УДК 517.983

Г.Г. Амосов[1,2], *А.И. Днестрян*[2]

[1]Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
[2]Московский физико-технический институт (государственный университет)

О спектре семейства интегральных операторов, определяющих симплектическую квантовую томограмму*

В предлагаемой работе найдены собственные функции и собственные значения семейства интегральных операторов, определяющих симплектическую квантовую томограмму. Показано, что при определенных параметрах рассматриваемые преобразования представляют собой дробное преобразование Фурье. Вычислены дисперсии канонических наблюдаемых в состояниях из спектра.

Ключевые слова: симплектическая квантовая томограмма, дробное преобразование Фурье, спектр интегрального оператора.

В данной работе мы рассматриваем семейство интегральных операторов $\hat F_{\mu,\nu}$, определенных в пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$. Здесь μ, ν — действительные параметры, $\nu \neq 0$.

$$\hat F_{\mu,\nu}[\psi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}}\,\psi(y)\,dy \quad (1)$$

Видно, что при $\mu = 0$, $\nu = 1$ действие оператора есть прямое преобразование Фурье. Мотивировка исследования такого семейства связана с тем, что функция

$$\omega(x,\mu,\nu) = |\hat F_{\mu,\nu}[\psi](x)|^2$$

представляет собой симплектическую квантовую томограмму [1] состояния с волновой функцией ψ.

Из определения сразу можно увидеть некоторые свойства оператора $\hat F_{\mu,\nu}$: линейность и унитарность. Линейность очевидна. Оператор $\hat F_{\mu,\nu}$ является композицией умножения на единичную по модулю функцию и преобразования Фурье, поэтому сохраняет норму в $L^2(\mathbb{R})$.

Существует обратный оператор $\hat F^{-1}_{\mu,\nu} = \hat F_{\mu,-\nu}$. В самом деле:

$$\big(\hat F_{\mu,\nu}\cdot \hat F_{\mu,-\nu}\big)[\psi](x) = \frac{1}{2\pi|\nu|}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} e^{-i\frac{\mu y^2}{2\nu}} \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\mu t^2}{2\nu} + i\frac{yt}{\nu}}\,\psi(t)\,dt\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi|\nu|}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\mu t^2}{2\nu}} e^{i\frac{t-x}{\nu}y}\,\psi(t)\,dt\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi|\nu|}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\mu t^2}{2\nu}}\,\psi(t)\,dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{t-x}{\nu}y}dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi|\nu|}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\mu t^2}{2\nu}}\, 2\pi\delta\Big(\frac{t-x}{\nu}\Big)\psi(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{|\nu|}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\mu t^2}{2\nu}}\,|\nu|\delta(t-x)\psi(t)\,dt = \psi(x).$$

Итак,

$$\hat F^{-1}_{\mu,\nu} = \hat F_{\mu,-\nu} = \hat F^{*}_{\mu,\nu} = \hat F^{+}_{\mu,\nu}. \quad (2)$$

Обозначим $\hat x$ и $\hat p$ — стандартные операторы координаты и импульса, действующие в пространстве H по формуле

$$(\hat x f)(x) = x f(x),\ \ (\hat p f)(x) = -i\,\frac{d}{dx}\,f(x),$$

$f \in H$. Вычислим действие для композиции $\hat F_{\mu,\nu}$ и наблюдаемой $\mu\hat x + \nu\hat p$:

$$\big(\hat F_{\mu,\nu}\cdot(\mu\hat x + \nu\hat p)\big)[\psi](x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} \Big(\mu y - i\nu\,\frac{d}{dy}\Big)\psi(y)\,dy =$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}}\, y\psi(y)\,dy - \frac{i\nu}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}}\,\frac{d}{dy}\,\psi(y)\,dy =$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}}\, y\psi(y)\,dy - \frac{i\nu}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}}\,\psi(y)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\nu}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy}\Big(e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}}\Big)\psi(y)\,dy =$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}}\, y\psi(y)\,dy + \frac{i\nu}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(i\,\frac{\mu y}{\nu} - i\,\frac{x}{\nu}\Big) e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}}\,\psi(y)\,dy =$$

*Работа первого автора частично поддержана грантом АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/12136.

$$= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} y\psi(y)\, dy -$$

$$- \frac{\mu}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} y\psi(y)\, dy +$$

$$+ \frac{x}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} \psi(y)\, dy =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} \psi(y)\, dy = \hat{x}\cdot \hat{F}_{\mu,\nu}[\psi](x).$$

