Геометрия Финслера и почему ее нужно понимать физикам

В. Г. Жотиков
zhotikov@yandex.ru

Московский физико-технический институт

14.03.2012

План доклада

Общие соображения и мотивации

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Геометрическая интерпретация калибровочных преобразований

Об устойчивости физических структур

Заключение

Общие соображения и мотивации

В последнее время в физической литературе наметился серьезный интерес к идеям и методам геометрии Финслера и их приложениям к проблемам современной физики от квантовой гравитации и физики микромира до астрофизики и космологии.
Это представляется не случайным. Мы видим в этом начало осознания необходимости перехода к новой парадигме физики.
Здесь, несомненно, напрашивается известная аналогия с введением в физику геометрии Римана. Последняя была сформулирована в 1864 году Р. Риманом (1826 – 1866) , тогда, как оказалась востребованной в физической науке почти через полвека, в связи с созданием общей теории относительности (ОТО) в 20-е годы прошлого столетия А. Эйнштейном и М. Гроссманом (1916).

Общие соображения и мотивации

О применении идей и методов геометрии Финслера в современной физике

1. Д. И. Блохинцев *Геометрия и физика микромира.* УФН, Том 110 (вып. 4), 1973. С. 481.
«Можно полагать, что и в случае микромира метрика пространства-времени может быть продиктована полем элементарных частиц».

2. Д. А. Киржниц, В. А. Чечин *Космические лучи сверхвысоких энергий и возможное обобщение релятивистской теории.* ЯФ, Том 15 (вып. 7), 1972. С. 1051
«Расхождение между теорией и экспериментом наметившееся в физике космических лучей может быть отнесено за счет нарушения релятивистской динамики в области больших энергий и скоростей».

О многообразии геометрии

Начнем с терминологии.
Уже в девятнадцатом столетии математики пришли к мысли, что существует не одна, а много геометрий.

В общеупотребительном в настоящее время смысле, геометрия есть теория пространства,
а **пространство** есть <u>система объектов</u>, называемых обычно <u>«точками»</u>, вместе с <u>системой соотношений</u>, которыми эти точки связаны, причем, эта система соотношений до некоторой степени аналогична тем, или иным соотношениям между элементами физического пространства.
Пространство, следовательно, есть не просто абстрактное множество объектов, но и множество объектов с определенной системой свойств и отношений.

О многообразии геометрии

Например, структура так называемого *метрического пространства* определяется некоторой функцией $\triangle(P, Q)$, аргумент которой есть пара «точек», и значения которой — неотрицательные числа. $\triangle(P, Q)$ называется *расстоянием* между «точками» P, Q.

Часто встречающиеся в литературе названия: геометрия Лобачевского – «гиперболическая», геометрия Римана – «эллиптическая», а евклидовой геометрии – «параболическая» принадлежат Ф. Клейну (1849 – 1925). Всемирную славу Ф. Клейну принесла его знаменитая «Эрлангенская программа». Он изложил ее в 1872 году в своей лекции при вступлении в должность профессора математики университета г. Эрланген (Германия).

О многообразии геометрии

В указанной лекции Ф. Клейн сформулировал единую точку зрения на геометрию как на теорию инвариантов соответствующей группы преобразований.

Название геометрии как правило совпадает с названием группы преобразований, например: евклидова аффинная, эквиаффинная, центрально-проективная, проективная и т.д. Классификация групп преобразований дает классификацию геометрий, а теория инвариантов каждой группы дает аналитическую структуру соответствующей геометрии.
Соответствующие группы преобразований называют ***фундаментальными группами*** каждой из геометрий.

О многообразии геометрии

Центральная идея «Эрлагенской программы» связана с понятием группы.
То есть, такой совокупности преобразований, которая подчиняется следующим условиям:
1) произведение двух преобразований совокупности принадлежит той же совокупности;
2) преобразование, обратное любому преобразованию совокупности, принадлежит той же совокупности;
3) наличие тождественного преобразования.

Таким образом, Ф. Клейн пришел к расширенному пониманию геометрии, формулируя ее задачу следующим образом:
дано многообразие и в нем группа преобразований.

О многообразии геометрии

Нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются при преобразованиях группы.

