УДК 519.8, 517.982.252

М. В. Балашов

Московский физико-технический институт (государственный университет)

Условие Липшица для наиболее удаленной точки в гильбертовом пространстве

В работе охарактеризованы выпуклые замкнутые множества в вещественном гильбертовом пространстве, для каждого из которых оператор метрического антипроектирования на множество (ставящий в соответствие точке пространства точки множества, наиболее удаленные от данной точки пространства) одноточечный и удовлетворяет условию Липшица на дополнении к некоторой окрестности данного множества. Получены точные оценки геометрических характеристик такого множества в зависимости от размера окрестности множества и константы Липшица оператора антипроектирования.

Ключевые слова: гильбертово пространство, сильно выпуклое множество с радиусом R, функция расстояния и антирасстояния, слабая выпуклость.

1. Введение и основные обозначения

Работа продолжает и развивает результаты работ [1, 2]. Через $\mathcal{H}$ обозначим *гильбертово* пространство над вещественным полем скаляров. Скалярное произведение векторов $p, x \in \mathcal{H}$ обозначим через (p, x). Определим $B_r(a) = \{x \in \mathcal{H} \mid \|x - a\| \leqslant r\}$. Для множества $A \subset \mathcal{H}$ через ∂A, $\operatorname{int} A$, $\operatorname{cl} A$ будем обозначать соответственно *границу, внутренность и замыкание* множества A. Опорной функцией множества A называется функция

$$s(p, A) = \sup_{a \in A}(p, a), \quad p \in \mathcal{H}.$$

Пусть задано множество $A \subset \mathcal{H}$. Тогда *функцию расстояния* от точки $x \in \mathcal{H}$ до множества A определим по формуле

$$\varrho_A(x) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Для множеств $A, B \subset \mathcal{H}$ *расстоянием в метрике Хаусдорфа* называется число

$$\begin{aligned} h(A, B) = &\\ &= \inf\{r > 0 \mid A \subset B + B_r(0),\ B \subset A + B_r(0)\} = \\ &= \max\left\{\sup_{a \in A} \varrho_B(a),\ \sup_{b \in B} \varrho_A(b)\right\}. \end{aligned}$$

Определим окрестность множества $A \subset \mathcal{H}$ радиуса $\delta > 0$ по формуле

$$U_A(\delta) = \{x \in \mathcal{H} \mid \varrho_A(x) < \delta\}.$$

Обозначим функцию *антирасстояния* от точки $x \in \mathcal{H}$ до множества A [1, 2] через

$$f_A(x) = \sup_{a \in A} \|x - a\|.$$

Антиокрестность множества A радиуса $r > 0$ [1, 2] определим по формуле

$$T_A(r) = \{x \in \mathcal{H} \mid f_A(x) > r\}.$$

Будем говорить, что точка $a(x) \in A$ *наиболее удаленная* точка множества $A \subset \mathcal{H}$ от точки $x \in \mathcal{H}$, если

$$\|x - a(x)\| = f_A(x).$$

Множество $A \subset \mathcal{H}$ называется *сильно выпуклым с радиусом* $R > 0$, если оно представимо в виде пересечения замкнутых шаров с радиусом R.

В работе [1] были доказаны следующие предложения.

Предложение 1.1. Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — сильно выпуклое множество с радиусом R, $r > R$. Тогда для любых двух точек $x_0, x_1 \in T_A(r)$ выполнено неравенство

$$\|a(x_0) - a(x_1)\| \leqslant \frac{R}{r-R}\|x_0 - x_1\|. \tag{1}$$

Предложение 1.2. Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — выпуклое замкнутое ограниченное множество, $r > 0$. Пусть для каждой точки $x \in T_A(r)$ существует единственная наиболее удаленная точка $a(x) \in A$ и оператор антипроекции $T_A(r) \ni x \to a(x) \in A$ удовлетворяет условию Липшица с константой $C > 0$. Тогда множество A является сильно выпуклым с радиусом r.