Теперь имеем свойство оператора $\hat{F}_{\mu,\nu}$:

$$F^{+}_{\mu,\nu}\hat{x}\hat{F}_{\mu,\nu} = \mu\hat{x} + \nu\hat{p}. \tag{3}$$

Из последней формулы следует

$$\hat{F}^{+}_{\mu,\nu}\hat{p}\hat{F}_{\mu,\nu} =$$

$$= \frac{1}{-\nu}\, \hat{F}_{\mu,-\nu}(\mu\hat{x} - \nu\hat{p})\hat{F}^{+}_{\mu,-\nu} + \frac{\mu}{\nu}\, \hat{F}^{+}_{\mu,\nu}\hat{x}\hat{F}_{\mu,\nu} =$$

$$= -\frac{1}{\nu}\,\hat{x} + \frac{\mu}{\nu}\,(\mu\hat{x} + \nu\hat{p}) = \frac{\mu^2 - 1}{\nu}\,\hat{x} + \mu\hat{p}. \tag{4}$$

Основной нашей задачей является поиск собственных функций и собственных значений $\hat{F}_{\mu,\nu}$. Вначале установим, как действует $\hat{F}_{\mu,\nu}$ на основное состояние квантового осциллятора $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Предложение 1.

$$\hat{F}_{\mu,\nu}[e^{-\frac{x^2}{2}}] = \frac{1}{\sqrt{|\nu|\left(1 - i\,\frac{\mu}{\nu}\right)}}\, e^{\left(i\mu - \frac{1}{\nu - i\mu}\right)\frac{x^2}{2\nu}}$$

(под корнем будем подразумевать такой, что его действительная часть положительна). □

Замечание. Видно, что в общем случае $e^{-\frac{x^2}{2}}$ не является собственной функцией оператора.

Доказательство.

$$\hat{F}_{\mu,\nu}[e^{-\frac{x^2}{2}}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{(i\mu - \nu)y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}\frac{y^2}{2} - i\frac{xy}{\nu}}\, dy.$$

В последнем интеграле сделаем замену: $z = y\sqrt{\tilde{\alpha}}$, $\operatorname{Re}\sqrt{\tilde{\alpha}} > 0$, $\tilde{\alpha} = 1 - i\,\frac{\mu}{\nu}$. Если $\tilde{\alpha} = |\tilde{\alpha}|e^{i\varphi}$, тогда интегрирование будет вестись по прямой L, наклоненной к действительной оси на угол $\varphi/2$ (см. рис. 1):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}\frac{y^2}{2} - i\frac{xy}{\nu}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{L} e^{-\frac{z^2}{2} - i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}}\, \frac{dz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}}.$$

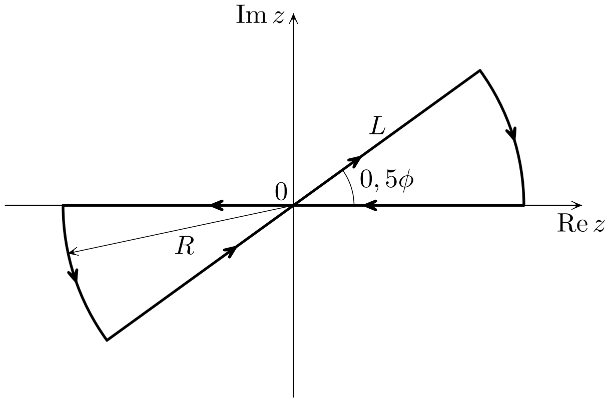

Рис. 1

Рассмотрим контур в комплексной плоскости, изображенный жирными линиями на рисунке. Он состоит из отрезка прямой L, отрезка действительной оси и дуг окружности радиуса R с центром в начале координат. Интеграл по C_R стремится к нулю:

$$\Big|\int\limits_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2} - i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}}\, dz\Big| \leqslant \int\limits_{C_R} \big|e^{-\frac{z^2}{2} - i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}}\, dz\big| =$$

$$= \int\limits_{C_R} \big|e^{-\frac{z^2}{2}}\big| \cdot \big|e^{-i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}}\big| \cdot \big|\,dz\big|.$$

На C_R выполняется $z = \mathrm{R}e^{i\phi}$, $0 \leqslant \phi \leqslant \frac{1}{2}\,\varphi$. Сделаем оценки:

$$\big|e^{-\frac{z^2}{2}}\big| = \Big|e^{-\frac{R^2}{2}e^{2i\phi}}\Big| = \Big|e^{-\frac{R^2}{2}(\cos 2\phi + i\sin 2\phi)}\Big| =$$

$$= \Big|e^{-\frac{R^2}{2}\cos 2\phi} e^{-\frac{R^2}{2} i \sin 2\phi}\Big| = e^{-\frac{R^2}{2}\cos 2\phi} \leqslant e^{-\frac{R^2}{2}\cos\varphi},$$

