

УДК 531.38

А. А. Адуенко, Н. И. Амелькин

Московский физико-технический институт (государственный университет)

О предельных движениях волчка с внутренней диссипацией в однородном поле тяжести

Рассматривается волчок, моделируемый несущим телом с неподвижной точкой и однородным шаром, помещенным в шаровую полость несущего тела такого же радиуса, как и радиус шара. Предполагается, что диссипация обеспечивается только за счет внутренних сил, возникающих при относительных перемещениях шара. Показано, что предельными движениями волчка являются только стационарные вращения вокруг вертикали. Для случая, когда центр масс волчка лежит на одной из главных осей инерции, определено все множество предельных движений и детально исследован характер их устойчивости. Установлено, что для симметричного волчка с внутренней диссипацией условие устойчивости вращений, для которых радиус-вектор центра масс волчка направлен вертикально вверх, отличается от условия Майевского.

Ключевые слова: предельные движения, стационарные вращения, характер устойчивости, внутренняя диссипация, условие Майевского.

1. Постановка задачи

Рассматривается волчок, моделируемый несущим твердым телом S_0 с неподвижной точкой O и несомым телом S , имеющим некоторые степени свободы относительно несущего тела (рис. 1). Предполагается, что момент сил реакции в точке O равен нулю, а диссипация обеспечивается только за счет внутренних сил, возникающих при относительных перемещениях несомого тела. Исследуются предельные (установившиеся) движения волчка в однородном поле тяжести.

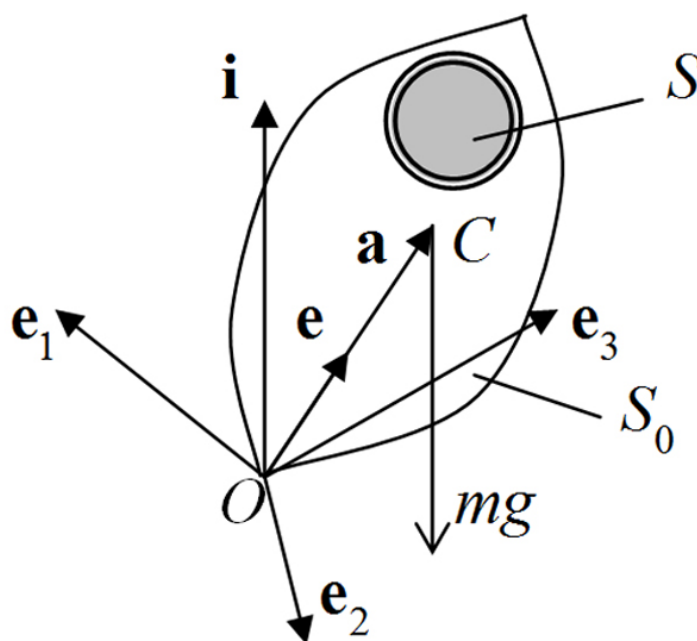


Рис. 1

Обозначим через $O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ базис, жестко связанный с несущим телом, а через $\boldsymbol{\omega}$ — угловую скорость несущего тела. Тогда кинетический момент волчка относительно неподвиж-

ной точки можно записать в виде [1]

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_O^{rel}, \quad (1)$$

где \mathbf{J} — тензор инерции волчка в базисе $O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$, а \mathbf{K}_O^{rel} — кинетический момент движения несомого тела S относительно базиса $O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$.

Кинетическая энергия волчка записывается выражением

$$T = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} / 2 + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{K}_O^{rel} + T^{rel}, \quad (2)$$

где T^{rel} — кинетическая энергия движения несомого тела S относительно базиса $O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$.

Полная энергия волчка определяется формулой

$$E = T + U = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} / 2 + \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{K}_O^{rel} + T^{rel} + m g a \mathbf{i}^T \mathbf{e}.$$

Здесь m — масса волчка, \mathbf{i} — единичный вектор вертикали, \mathbf{e} — единичный вектор, направленный по вектору центра масс волчка $\mathbf{a} = a \mathbf{e}$.

