1984.

4. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — 2-е изд. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

5. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — 4-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2003.