2. Сильная выпуклость множества с единственной антипроекцией в гильбертовом пространстве

Оказывается, что в условиях предложения 1.2 можно утверждать, что множество A является сильно выпуклым с радиусом $R = \frac{Cr}{C+1}$. Это уточняет предложение 1.2 и вместе с предложением 1.1 дает неулучшаемый результат для связи константы сильной выпуклости множества A и константы Липшица для оператора метрической антипроекции.

Лемма 2.1. ([1, лемма 1]). *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — сильно выпуклое множество с радиусом R, $p_i \in \mathcal{H}$, $\|p_i\| \geqslant 1$, и $a_i = \arg\max\limits_{a \in A}(p_i, a)$, $i = 0, 1$. Тогда*

$$\|a_0 - a_1\|^2 \leqslant R(p_0 - p_1, a_0 - a_1).$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия предложения 1.2. Тогда множество A есть сильно выпуклое множество с радиусом $\frac{Cr}{C+1}$.*

Доказательство. В силу предложения 1.2 множество A сильно выпуклое с радиусом r. Обозначим через R минимальный радиус сильной выпуклости для множества A. Легко видеть (см. [3, следствие 3.1.4, теорема 4.3.2]), что такой радиус существует.

Покажем, что любой единичный вектор $p \in \partial B_1(0) \subset \mathcal{H}$ можно представить в виде

$$p = \frac{a(x) - x}{r} \tag{2}$$

для некоторой точки $x \in \partial T_A(r) = \{z \in \mathcal{H} \mid f_A(z) = r\}$.

Зафиксируем $p \in \partial B_1(0)$. Пусть точка $a \in \partial A$ такова, что $(p, a) = s(p, A)$. Так как множество A сильно выпукло с радиусом r, то в силу опорного принципа для сильно выпуклых множеств в гильбертовом пространстве [3, теоремы 4.1.3, 4.2.7]

$$A \subset B_r(a - rp).$$

Отсюда $x = a - rp$, $a(x) = a$.

С помощью предельного перехода легко видеть, что для любых точек $x_0, x_1 \in \mathrm{cl}\, T_A(r)$

$$\|a(x_0) - a(x_1)\| \leqslant C\|x_0 - x_1\|.$$

Зафиксируем $x_0, x_1 \in \partial T_A(r)$. Определим $a_i = a(x_i)$ и $p_i = \frac{x_i - a_i}{r} \in \partial B_1(0)$, $i = 0, 1$. Имеем

$$\|a_0 - a_1\| \leqslant Cr\left\|p_0 - p_1 + \frac{a_0 - a_1}{r}\right\|.$$

По лемме 2.1 $(p_0 - p_1, a_0 - a_1) \leqslant -\frac{1}{R}\|a_0 - a_1\|^2$, откуда

$$\|a_0 - a_1\|^2 \leqslant C^2 r^2 \|p_0 - p_1\|^2 + C^2\|a_0 - a_1\|^2 - \tfrac{2C^2 r}{R}\|a_0 - a_1\|^2,$$

т.е.
$$\|a_0 - a_1\| \leqslant \frac{Cr}{\sqrt{1+\frac{2r}{R}C^2 - C^2}} \cdot \|p_0 - p_1\|. \tag{3}$$

В силу произвольности точек $x_0, x_1 \in \partial T_A(r)$ и свойства (2) для любых единичных векторов $p_0, p_1 \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих условию $(-p_i, a_i) = s(-p_i, A)$, $i = 0, 1$, справедлива формула (3). Последнее в силу [3, теорема 4.3.2] эквивалентно сильной выпуклости множества A с радиусом
$$\frac{Cr}{\sqrt{1+\frac{2r}{R}C^2 - C^2}}.$$

В силу минимальности радиуса R получаем, что
$$R \leqslant \frac{Cr}{\sqrt{1+\frac{2r}{R}C^2 - C^2}}. \tag{4}$$

Определим $R_1 = \frac{Cr}{C-1}$, $R_2 = \frac{Cr}{C+1}$.

Пусть $C \in (0, 1)$. Решая неравенство (4), получаем $R \in [R_1, R_2]$. Поэтому $R \leqslant R_2$.

Если $C = 1$, то $R \leqslant \frac{r}{2} = \frac{Cr}{C+1}$.