В том случае, когда центр масс несомого тела неподвижен относительно несущего тела, вектор \mathbf{a} будет постоянным в базисе $O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$. При определенных дополнительных условиях на связи и геометрию масс несомого тела неизменным будет и тензор инерции волчка \mathbf{J} , т.е. волчок будет гироскопом.

Из теоремы об изменении кинетического момента следует, что уравнения движения рассматриваемой системы имеют первый интеграл, описывающий сохранение проекции кинетического момента на вертикаль:

$$\mathbf{i}^T \mathbf{K}_O = \mathbf{i}^T (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{K}_O^{rel}) = K = \text{const}. \quad (3)$$

Производная по времени от полной энергии волчка равна мощности внутренних диссипативных сил и удовлетворяет неравенству $\dot{E} \leq 0$.

2. Пример

Рассмотрим случай, когда несомое тело волчка представляет собой однородный шар, помещенный в шаровую полость несущего тела такого же радиуса, как и радиус шара (рис. 1). Предполагается, что шар имеет три степени свободы относительно несущего тела; он может совершать любые вращения, а его центр неподвижен.

В рассматриваемом примере волчок является гироскопом, а для его кинетического момента и полной энергии получим на основании формул (1), (2) следующие выражения:

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + I \boldsymbol{\Omega},$$

$$E = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} / 2 + I \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Omega} + I \boldsymbol{\Omega}^2 / 2 + m g a \mathbf{i}^T \mathbf{e}. \quad (4)$$

Здесь $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость шара относительно несущего тела, I — момент инерции шара относительно его центральной оси.

Уравнения движения волчка можно получить на основе теоремы об изменении кинетического момента. Применяя эту теорему сначала для всего волчка, а затем отдельно для шара, получим следующую систему:

$$\mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}} + I \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + I \boldsymbol{\Omega}) = m g a \mathbf{i} \times \mathbf{e}, \quad (5)$$

$$I(\dot{\boldsymbol{\omega}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Omega}) = -b \boldsymbol{\Omega}. \quad (6)$$

Здесь предполагается, что диссипативный момент $-b \boldsymbol{\Omega}$ линейно зависит от относительной угловой скорости шара.

Первый интеграл (3) для рассматриваемого случая принимает вид

$$f = \mathbf{i}^T (\mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + I \boldsymbol{\Omega}) = K. \quad (7)$$

Уравнения, описывающие предельные движения, получаются из уравнений (5), (6) при $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$ и имеют следующий вид:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = mga \mathbf{i} \times \mathbf{e}.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом примере предельными движениями волчка являются только стационарные вращения (вращения с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$), а единичный вектор вертикали \mathbf{i} неподвижен в несущем теле. Поэтому угловая скорость стационарного вращения волчка направлена по вертикали, т.е. $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{i}$, а уравнения предельных движений приводятся к виду

$$\omega^2 \mathbf{i} \times \mathbf{J}\mathbf{i} = mga \mathbf{i} \times \mathbf{e}. \quad (8)$$

Неизвестными в этих уравнениях являются величина угловой скорости и положение оси вращения \mathbf{i} в связанном с несущим телом базисе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Для определения зависимости стационарных вращений от значения постоянной K первого интеграла (7) выразим ω через K из уравнения (7), положив $\boldsymbol{\Omega} = 0$. Получим

$$\omega = K/(\mathbf{i}^T \mathbf{J}\mathbf{i}), \quad K^2 \mathbf{i} \times \mathbf{J}\mathbf{i} = mga (\mathbf{i} \times \mathbf{e})(\mathbf{i}^T \mathbf{J}\mathbf{i})^2. \quad (9)$$

Для исследования устойчивости стационарных движений волчка будем использовать теорему Барбашина–Красовского [2]. Покажем сначала, что стационарные движения находятся во взаимно однозначном соответствии со стационарными точками полной энергии (4) на многообразии, определяемом первым интегралом (7). Записывая условия стационарности функции Лагранжа $L = E + \lambda f + \mu \mathbf{i}^T \mathbf{i}/2$, получим

$$\frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\Omega}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\Omega}} = 0, \quad \text{откуда} \quad (\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\Omega}) + \lambda \mathbf{i} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \boldsymbol{\omega}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\omega}} = 0, \quad \text{откуда} \quad \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + I\boldsymbol{\Omega} + \lambda \mathbf{J}\mathbf{i} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{i}} + \lambda \frac{\partial f}{\partial \mathbf{i}} + \mu \mathbf{i} = 0, \quad \text{откуда} \quad mga \mathbf{e} + \lambda \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \mu \mathbf{i} = 0. \quad (12)$$