Из этого общего определения следует, что существуют различные геометрии. Они могут отличиться друг от друга характером элементов многообразия и строением группы. Последнее отличие является наиболее существенным. Если геометрии различаются между собой по характеру элементов многообразия но их фундаментальные группы изоморфны[1], то каждому факту одной геометрии будет соответствовать факт другой. При этом, каждую из них можно изучать на основе другой.

[1] изоморфными называются группы, если между их преобразованиями можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы произведение соответствующих преобразований соответствовали

О многообразии геометрии

В качестве примеров геометрий, характеризуемых группами преобразований, Ф. Клейн назвал, кроме элементарной, или евклидовой геометрии, аффинную, неевклидовы геометрии пространств положительной и отрицательной кривизны и проективную геометрию. Последняя является наиболее общей: фундаментальные группы всех предыдущих геометрий изоморфны некоторым подгруппам проективной группы.
Таким образом, геометрия разветвляется на отдельные виды в соответствии с той или иной группой преобразований.
Задача каждой геометрии состоит в изучении тех ее свойств, которые остаются инвариантными относительно соответствующей группы преобразований.
В этом состоит основная мысль программы Ф. Клейна.
Так развивалась геометрия до середины прошлого (XX-го) века.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Уже давно было замечено, что все события совершаются в Природе так, что вариация некоторой величины S, которая называется ***интегралом действия*** физической системы, равняется нулю:

$$\delta S = 0. \tag{1}$$

По-существу, это и есть основной закон всей современной физики (см., например, В. Арнольд и др.) [2].
Все другие законы Природы, такие как закон всемирного тяготения, законы электромагнетизма, законы взаимодействия элементарных частиц и т.д. и т.п. следуют из него.

[2] *Арнольд В. И.* Математика и физика: родитель и дитя или сестры? УФН. Том 169, № 12 (1999)

О геометрической интерпретации принципа наименьшего действия

К геометрии Финслера (1918 г.) мы приходим давая геометрическую интерпретацию принципа наименьшего действия [3]

$$s[\gamma] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q})\, dt. \tag{2}$$

$L(q, \dot{q})$ – функция Лагранжа (лагранжиан) исследуемой системы; $q \equiv q^\alpha \in X^n$ — обобщенные координаты, $\dot{q} \equiv \dot{q}^\alpha$, $(\dot{q}^\alpha = \dfrac{dq^\alpha}{dt})$ – обобщенные скорости, $\alpha = 1, ..., n$.
n – количество всех степеней свободы.
Многообразие $X^n : P(q) = P(q) \in X^n$ называют геометрическим пространством Веблена-Уайтхеда.

[3] V. Zhotikov *Finsler geometry and the equations of the movement in the relativistic dynamics*. Proceedings of the XV International Scientific Meeting PIRT–2009. Moscow, 2009. P. 133 – 144

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Задача ставится следующим образом.
Необходимо построить геометрию, в которой каждой геометрической кривой γ выражение (2) ставит в соответствие определенное число $s = s[\gamma]$, которое можно назвать *длиной дуги* кривой γ в некотором геометрическом пространстве X^n.
Экстремали функционала (2) т.е. траектории, описываемые уравнениями Эйлера-Лагранжа – суть *геодезические (кратчайшие)* этого пространства X^n.
Мерой измерения расстояний в этом пространстве является постоянная Планка h.
Эта задача и была решена П. Финслером (1894 – 1950) в его дисссертации «Uber Kurven and Flachen in allgemeinen Raumen»: Dissertation. – Gottingen, (1918).

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Инвариантность интеграла действия (2) относительно преобразований общего вида

$$t \to t'(t);\ q^\alpha \to q^{\alpha\prime} = q^{\alpha\prime}(q^\alpha), (Det|\frac{\partial q^{\alpha\prime}}{\partial q^\alpha}| \neq 0) \qquad (3)$$

накладывают ограничения на структуру функции Лагранжа $L(q, \dot{q})$. Она должна быть:
1) положительно однородной первой степени относительно обобщенных скоростей;
2) неотрицательной ($L(q, \dot{q}) > 0$) для $\dot{q} \neq 0$);
3) квадратичная форма $g_{\alpha\beta}\xi^\alpha\xi^\beta$ от переменных $\xi^\alpha \neq 0$ где $g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^\alpha\partial\dot{q}^\beta}$ положительно определена.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Условия 1) — 3) дают классическое определение метрики Финслера. Условие однородности при $n = 4$ приводит к рассмотрению релятивистских лагранжианов.
Геометрическое пространство X^n с заданной в нем метрикой Финслера называется
пространством Финслера и обозначается F^n.
Уравнение[4]

$$L(q^\alpha, x^\alpha) = 1, \;\; x^\alpha \in T^n(P), \;\; P \in X^n \tag{4}$$

в каждом касательном $T^n(P)$, $P \in X^n$ описывает некоторую локальную гиперповерхность.
Ее называют ***поверхностью лагранжиана*** или ***локальной индикатрисой*** метрики Финслера.