При условии $C > 1$ получаем, что решение неравенства (4) есть $(-\infty, R_2] \cup [R_1, +\infty)$. Однако при $C > 1$ выполнено условие $R_1 > r$, в то время как $R \leqslant r$ по предложению 1.2. Значит, и в этом случае $R \leqslant R_2$. □

Заметим, что пример множества $A = B_R(0) \subset \mathcal{H}$ показывает, что результаты предложения 1.1 и теоремы 2.1 точны.

3. Метрическая антипроекция и ε-антипроекция

Лемма 3.1. *Пусть $A, B \subset \mathcal{H}$ — выпуклые замкнутые ограниченные подмножества, $x, y \in \mathcal{H}$. Тогда*
1) $|f_A(x) - f_B(x)| \leqslant h(A, B)$,
2) $|f_A(x) - f_A(y)| \leqslant \|x - y\|$.

Доказательство. Обозначим $h = h(A, B)$.

Пункт 1) эквивалентен условию $|f_A(0) - f_B(0)| \leqslant h(A - x, B - x) = h$, т.е. можно без ограничения общности считать, что $x = 0$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $b_\varepsilon \in B$ такая точка, что $\|b_\varepsilon\| + \varepsilon > f_B(0)$. Пусть $a_\varepsilon \in A$ удовлетворяет условию $\|a_\varepsilon - b_\varepsilon\| \leqslant h + \varepsilon$. Тогда
$$\begin{aligned} f_B(0) &< \\ &< \|b_\varepsilon\| + \varepsilon \leqslant \\ &\leqslant \|a_\varepsilon\| + \|a_\varepsilon - b_\varepsilon\| + \varepsilon \leqslant \\ &\leqslant f_A(0) + h + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично
$$f_A(0) \leqslant f_B(0) + h + 2\varepsilon,$$
т.е. $|f_A(0) - f_B(0)| \leqslant h + 2\varepsilon$ для всякого $\varepsilon > 0$. Переходя к пределу $\varepsilon \to +0$, получаем пункт 1).

Пункт 2) следует из условия Липшица с константой 1 для нормы $\|\cdot\|$. □

Лемма 3.2. *Пусть $A, B \subset \mathcal{H}$ — выпуклые замкнутые ограниченные множества, причем множество B — сильно выпуклое с радиусом R, $h = h(A, B)$. Пусть $R < \min\{f_A(x), f_B(x)\}$, где $x \in \mathcal{H}$. Пусть существует наиболее удаленная точка $a(x) \in A$. Тогда*
$$\|a(x) - b(x)\| \leqslant 2\sqrt{\frac{f_B(x)}{f_B(x) - R}}\sqrt{Rh + h^2} + h. \tag{5}$$

Доказательство. Обозначим $a = a(x)$, $b = b(x)$. Точка $b(x)$ существует в силу предложения 1.2. Производя параллельный перенос на вектор $-x$, можем без ограничения общности считать, что $x = 0$.

Согласно лемме 3.1 возможны 2 случая. Случай 1) $R < f_B(0) \leqslant f_A(0) \leqslant f_B(0) + h$ и случай 2) $R < f_A(0) \leqslant f_B(0) \leqslant f_A(0) + h$.

Случай 1). Определим $z = b - R\frac{b}{\|b\|}$. В силу опорного принципа [3, теоремы 4.1.3, 4.2.7] $B \subset B_R(z)$ и из условия теоремы имеем для всякого $t > h$ включение $A \subset B_{R+t}(z)$. Рассмотрим треугольник $a0b$ и отрезок $[a, z]$, $a \in B_{R+t}(z) \backslash B_{f_B(0)}(0)$. При этом выполнено неравенство $d = \|a - z\| \leqslant R + t$.