Умножив уравнение (10) на тензор \mathbf{J} и вычитая из него уравнение (11), будем иметь $\mathbf{J}\boldsymbol{\Omega} - I\boldsymbol{\Omega} = 0$. Отсюда, учитывая, что момент инерции волчка (несущего тела вместе с шаром) относительно любой оси, проходящей через неподвижную точку O , больше момента инерции шара относительно его центральной оси, получим

$$\boldsymbol{\Omega} = 0, \quad \boldsymbol{\omega} = -\lambda \mathbf{i}, \quad \text{откуда} \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{i}; \quad \omega = -\lambda. \quad (13)$$

Учитывая равенства (13) и умножив уравнение (12) слева векторно на \mathbf{i} , получим уравнение, тождественно совпадающее с уравнением (8).

По теореме Ляпунова те из решений уравнения (8), на которых полная энергия (4) достигает строгого условного минимума на многообразии (7), удовлетворяют достаточным условиям устойчивости (устойчивы в вековом смысле). Если же функция (4) не имеет условного минимума, то соответствующее движение *неустойчиво в вековом смысле*. В свою очередь, по теореме Барбашина–Красовского, если в окрестности рассматриваемой точки на многообразии (7) нет целых траекторий других предельных движений системы, то из вековой устойчивости следует условная асимптотическая устойчивость, а из вековой неустойчивости — неустойчивость по Ляпунову. Здесь под условной асимптотической устойчивостью подразумевается асимптотическая устойчивость по отношению к возмущениям, для которых постоянная первого интеграла (7) не меняется.

Поскольку в рассматриваемом примере все множество предельных движений волчка исчерпывается стационарными вращениями, то для изолированных при фиксированном

значении K решений уравнения (9) из вековой устойчивости будет следовать условная асимптотическая устойчивость, а из вековой неустойчивости - неустойчивость по Ляпунову.

Анализ вековой устойчивости проведем в два этапа. Сначала определим условно стационарные точки полной энергии по переменным Ω и ω при фиксированном значении вектора \mathbf{i} . Получим систему уравнений (10), (11), решения которой даются равенствами (13). Характер условной стационарности по указанным переменным будет определяться квадратичной формой

$$d^2E + \lambda d^2f = (d\omega)^T \mathbf{J} d\omega + 2I(d\omega)^T d\Omega + I(\Omega)^T d\Omega \quad (14)$$

на множестве переменных $d\Omega$, $d\omega$, удовлетворяющих уравнению

$$df = \mathbf{i}^T (\mathbf{J}d\omega + Id\Omega) = 0.$$

Поскольку форма (14) является, очевидно, строго положительно определенной, то на решениях (13) достигается строгий условный минимум полной энергии по переменным Ω и ω . На втором этапе, подставляя решения (13) в выражение (4), получим функцию

$$W = E|_{(13)} = \omega^2 \mathbf{i}^T \mathbf{J} \mathbf{i} / 2 + m g a \mathbf{i}^T \mathbf{e} = K^2 / (2\mathbf{i}^T \mathbf{J} \mathbf{i}) + m g a \mathbf{i}^T \mathbf{e}, \quad (15)$$

зависящую только от положения вектора \mathbf{i} в базисе $O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$. Эта функция представляет собой эффективную потенциальную энергию волчка. Ее стационарные точки по переменной \mathbf{i} будут соответствовать стационарным движениям волчка, а характер ее стационарности будет совпадать с характером условной стационарности полной энергии (4) на многообразии (7). При этом точки строгого минимума функции (15) будут удовлетворять достаточным условиям устойчивости, а точки, в которых отсутствует минимум, будут неустойчивы в вековом смысле.