$\cos\varphi = \dfrac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}$, следовательно, $\big|e^{-\frac{z^2}{2}}\big| \leqslant$ $\leqslant e^{-\frac{R^2}{2}\frac{\nu}{\sqrt{\mu^2+\nu^2}}}$,

$$\big|e^{-i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}}\big| \leqslant e^{\left|-i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}\right|} = e^{\frac{|x|R}{\sqrt{|\tilde{\alpha}|}\nu}} =$$

$$= \exp\left(\frac{|x|R}{\nu\sqrt[4]{1 + \dfrac{\mu^2}{\nu^2}}}\right) \leqslant \exp\left(\frac{|x|R}{\nu}\right).$$

Итак,

$$\int\limits_{C_R} \big|e^{-\frac{z^2}{2}}\big| \cdot \big|e^{-i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}}\big| \cdot \big|\,dz\big| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(-\frac{R^2}{2}\,\frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}\right) \exp\left(\frac{|x|R}{\nu}\right) \int\limits_{C_R} |\,dz| =$$

$$= \exp\left(-\frac{R^2}{2}\,\frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}\right) \exp\left(\frac{|x|R}{\nu}\right) R\varphi,$$

$$\lim_{R\to\infty} \exp\left(-\frac{R^2}{2}\,\frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}\right) \exp\left(\frac{|x|R}{\nu}\right) R\varphi = 0.$$

Функция $f(z) = e^{-\frac{z^2}{2} - i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}}$ регулярна во всей комплексной плоскости, поэтому интеграл по «жирному» контуру равен нулю:

$$\int\limits_L f(z)\,dz + \int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(z)\,dz + \lim_{R\to\infty}\int\limits_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

Мы показали, что последний интеграл равен нулю, следовательно,

$$\int\limits_L f(z)\,dz = -\int\limits_{+\infty}^{-\infty} f(z)\,dz = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz.$$

А такой интеграл легко вычисляется и известен:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\,e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}-i\frac{xz}{\sqrt{\tilde\alpha}\nu}}\,\frac{dz}{\sqrt{\tilde\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tilde\alpha|\nu|}}\,e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}\,e^{-i\frac{x}{\sqrt{\tilde\alpha}\nu}z}\,dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tilde\alpha|\nu|}}\,e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}}\,e^{-\frac{x^2}{2\tilde\alpha\nu^2}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde\alpha|\nu|}}\,e^{\left(i\mu-\frac{1}{\nu-i\mu}\right)\frac{x^2}{2\nu}}. \quad \blacksquare$$

Положим $\mu = \cos\frac{\pi}{2n}$, $\nu = \sin\frac{\pi}{2n}$, тогда

$$\hat F_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}[e^{-\frac{x^2}{2}}] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{2n} - i\cos\frac{\pi}{2n}}}\,e^{\left(i\cos\frac{\pi}{2n} - \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n} - i\cos\frac{\pi}{2n}}\right)\frac{x^2}{2\sin\frac{\pi}{2n}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{i}{i\sin\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{\pi}{2n}}}\cdot e^{\left(i\cos\frac{\pi}{2n} - \sin\frac{\pi}{2n} - i\cos\frac{\pi}{2n}\right)\frac{x^2}{2\sin\frac{\pi}{2n}}} =$$

$$= \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)}}e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Это означает, что волновая функция основного состояния осциллятора будет собственной для оператора $\hat F_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}$. Так ли это для возбужденных уровней осциллятора? Введем стандартные операторы рождения $\hat a^+$ и уничтожения $\hat a$ по формуле

$$\hat a^+ = \frac{\hat x - i\hat p}{\sqrt 2},\ \hat a = \frac{\hat x + i\hat p}{\sqrt 2}.$$

Рассмотрим операторное произведение $\hat F_{\mu,\nu}\hat a^+$. Линейная комбинация операторов координаты и импульса при преобразовании переходит в линейную комбинацию этих операторов. Попытаемся найти оператор $\hat b^+ = \alpha\hat x + \beta\hat p$, такой, что

$$\hat F_{\mu,\nu}\hat a^+ = \hat b^+\hat F_{\mu,\nu}.$$

Предложение 2.