Пусть $\varphi = \angle a0b$. Тогда

$$\begin{aligned}\cos\varphi = &\\ &= \frac{f_A^2(0) + (f_B(0) - R)^2 - d^2}{2f_A(0)\,(f_B(0) - R)} \geqslant \\ &\geqslant \frac{f_A^2(0) + (f_B(0) - R)^2 - (R + t)^2}{2f_A(0)\,(f_B(0) - R)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|a - b\|^2 = &\\ &= f_A^2(0) + f_B^2(0) - 2f_A(0)f_B(0)\cos\varphi \leqslant \\ &\leqslant \frac{f_B(0)}{f_B(0) - R}\left(2Rt + t^2\right).\end{aligned}$$

Переходя к пределу по $t \to h + 0$, получаем

$$\|a - b\| \leqslant \sqrt{\frac{f_B(0)}{f_B(0) - R}}\ \sqrt{2Rh + h^2}. \tag{6}$$

Случай 2). Множество $C = A + B_h(0)$ удовлетворяет условиям $f_C(0) = f_A(0) + h$, $c = c(0) = a + h\frac{a}{\|a\|}$. При этом $R < f_B(0) \leqslant f_C(0) \leqslant f_B(0) + h$. Таким образом, для множеств B и C реализуется случай 1) с соответствующими изменениями ($h(B, C) \leqslant 2h$). Отсюда

$$\begin{aligned}\|c - b\| = &\\ &= \left\|a + h\tfrac{a}{\|a\|} - b\right\| \leqslant \\ &\leqslant \sqrt{\frac{f_B(0)}{f_B(0) - R}}\ \sqrt{2R(2h) + (2h)^2};\end{aligned}$$

$$\|a - b\| \leqslant 2\sqrt{\frac{f_B(0)}{f_B(0) - R}}\ \sqrt{Rh + h^2} + h. \tag{7}$$

Случаи 1) и 2) дают оценки (6) и (7), откуда вытекает утверждение леммы 3.2. □

Теорема 3.1. *Пусть $A, B \subset \mathcal{H}$ — выпуклые и замкнутые множества, причем множество B сильно выпуклое с радиусом R. Пусть $x, y \in \mathcal{H}$, $h = h(A, B)$ и выполнено условие $r = \min\{f_B(x), f_B(y)\} > R$. Пусть $b = b(y)$, $a \in \{z \in A \mid \|z - x\| = f_A(x)\}$. Тогда*

$$\|a - b\| \leqslant 2\sqrt{\frac{r}{r - R}}\sqrt{Rh + h^2} + h + \tfrac{R}{r-R}\|x - y\|. \tag{8}$$

Доказательство. Положим $c = b(x)$ (существует по предложению 1.2):

$$\|a - b\| \leqslant \|a - c\| + \|b - c\|.$$

По лемме 3.2

$$\begin{aligned}\|a - c\| \leqslant &\\ &\leqslant 2\sqrt{\frac{f_B(x)}{f_B(x) - R}}\sqrt{Rh + h^2} + h \leqslant \\ &\leqslant 2\sqrt{\frac{r}{r - R}}\sqrt{Rh + h^2} + h.\end{aligned}$$

По предложению 1.1

$$\|b-c\| \leqslant \frac{R}{r-R}\|x-y\|.$$

Отсюда получаем утверждение теоремы. □

Теорема 3.1 уточняет лемму 16 [2] для случая гильбертова пространства.

Лемма 3.3. *Пусть* $B_1, B_2 \subset \mathcal{H}$ *— выпуклые замкнутые ограниченные подмножества с непустой внутренностью,* $C_i = \mathcal{H} \backslash \operatorname{int} B_i$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$h(C_1, C_2) \leqslant h(B_1, B_2).$$

Доказательство. Зафиксируем точку $z \in C_1$, $z \notin C_2$. Это означает, что $z \notin \operatorname{int} B_1$, $z \in \operatorname{int} B_2$. Пусть ϱ — расстояние от точки z до множества C_2. По теореме об отделимости найдется единичный вектор $p \in \mathcal{H}$ такой, что $(p, z-b) \geqslant 0$ для всех $b \in B_1$. Из включения $B_\varrho(z) \in B_2$ следует, что $z + \varrho p \in B_2$. Поэтому

$$\begin{aligned} h(B_1, B_2) \geqslant \varrho_{B_1}(z+\varrho p) = \inf_{b \in B_1} \|z + \varrho p - b\| \geqslant \\ \geqslant \inf_{b \in B_1} (p, z + \varrho p - b) \geqslant \varrho. \end{aligned}$$