---

[4] Принята система единиц $h = c = 1$.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрическая функция и индикатриса метрики Финслера

Индикатриса (см. **ФЭ**)
(от латинского слова **indico** — указываю, определяю) указательная поверхность, вспомогательная поверхность, характеризующая зависимость каких либо свойств среды от направления.
Для построения индикатрисы из одной точки (центра) проводят радиус-векторы, длина которых пропорциональна величине, характеризующей данное свойство среды в данном направлении. Например: **электропроводность, показатель преломления, модули упругости и т.д.**
Понятие ***локальная индикатриса*** метрики является одним из ключевых понятий в геометрической интерпретации принципа наименьшего действия.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

О физическом смысле понятия индикатрисы метрики

Локальная индикатриса — гиперповерхность в каждом локальном касательном $T^n(P)$, $P \in X^n$
отвечающая единичной плотности действия.
Ее размерность равна $m = n - 1$.
Функция Лагранжа есть метрическая функция для пространства конфигураций X^n.
Каждому лагранжиану соответствует своя локальная индикатриса, определяющая метрику в пространстве X^n.
Задание локальной индикатрисы, т. е. некоторой поверхности единичного действия с самого начала обеспечивает введение всех необходимых процедур измерения физических величин решаемой задачи.

О физическом смысле понятия индикатрисы метрики

В сопряженном локальном касательном пространстве $T^{*n}P)$, соответствующем $T^n(P)\, P \in X^n$ аналогичным образом строится гиперповерхность (семейство гиперплоскостей)

$$H(q^\alpha, y_\alpha) = 1, \;\; y_\alpha \in T^{*n}(P), \;\; P \in X^n, \tag{5}$$

где H – ***гамильтониан системы***. Эту гиперповерхность называют ***локальной поверхностью гамильтониана*** или ***локальной фигуратриссой*** метрики Финслера.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрическая функция и индикатриса метрики Финслера

Уравнения

$$L(q^\alpha, x^\alpha) = 1,\ x^\alpha \in T^n(P),\ P \in X^n \tag{6}$$

$$H(q^\alpha, y_\alpha) = 1,\ y_\alpha \in T^{*n}(P),\ P \in X^n \tag{7}$$

определяют **контравариантную** и **ковариантную** векторные метрики в F^n.

Теорема взаимности:

Локальная поверхность гамильтониана Π_H (***локальная фигуратриса***) есть взаимно полярная поверхность для поверхности лагранжиана Π_L (***локальная индикатриса***) и обратно.

Это есть «математическое оформление» известного соотношения де-Бройля $\lambda = \dfrac{h}{p} \quad (h = c = 1)$.

Понятие локальной индикатрисы метрики

Геометризация интеграла действия (2) становится особенно наглядной и удобной, если уравнения локальной индикатрисы записывать в векторно-параметрической форме:

$$x^{\alpha} = \ell^{\alpha}(q^{\alpha}, \Theta^{a}) = 1, \; a = 1, 2, ..., n-1, \tag{8}$$

$$y_{\alpha} = \ell_{\alpha}(q^{\alpha}, \Theta^{a}) = 1, \; a = 1, 2, ..., n-1. \tag{9}$$

Здесь Θ^a – параметры, определяющие положение точки или касательной гиперплоскости на указанной поверхности $\Theta^a \in X^{n-1}$.

Состояние частицы описывается координатами положения точки на локальной индикатрисе.

Согласно В. Вагнеру [5]
пространство Финслера F^n есть расслоенное пространство — математический аналог термина фазовое пространство).
Базой его является пространство конфигураций X^n, а слоями — касательные пространства T^n с заданными в них локальными индикатрисами X^{n-1}.
Приходим к расслоенному пространству $X^{n-1}X^n$, которое есть геометрическая модель принципа наименьшего действия (2).