$$\hat b^+ = e^{-i\frac{\pi}{2n}}\hat a^+,$$

так что

$$\hat F_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}\hat a^+ = e^{-i\frac{\pi}{2n}}\hat a^+\hat F_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}. \quad \square$$

Доказательство. Заметим, что

$$\hat a^+ = \hat F^+_{\mu,\nu}\hat b^+\hat F_{\mu,\nu} = \hat F^+_{\mu,\nu}(\alpha\hat x + \beta\hat p)\hat F_{\mu,\nu} = \\ = \alpha\hat F^+_{\mu,\nu}\hat x\hat F_{\mu,\nu} + \beta\hat F^+_{\mu,\nu}\hat p\hat F_{\mu,\nu}.$$

Используем ранее полученное свойство $\hat F_{\mu,\nu}(\mu\hat x + \nu\hat p) = \hat x\hat F_{\mu,\nu}$ и его комплексное сопряжение $\hat F^+_{\mu,\nu}(\mu\hat x - \nu\hat p) = \hat x\hat F^+_{\mu,\nu}$:

$$\hat F^+_{\mu,\nu}\hat p = \frac{\mu}{\nu}\,\hat F^+_{\mu,\nu}\hat x - \frac{1}{\nu}\,\hat x\hat F^+_{\mu,\nu},$$

$$\alpha\hat F^+_{\mu,\nu}\hat x\hat F_{\mu,\nu} + \beta\hat F^+_{\mu,\nu}\hat p\hat F_{\mu,\nu} = \\ = \alpha\hat F^+_{\mu,\nu} + \hat x\hat F_{\mu,\nu} + \beta\,\frac{\mu}{\nu}\,\hat F^+_{\mu,\nu}\hat x\hat F_{\mu,\nu} - \frac{\beta}{\nu}\,\hat x\hat F^+_{\mu,\nu}\hat F_{\mu,\nu},$$

$$\hat F^+_{\mu,\nu}\hat x\hat F_{\mu,\nu} = \hat F^+_{\mu,\nu}\hat F_{\mu,\nu}(\mu\hat x + \nu\hat p) = \mu\hat x + \nu\hat p,$$

$$\hat a^+ = \frac{\hat x - i\hat p}{\sqrt 2} = \left(\alpha + \beta\,\frac{\mu}{\nu}\right)(\mu\hat x + \nu\hat p) - \frac{\beta}{\nu}\,\hat x.$$

Подставляя $\mu = \cos\frac{\pi}{2n}$, $\nu = \sin\frac{\pi}{2n}$ и приравнивая коэффициенты, получим систему

$$\begin{cases} \alpha\cos\frac{\pi}{2n} - \beta\sin\frac{\pi}{2n} = \frac{1}{\sqrt 2}, \\ \alpha\sin\frac{\pi}{2n} + \beta\cos\frac{\pi}{2n} = -\frac{i}{\sqrt 2}. \end{cases}$$

Решение системы:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt 2}\,e^{-i\frac{\pi}{2n}}, \quad \beta = -\frac{i}{\sqrt 2}\,e^{-i\frac{\pi}{2n}}.$$

$\blacksquare$

Теперь мы можем найти собственные функции.

Теорема 1. Волновые функции возбужденных состояний осциллятора

$$\psi_m(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\,\frac{(\hat a^+)^m}{\sqrt{m!}}\,e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2^m m!}}\,H_m(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

являются собственными функциями оператора $\hat F_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}$, отвечающие собственным значениям

$$\lambda_m = e^{-i\frac{\pi m}{2n}}. \quad \square$$

Доказательство. Утверждение может быть доказано по индукции.

Утверждение верно для $m = 0$ с собственным значением $\lambda_0 = 1$ в силу предложения 1. Пусть верно для m с собственным значением λ_m, докажем для $m+1$. Используя предложение 2, получаем

$$\hat F_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}[\psi_{m+1}] = \frac{1}{\sqrt{m+1}}\,\hat F_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}\hat a^+[\psi_m] =$$

$$= \frac{e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{\sqrt{m+1}}\,\hat a^+\hat F_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}[\psi_m] =$$

$$= \frac{e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{\sqrt{m+1}}\,\hat a^+(\lambda_m\psi_m) = \lambda_m e^{-i\frac{\pi}{2n}}\psi_{m+1}. \quad \blacksquare$$

Теперь рассмотрим оператор

$$\hat\Phi_n = \left(e^{i\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{n}-1\right)}\hat F_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^n.$$