Итак, $\sup\limits_{z \in C_1} \varrho_{C_2}(z) \leqslant h(B_1, B_2)$. Аналогично выполнено неравенство $\sup\limits_{z \in C_2} \varrho_{C_1}(z) \leqslant h(B_1, B_2)$. Следовательно, $h(C_1, C_2) \leqslant h(B_1, B_2)$. □

Пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим

$$a(\varepsilon, x) = A \backslash \operatorname{int} B_{f_A(x)-\varepsilon}(x)$$

и назовем множество $a(\varepsilon, x)$ ε-антипроекцией точки x на множество A.

Теорема 3.2. *Пусть* $A_1, A_2 \subset \mathcal{H}$ *— сильно выпуклые множества с радиусом* $R_i > 0$, $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$, $r_i = f_{A_i}(x_i) > R_i$, $\varepsilon_i \in (0, r_i - R_i)$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$\begin{aligned} &h(a_1(\varepsilon_1, x_1), a_2(\varepsilon_2, x_2)) \leqslant 16 \max\left\{\frac{R_1}{\varepsilon_1}, \frac{R_2}{\varepsilon_2}\right\} \times \\ &\times (2\|x_1 - x_2\| + 2h(A_1, A_2) + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|)\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Доказательство. Рассмотрим множества $C_i = \mathcal{H} \backslash \operatorname{int} B_{r_i - \varepsilon_i}(x_i)$, $i = 1, 2$. Это слабо выпуклые множества в гильбертовом пространстве [4] с константой слабой выпуклости $r_i - \varepsilon_i > R_i$, $i = 1, 2$. Далее по тексту i равно 1 или 2.

Обозначим $a_i = a_i(x_i)$. При этом $B_{\varepsilon_i}(a_i) \subset C_i$ и $a_i(\varepsilon_i, x_i) = A_i \cap C_i$.

По теореме 3.2.1 [4] имеем

$$h\left(A_1 \cap C_2, A_2 \cap C_2\right) \leqslant 16 \max\left\{\tfrac{R_1}{\varepsilon_1}, \tfrac{R_2}{\varepsilon_2}\right\}\left(h(A_1, A_2) + h(C_1, C_2)\right). \tag{10}$$

Используя леммы 3.3 и 3.1, получаем

$$\begin{aligned} h(C_1, C_2) &\leqslant \\ &\leqslant h\left(B_{r_1-\varepsilon_1}(x_1), B_{r_2-\varepsilon_2}(x_2)\right) \leqslant \\ &\leqslant |r_1 - \varepsilon_1 - r_2 + \varepsilon_2| + \|x_1 - x_2\| \leqslant \\ &\leqslant |r_1 - r_2| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + \|x_1 - x_2\| = \\ &= |f_{A_1}(x_1) - f_{A_2}(x_2)| + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + \|x_1 - x_2\| \leqslant \\ &\leqslant \|x_1 - x_2\| + h(A_1, A_2) + \\ &+ |\varepsilon_1 - \varepsilon_2| + \|x_1 - x_2\| = \\ &= 2\|x_1 - x_2\| + h(A_1, A_2) + |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|. \end{aligned}$$

Подставляя результат в формулу (10), получаем (9). □

4. Наиболее удаленные точки многогранника

Рассмотрим выпуклое компактное множество A в вещественном n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Для приложений важен следующй вопрос: какие точки множества A являются наиболее удаленными точками, для каких точек пространства и какое антирасстояние на этих точках реализуется?

Лемма 4.1. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт и для точки $x \in \partial T_A(r)$ существует единственная наиболее удаленная точка $a(x) \in A$. Это эквивалентно тому, что для всякой точки $z \in A\backslash\{a(x)\}$ выполнено неравенство*

$$\|a(x) - z\| < \sqrt{2r}\sqrt{(p, a(x) - z)}, \tag{11}$$

где $p = \frac{a(x)-x}{r} \in \partial B_1(0)$.