[5] Вагнер В. *Геометрия Финслера как теория поля локальных поверхностей.* Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. VII (1949). С. 65.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрическая функция и индикатриса метрики Финслера

Геометрия риманова пространства R^n, являющаяся при $n = 4$ математическим основанием ТО представляет собой частный случай геометрии финслерова пространства F^n.

Геометрия Римана сводится к теории поля локальных центральных гиперповерхностей второго порядка, центры которых совпадают с центрами соответствующих локальных касательных T^n.

Итак, математический аппарат ОТО есть частный случай геометрии Финслера: $R^4 \subset F^4$.

Все это приводит к серьезным и далеко идущим следствиям.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрическая функция и индикатриса метрики Финслера

Пример.

Метрическая функция «свободной» релятивистской частицы без спина в пространстве СТО сигнатуры $(+1, -, -, -)$; $n = 4; q^\alpha \equiv x^\alpha, \alpha = 0, 1, ..., 3; X^4 \equiv E^4$

$$L(x, \dot{x}) = m\sqrt{\dot{x}^2}. \qquad (10)$$

Индикатриса метрики — 3-мерный гиперболоид (3-псевдосфера) с центром в каждой точке E^4

$$x^\alpha = l^\alpha(\Theta^a), a = 1, 2, 3. \qquad (11)$$

лежит на световом конусе с вершиной в каждой точке E^4 Уравнения (11) и (11) задают в пространстве E^4 **метрику Минковского**.

Другими словами

геометризация действия «свободной» релятивистской частицы (без спина) приводит к пространству Минковского M^4.

Метрику в M^4 можно задавать в векторной (заданием индикатрисы), либо тензорной формах.

Локальная фигуратриса в соответствующем локальном T^{*4} является двойственным индикатрисе геометрическим образом.

Ее уравнение есть уравнение «массовой поверхности» частицы единичной массы.

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2, \ (m^2 = 1). \tag{12}$$

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Уравнения движения (уравнения Эйлера-Лагранжа) для свободной релятивистской частицы

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \ell(\Theta^a), \ \frac{d\Theta^a}{ds} = 0, (\alpha = 0, ...3; a = 1, 2, 3). \qquad (13)$$

Имеем уравнения движения записанные сразу для всех инерциальных наблюдателей. Пространство-время F^4 «вырождается» в пространство-время Минковского M^4. «Включим взаимодействие», например, добавим в лагранжиан член взаимодействия с **ЭМ**-полем.

$$L(x, \dot{x}) = m\sqrt{g_{\alpha\beta}(x)\dot{x}^\alpha\dot{x}^\beta} + eA_\alpha\dot{x}^\alpha \qquad (14)$$

Это уже финслерово пространство-время F^4 (метрика Рандера).

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Метрика Лагранжа

Пусть теперь на систему наложены p связей

$$\Phi_p(q, \dot{q}) = 0, \ (p = m + 1, ..., n). \tag{15}$$

Имеем задачу Лагранжа в вариационном исчислении.
Индикатриса метрики задачи Лагранжа будет m-мерной поверхностью $X^m(P)$ где $m = 1, ..., n - 1$
Приходим к **метрике Лагранжа**.
Геометрически задача сводится к теории поля локальных поверхностей

$$\ell^\alpha = \ell^\alpha(q^\beta, \Theta^a), \ (\alpha, \beta = 1, ..., n; a = 1, ..., m). \tag{16}$$

Приходим к расслоенному пространству $X^m(X^n)$.
В частном случае пространства X^n с метрикой Лагранжа при $m = n - 1$ возвращаемся к пространству F^n.

Объект связности в расслоенном пространстве $X^m(X^n)$

$$\Gamma^a = \Gamma^a(q^\alpha, \Theta^a) \tag{17}$$

определяет отображения локальных m-поверхностей $X^m(P)$ вдоль произвольных линий $q^\alpha = q^\alpha(t)$ базисного пространства X^n.