Отметим, что функция (15) совпадает с эффективной потенциальной энергией волчка, состоящего из одного твердого тела [3].

Стационарные точки функции (15) определяются как стационарные точки функции Лагранжа $L = W + \lambda \mathbf{i}^T \mathbf{i} / 2$ по переменной \mathbf{i} из уравнения

$$-\frac{K^2 \mathbf{J} \mathbf{i}}{(\mathbf{i}^T \mathbf{J} \mathbf{i})^2} + m g a \mathbf{e} + \lambda \mathbf{i} = 0, \quad (16)$$

которое эквивалентно уравнению (9).

Характер стационарности определяется значениями квадратичной формы

$$d^2L = d^2W + \lambda (d\mathbf{i})^T d\mathbf{i} = (d\mathbf{i})^T \mathbf{P} d\mathbf{i} \quad (17)$$

на множестве

$$(d\mathbf{i})^T \mathbf{i} = 0. \quad (18)$$

Матрица \mathbf{P} выражается формулой

$$\mathbf{P} = \frac{K^2}{(\mathbf{i}^T \mathbf{J} \mathbf{i})^2} \left(\frac{4(\mathbf{J} \mathbf{i})(\mathbf{J} \mathbf{i})^T}{\mathbf{i}^T \mathbf{J} \mathbf{i}} - \mathbf{J} \right) + \lambda \mathbf{E}; \quad \lambda = \frac{K^2}{(\mathbf{i}^T \mathbf{J} \mathbf{i})} - m g a \mathbf{e}^T \mathbf{i}.$$

Здесь \mathbf{E} — единичная матрица. В случае строгой положительной определенности формы (17) на множестве (18) гарантируется устойчивость исследуемого движения. Если же квадратичная форма (17) принимает отрицательные значения на некотором подмножестве множества (18), то соответствующее движение неустойчиво в вековом смысле.

Далее будем считать, что $O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ — базис главных осей инерции волчка для точки O . Обозначим через A , B , C соответствующие главные моменты инерции. Анализ стационарных вращений волчка ограничим рассмотренным в [3] случаем, когда центр масс волчка лежит на одной из главных осей инерции. Для определенности положим $\mathbf{e} = \mathbf{e}_3$, $A > B$.

Отметим, что в [3] приведены результаты исследования для волчка с центром масс на оси наибольшего момента инерции, т.е. при $C > A > B$. Здесь будут рассмотрены и два других случая $A > C > B$ и $A > B > C$.

Обозначив через α, β, γ направляющие косинусы вектора \mathbf{i} в базисе $O \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$, получим из (16) следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{K^2 A \alpha}{(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)^2} &= \lambda \alpha, \\ \frac{K^2 B \beta}{(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)^2} &= \lambda \beta, \\ \frac{K^2 C \gamma}{(A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2)^2} &= m g a + \lambda \gamma. \end{aligned} \quad (19)$$

При отсутствии динамической симметрии (при $A \neq B \neq C$) эта система может иметь только решения следующего вида:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = \pm 1, \quad \text{откуда} \quad \mathbf{i} = \pm \mathbf{e}_3, \quad (20)$$

$$\beta = 0, \quad \alpha = \sin x \neq 0, \quad \text{откуда} \quad \mathbf{i} = \mathbf{e}_3 \cos x + \mathbf{e}_1 \sin x, \quad (21)$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \sin y \neq 0, \quad \text{откуда} \quad \mathbf{i} = \mathbf{e}_3 \cos y + \mathbf{e}_2 \sin y. \quad (22)$$

Решения (20) определены для любого значения K . При этом каждому значению K соответствует два стационарных вращения волчка, определяемых решениями (20). Для одного из них (прямые Γ_0 на рис. 2–4) центр масс волчка направлен вертикально вниз, а для другого (прямые Γ_1) — вертикально вверх. Величина угловой скорости для этих вращений определяется выражением

$$\omega = K/C; \quad \boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{i} = \pm \omega \mathbf{e}_3.$$