Доказательство. По условию $r = \|x - a(x)\|$. Условие $\|x - a(x)\| = f_A(x) > \|x - z\|$, $\forall z \in A\backslash\{a(x)\}$ эквивалентно условию

$$\|a(x) - rp - z\| < r, \quad \forall z \in A.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат, получаем (11). □

Напомним, что нормальным конусом ко множеству $A \subset \mathbb{R}^n$ в точке $a \in \mathrm{cl}\, A$ называется множество $N(A, a) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid (p, a - z) \geqslant 0, \quad \forall z \in A\}$.

Полярой множества $A \subset \mathcal{H}$ называется множество $A^\circ = \{p \in \mathcal{H} \mid s(p, A) \leqslant 1\}$. Конической оболочкой выпуклого множества $A \subset \mathcal{H}$ называется пересечение всех выпуклых конусов с вершиной в нуле, содержащих A.

Теорема 4.1. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт, $\beta \in (0, 1)$, $p \in \partial B_1(0)$ и выполнено включение $B_\beta(p) \subset N(A, a)$. Тогда точка a является единственной антипроекцией для точек $a - rp$, где $r > \dfrac{f_A(a)}{2\beta}$.*

Замечание 4.1. Одним из наиболее важных классов выпуклых компактов в $\mathbb{R}^n$ является класс выпуклых многогранников. Легко видеть, что наиболее удаленной точкой многогранника может выступать только его вершина. Каждая вершина многогранника может выступать в качестве точки a в теореме 4.1 с соответствующим нормальным вектором $p \in \mathrm{int}\, N(A, a)$ и значением β. Поэтому предыдущая теорема позволяет оценить функцию антирасстояния до вершины многогранника.

Доказательство. Рассмотрим поляру $T = (\mathrm{cone}\ (B_\beta(p)))^\circ$.

Поскольку $\mathrm{cone}\ (B_\beta(p)) \subset N(A, a)$, то $T \supset N^\circ(A, a) = \mathrm{cl\ cone}\ (A - a)$ [3, лемма 1.12.7, предложение 1.4.6]. Таким образом, $A - a \subset T$.

Пусть φ — угол между прямой $\{\lambda p \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ и образующей конуса $\mathrm{cone}\ (B_\beta(p))$, $\sin\varphi = \beta$.

Конус T определяется по формуле

$$T = \{z \in \mathbb{R}^n \mid (q, z) \leqslant 0, \quad \forall q \in \mathrm{cone}\ (B_\beta(p))\},$$

поэтому T является конусом вращения (как поляра к конусу вращения), его осью симметрии является прямая $\{\lambda p \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, а угол между осью симметрии и образующей есть $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Выберем точку $z \in A \subset T + a$. Угол между p и $a - z$ не больше, чем $\frac{\pi}{2} - \varphi$, поэтому, с учетом леммы 4.1, получаем, что условие

$$\frac{\|a - z\|^2}{2r} < (p, a - z)$$

вытекает из условия

$$\frac{\|a - z\|^2}{2r} < \|a - z\| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right),$$

т.е.

$$\frac{\|a - z\|}{2r} < \sin\varphi = \beta.$$

Последнее условие следует из неравенства

$$\frac{f_A(a)}{2r} < \beta.$$

Таким образом, для всякого $r > \dfrac{f_A(a)}{2\beta}$ точка a есть единственная наиболее удаленная точка множества A от точки $a - rp$. $\square$

Отметим, что простейшие примеры показывают, что оценка теоремы 4.1 для числа r в общем случае неулучшаема.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00139-а. Автор признателен Г. Е. Иванову за многочисленные полезные замечания.

Литература

1. *Балашов М.В., Иванов Г.Е.* Об удаленных точках множеств // Матем. заметки. – 2006. – Т. 80, № 2. – С. 163–170.

2. *Иванов Г.Е.* Наиболее удаленные точки и сильная выпуклость множеств // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87, № 3. – С. 382–395.

3. *Половинкин Е.С., Балашов М.В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. – М.: Физматлит, 2007. — 2-е изд. испр. и доп. – 440 с.

4. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и функции. – М.: Физматлит, 2006. – 351 с.

Поступила в редакцию 29.08.2012