Теорема (Жотиков Г. И: 1965)

Связность Γ^a ***в расслоенном пространстве*** $X^m(X^n)$ ***определяется инвариантным образом через фундаментальную систему геометрических объектов*** *m****-поверхности*** $G^a_{ab}, G^r_{ap}, g^p_{ab}, g^b_{ap}, v^a, v^p$ ***являющихся функциями переменных*** q^α, Θ^a.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Уравнения движения релятивистской динамики

Уравнения экстремалей в $X^m(X^n)$ имеют вид:

$$\frac{dq^\alpha}{ds} = \ell^\alpha(q^\lambda, \Theta^a) \tag{18}$$

$$\frac{d\Theta^a}{ds} + \Gamma^a_c v^c(q^\lambda, \Theta^b) + \Gamma^a_p v^p(q^\lambda, \Theta^b) = 0. \tag{19}$$

Здесь Γ^a_c и Γ^a_p есть коэффициенты разложения объекта связности $\Gamma^a(q^\alpha, \Theta^a)$ по базисным 1-формам ℓ^a и ℓ^p, p – число уравнений связей. При $p = 0$ возвращаемся в F^n.

Система (18), (19) есть новая геометрически-инвариантная форма уравнений движения релятивистской динамики.

Геометрическая интерпретация принципа наименьшего действия

Уравнения движения релятивистской динамики

Принципиальным отличием геометрической формы уравнений движения ((18, 19) от лагранжевой и гамильтоновой форм уравнений движения состоит в том, что ее уравнения описывают движения в фазовом пространстве (с введенной в нем набором метрологических процедур измерения физических величин), т. е. относительно полного ансамбля наблюдателей в том числе неинерциальных.

Геометрическая интерпретация калибровочных преобразований

Калибровочный принцип наряду с вариационным принципом является одним из краеугольных принципов современной физики. Термины «калибровочная симметрия» и «калибровочные преобразования» были введены **Г Вейлем** (H. Weyl) примерно в 1920 году. Одним из простейших примеров калибровочных преобразований являются калибровочные преобразования в электродинамике: тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}(x)$ и уравнения Максвелла не изменяются если 4-вектор-потенциал $A_\mu(x)$ ЭМ-поля преобразуется как

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu f(x), \mu = 1, ..., 4. \tag{20}$$

$f(x)$ – произвольная скалярная функция от 4-координат x^α пространства-времени.

Геометрическая интерпретация калибровочных преобразований

В более общем случае калибровочные преобразования могут быть записаны так:

$$L \to L' + \partial_\alpha f(q). \tag{21}$$

$\partial_\alpha f(q)$ обозначает градиент скалярной функции $f(q)$ от обобщенных координат.

Геометрическую интерпретацию калибровочным преобразованиям дал великий математик XX века **В. Вагнер** (V. Wagner) в 1945 году [6]
система единиц $c = h = 1$

[6] Вагнер В. *Гомологическое преобразование метрики Финслера*. ДАН СССР, Том 46, № 7. 1945. С. 287

Геометрическая интерпретации калибровочных преобразований

Ф. Клейн (F. Klein: 1872): каждой группе преобразований соответствует своя геометрия.

$$'p_\alpha = p_\alpha - \sigma_\alpha, \tag{22}$$

$$'x^\alpha = \frac{x^\alpha}{1 - \sigma_\beta x^\beta}, \tag{23}$$

где $\sigma_\alpha = \partial_\alpha f(q)$ – градиент скалярной функции $f(q)$.
В случая F^4 имеем наглядную интерпретацию:
$p = (E, \mathbf{p})$ – 4-вектор импульсного пространства,
$x = (t, \mathbf{x})$ – 4-вектор координатного пространства.
Преобразования в импульсном пространстве (22) индуцируют преобразования в координатном пространстве (23) и наоборот: преобразования в координатном пространстве (23) индуцируют преобразования в импульсном пространстве (22).

Геометрическая интерпретация калибровочных преобразований

Геометрическая интерпретация калибровочных преобразований приводит к одной из подгрупп группы проективных преобразований.
Она называется группой гомологических преобразований.
Термины ***гомология*** и ***гомологические преобразования*** введены в геометрию **Ж. Понселе** (J. Poncelet: 1822)
В вариационном исчислении эти преобразования называются **преобразованиями Каратеодори** [7].
Он первым применил их для получения достаточных условий функционалов действия типа (2)

---

[7] Caratheodory C. *Variationsrechnung*. Leipzig, Berlin, 1935. P. 197

Геометрическая интерпретация калибровочных преобразований

Гомология (греч. homologia) — соответствие
В проективной геометрии на плоскости – автоморфизм проективной плоскости P^2 при котором одна прямая (ось гомологии) и точно одна точка (центр гомологии) переходят в себя.
Проективная плоскость P^2 – замкнутая односторонняя поверхность наподобие листа Мебиуса.
Группа гомологий и группа вращение вместе образуют группу центрально-проективных преобразований.