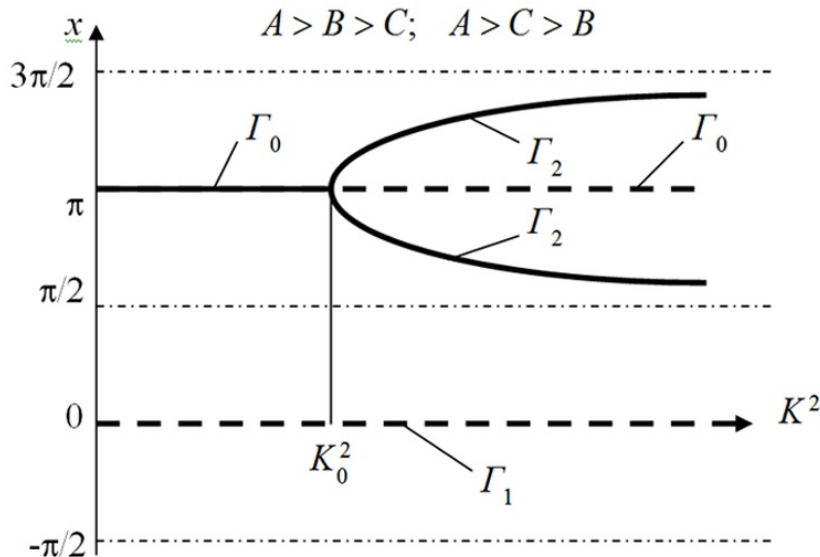


Рис. 2

Для решений (20) квадратичная форма (17) на множестве (16) приводится к квадратичной форме двух независимых переменных:

$$d^2 L^* = [K^2(C - A)/C^2 - m g a \gamma](d\alpha)^2 + [K^2(C - B)/C^2 - m g a \gamma](d\beta)^2.$$

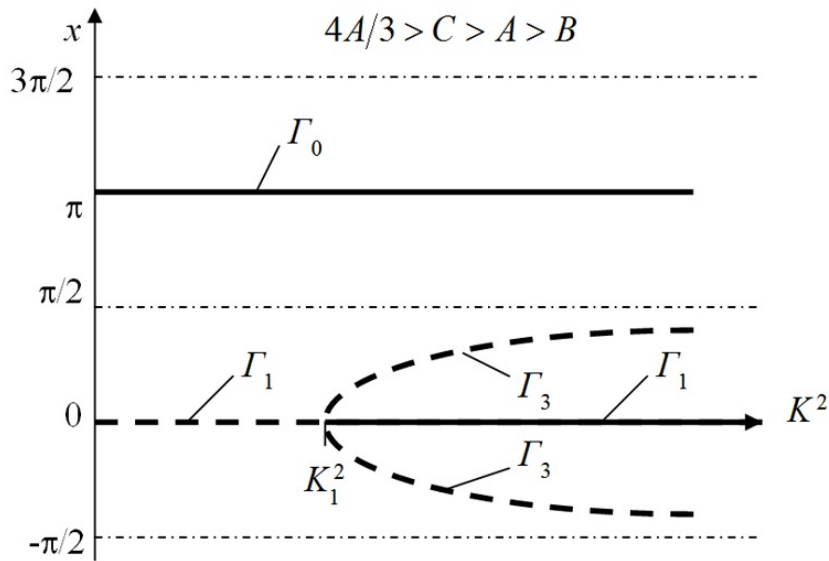


Рис. 3

Отсюда следует, что при $\gamma = +1$ (для вращений с верхним положением центра масс волчка) вековая устойчивость может иметь место только при $C > A > B$, т.е. для волчка, у которого центр масс лежит на оси наибольшего момента инерции. При этом область устойчивости этих вращений описывается неравенством

$$K^2 > C^2 m g a / (C - A); \quad \gamma = +1, \quad C > A > B.$$

Для вращений с нижним положением центра масс волчка (при $\gamma = -1$) устойчивость будет иметь место при любых значениях K , если центр масс волчка лежит на оси наибольшего момента инерции, а в остальных случаях (при $A > C > B$ и $A > B > C$) — область их устойчивости ограничена неравенством