Проективная геометрия находит в физике важное применение.
Она обеспечивает геометрическую интерпретацию калибровочным преобразованиям.

Геометрическая интерпретация калибровочных преобразований

Если дифференциальными инвариантами евклидовой и псевдоевклидовой геометрий является квадрат дифференциала эквиаффинной длины траектории $ds^2 = const$, то в проективной геометрии этот инвариант обобщается на движения и по криволинейным траекториям.

Для них имеет место новый, более общий инвариант:

$$d\kappa \cdot ds^2 = const. \tag{24}$$

Здесь $d\kappa$ – дифференциал эквиаффинной кривизны траектории. Движение тел по таким (плоским) траекториям (орбитам) можно назвать без-инерционным.

Этому условию удовлетворяют кривые второго порядка: эллипс (окружность), гипербола и парабола.

Что дает инвариант (8) $d\kappa \cdot ds^2 = const$?

Геометрическая интерпретация калибровочных преобразований

Уравнения движения выводятся из принципа наименьшего действия. Используется естественное соображение о *эквивалентности между собственным временем τ часов с длиной дуги их траектории*:

$$\tau = \int_{\gamma} ds. \tag{25}$$

Здесь ds – дифференциал эквиаффинной длины дуги траектории. В нашем случае будет иметь место более общее соотношение для собственного времени τ:

$$\tau = \int_{\gamma} \sqrt[3]{d\kappa \cdot ds^2}. \tag{26}$$

Оно дает более общий, класс решений уравнений движения свободной частицы.

Об устойчивости физических структур

Вряд ли какой либо вопрос является более важным для физики, чем вопрос об устойчивости движений и устойчивости различных физических структур.

Первая вариация от интеграла действия обеспечивает стационарность траектории (НУЭ), но не ее устойчивость. За устойчивость несут ответственность ДУЭ.

Исключительная устойчивость атома водорода объясняется тем, что при движении электрона в этой системе не происходит рассеяния энергии в пространство. Очевидно, что полученные результаты применимы не только для микромира.

Ток в сверхпроводнике не затухает в силу тех же квантовых причин, что и движение электронов в атомах, но при этом может распространяться на макроскопически большие расстояния.

Заключение

1. Метод Вагнера
инвариантной геометризации всех известных задач вариационного исчисления является математически безупречным и последовательным методом геометризации вариационных принципов физики.

2. Геометризация принципа наименьшего (экстремального) действия в форме (2) в отсутствие связей приводит к геометрии пространства Финслера: $F^n \longleftrightarrow X^{n-1}(X^n)$.

3. Геометризация принципа наименьшего (экстремального) действия в форме (2) в присутствие связей (15) приводит к геометрии пространства X^n с m-мерной метрикой Лагранжа ($m = n - p$; p – число уравнений-связей).

Заключение

4. Построение геометрической теории различных вариационных задач путем задания поля их индикатрис параметрическими уравнениями (18, 19) приводит к новому виду уравнений движения (уравнения Эйлера-Лагранжа) в инвариантной геометрической форме.

5. Все это существенно упрощает решение проблемы исследования достаточных условий экстремума функционалов действия, таких, например, как ***условия Вейерштрасса, Лежандра-Адамара*** и т.д. Это необходимо для исследование физических структур на устойчивость к изменениям.

Заключение

5. Геометрическая интерпретация калибровочных преобразований приводит к необходимости введения в физику идей и методов проективной геометрии.

Это обстоятельство дает основания для развития новых методов исследования физических структур и понимания роли сил инерции в Природе.

6. Метрику следует рассматривать как «вторичный», т.е. **не фундаментальный объект теории**.

В каждом конкретном случае структура метрической функции (функции Лагранжа) и индикатрисы метрики определяются группой симметрии и соответствующими дифференциальными инвариантами теории.

Заключение

7. **Физика есть единая наука.**
Несмотря на ставшую уже общепринятой традицию делить физику на микроскопическую и макроскопическую, в действительности нет четкой границы между ними. Проведение такой границы зависит от уровня наших знаний, и граница постоянно «передвигается».
В частности, квантование и возникновение замкнутых орбит (стоячих волн) вовсе не является привилегией только микросистем.

А. Эйнштейн:
«Физика — есть геометрия + опыт».

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!