$$K^2 < K_1^2 = C^2 m g a / (A - C); \quad \gamma = -1.$$

Решения вида (21) находятся из уравнения

$$m g a (A \sin^2 x + C \cos^2 x)^2 = (C - A) K^2 \cos x, \tag{23}$$

получаемого из системы (19) исключением множителя λ . При $C < A$ это уравнение имеет два решения $x_1(K)$ и $x_2(K)$, определенных в диапазоне

$$K^2 \geq C^2 m g a / (A - C) = K_0^2.$$

Для этих решений $\cos x_1 = \cos x_2 < 0$ и им соответствуют кривые Γ_2 на рис. 2, которые ответвляются от решений Γ_0 (20), соответствующих нижнему положению центра масс волчка.

Случай $C > A$ разделяется на два отдельных случая.

1) $A < C < 4A/3$. Существует два решения, симметричных относительно точки $x = 0$ (кривая Γ_3 на рис. 3), определенных в диапазоне

$$K^2 \geq K_1^2 = C^2 m g a / (C - A);$$

2) $C > 4A/3$. При

$$K_2^2 = 16 m g a A^{3/2} / (3 \sqrt{3(C - A)}) \leq K^2 \leq K_1^2$$

существует 4 решения, попарно симметричных относительно точки $x = 0$, а в диапазоне $K^2 > K_1^2$ — два решения (кривая Γ_4 на рис. 4).

Решения вида (22) анализируются аналогичным образом.

Приведем результаты анализа вековой устойчивости стационарных вращений волчка. Ниже перечисляются только устойчивые решения, а остальные по умолчанию неустойчивы в вековом смысле.

Если $A > B > C$ или $A > C > B$ (центр масс лежит на оси наименьшего или среднего момента инерции), то в диапазоне $K^2 < K_0^2$ вековой устойчивостью обладают только вращения вокруг главной оси \mathbf{e}_3 с нижним положением центра масс (решения Γ_0), а в диапазоне $K^2 < K_0^2$ — только решения Γ_2 (21), для которых радиус-вектор центра масс имеет отрицательную проекцию на вертикаль (рис. 2).

Если центр масс лежит на оси наибольшего момента инерции, т.е. $C > A > B$, то для всех значений K устойчивы решения Γ_0 , а в диапазоне $K^2 > K_1^2$ устойчивы решения Γ_1 , соответствующие вращениям вокруг главной оси \mathbf{e}_3 с верхним положением центра масс волчка (рис. 3). Кроме того, при $C > 4A/3$ в диапазоне $K_2^2 < K^2 < K_1^2$ устойчивы еще два решения из (21) (часть кривой Γ_4), для которых радиус-вектор центра масс имеет положительную проекцию на вертикаль (рис. 4).

На рис. 2–4 устойчивые решения изображены сплошными линиями, а неустойчивые в вековом смысле решения — штриховыми.

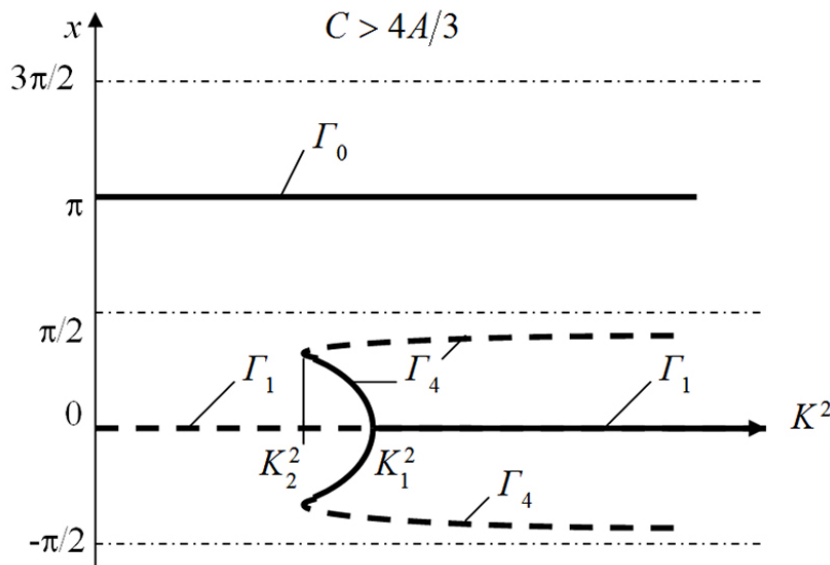


Рис. 4

В рассмотренном примере предельные движения волчка с внутренней диссипацией исчерпываются стационарными вращениями и представляют собой изолированные точки при фиксированном значении постоянной K первого интеграла (7). Поэтому из вековой устойчивости следует условная асимптотическая устойчивость, а из вековой неустойчивости — неустойчивость по Ляпунову.

Полученные результаты остаются в силе и для динамически симметричного волчка (при $A = B$). В этом случае для эффективной потенциальной энергии (15) получается выражение

$$W = \frac{K^2}{2(A + (C - A)\gamma^2)^2} + mga\gamma; \quad \gamma = \cos\theta, \quad (24)$$

зависящее только от угла θ между вертикалью \mathbf{i} и осью симметрии \mathbf{e}_3 . Стационарными точками функции (24) являются решения $\sin\theta = 0$, которые совпадают с (20), а также решения уравнения (23), где $x = \theta$.

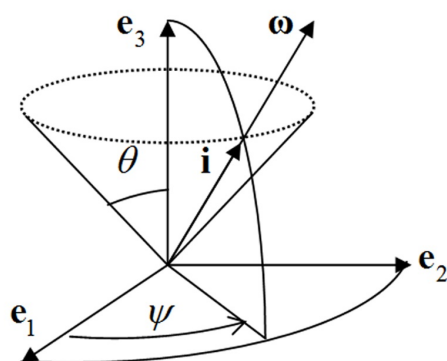


Рис. 5

Случай динамически симметричного волчка отличается от общего случая только тем, что здесь стационарные вращения с отклоненным от вертикали центром масс представляют собой не изолированные точки при фиксированном значении K , а континуум: в теле волчка ось вращения может занимать любое положение на поверхности кругового конуса (рис. 5). Вследствие этого для указанных вращений полученные выше утверждения об устойчивости по всем переменным заменяются утверждениями об устойчивости по части переменных. Если, например, положение оси \mathbf{i} в базисе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ задавать сферическими координатами ψ, θ (рис. 5), то точки строгого минимума функции (24) будут асимптотически устойчивы по фазовым переменным $\omega, \Omega, \theta, \dot{\theta}, \dot{\psi}$. Из-за отсутствия устойчивости по переменной ψ волчок может прийти в режим стационарного вращения с любым значением этого угла.

Отметим, что в рассматриваемой задаче и для симметричного волчка нет других первых интегралов, кроме (7). При этом условие устойчивости вращений вокруг оси симметрии с верхним положением центра масс

$$K^2 > K_1^2 = C^2 m g a / (C - A), \quad C > A$$

отличается от условия Майевского $K^2 > 4Amga$ [4]. Условие Майевского гарантирует устойчивость и при $C < A$, когда в рассмотренном примере нет устойчивых вращений с верхним положением центра масс волчка. Кроме того, при $C > A$ имеем $K_1^2 > 4Amga$. Объясняется это различие тем, что указанные вращения в диапазоне $4Amga < K^2 < C^2 m g a / (C - A)$ неустойчивы в вековом смысле. При этом для волчка, состоящего из одного твердого тела, их устойчивость по Ляпунову обеспечивается гироскопическими силами, а в рассмотренном примере за счет внутренних диссипативных сил такая устойчивость разрушается.

Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы». Соглашение 14.A18.21.0374.

Литература

1. Амелькин Н.И. Об асимптотических свойствах движений спутников в центральном поле, обусловленных внутренней диссипацией // ПММ. — 2011. — Т. 75, № 2. — С. 204–223.
2. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Мир, 1980.
3. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. — М.: Эдиториал УРСС, 1998.
4. Амелькин Н.И. Динамика твердого тела. — М.: МФТИ, 2010.

Поступила в редакцию 02.03.2012.