Тогда $e^{-\frac{x^2}{2}}$ является неподвижной точкой преобразования

$$\hat\Phi_n[f](x) = \\ = \sqrt{\frac{1 - i\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{2\pi}}e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}}f(y)\,dy. \quad (5)$$

Обозначим $k = \sqrt{\sin\frac{\pi}{2n} - i\cos\frac{\pi}{2n}} = e^{i\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{n}-1\right)}$. Тогда

$$k\hat{F}_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}[e^{-\frac{x^2}{2}}] = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Заметим, что

$$\left(k\hat{F}_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^n \hat{a}^+ = e^{-i\frac{\pi}{2}}\hat{a}^+\left(k\hat{F}_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^n = -i\hat{a}^+\left(k\hat{F}_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}\right)^n,$$

так что ψ_m так же являются собственными функциями $\hat{\Phi}_n$, отвечающими собственным значениям $(-i)^m$. Следовательно, оператор $\hat{\Phi}_n$ является обычным преобразованием Фурье. Тем самым преобразование

$$e^{i\frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{n}-1\right)}\hat{F}_{\cos\frac{\pi}{2n},\sin\frac{\pi}{2n}}$$

является корнем n-й степени из преобразования Фурье. Такое преобразование называется *дробным преобразованием Фурье* и было введено и подробно исследовано в [2].

Теперь вернемся к рассмотрению общего оператора. Результат действия $\hat{F}_{\mu,\nu}[e^{-\frac{x^2}{2}}]$, полученный в предложении 1, наталкивает на мысль, что собственную функцию $\hat{F}_{\mu,\nu}$ нужно искать в виде $e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}$, где a — некоторая, вообще говоря, комплексная постоянная.

Предложение 3. Функция $e^{-\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2\nu}x^2}$ является собственной функцией оператора $\hat{F}_{\mu,\nu}$. □

Доказательство. Рассматривая действие $\hat{F}_{\mu,\nu}[e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}]$ и проводя рассуждения, аналогичные приведенным в предложении 1, получим

$$\hat{F}_{\mu,\nu}[e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}] = \frac{1}{\sqrt{\alpha(a)|\nu|}}\, e^{(i\mu - \frac{1}{a-i\mu})\frac{x^2}{2\nu}},$$

где $\alpha(a) = \dfrac{a-i\mu}{\nu}$. Приравниваем показатели экспонент

$$i\mu - \frac{1}{a-i\mu} = -a$$

и получаем

$$a = \sqrt{1-\mu^2}. \qquad ■$$

В зависимости от значения μ значение a может быть либо действительным, либо мнимым. В случае действительного a (будем считать $a > 0$) функция $e^{-\frac{ax^2}{2\nu}} \in L^2(\mathbb{R})$ и, следовательно, $\hat{F}_{\mu,\nu}[e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}]$ существует. В случае мнимого a функция $e^{-\frac{ax^2}{2\nu}} \notin L^2(\mathbb{R})$, тем не менее функция $\hat{F}_{\mu,\nu}[e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}]$ определена. Более того, $\hat{F}_{\mu,\nu}[1]$ также существует (в смысле того, что интеграл сходится). Это легко показать простым интегрированием:

$$\hat{F}_{\mu,\nu}[1](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}}\, dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}}\, e^{-i\frac{x^2}{2\mu\nu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\sqrt{\frac{\mu}{2\nu}}y - \frac{x}{\sqrt{2\mu\nu}}\right)^2} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}}\, e^{i\frac{x^2}{2\nu}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right)} \sqrt{\frac{2\nu}{\mu}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it^2}\, dt.$$

Последний интеграл вычислим с помощью интегралов Френеля:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it^2}\, dt = 2\int\limits_{0}^{\infty} \left(\cos t^2 + i\sin t^2\right) dt = 2\sqrt{\frac{\pi}{8}} + 2i\sqrt{\frac{\pi}{8}} = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Следовательно,

$$\hat{F}_{\mu,\nu}[1](x) = \sqrt{\frac{1}{\mu}\frac{|\nu|}{\nu}} \exp\left(i\,\frac{x^2}{2\nu}\left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) + i\,\frac{\pi}{4}\right).$$

Аналогично для мнимого $a = i|a|$:

$$\hat{F}_{\mu,\nu}[e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}] = \sqrt{\frac{1}{\mu-|a|}\frac{|\nu|}{\nu}} \exp\left(i\,\frac{x^2}{2\nu}\left(\mu - \frac{1}{\mu-|a|}\right) + i\,\frac{\pi}{4}\right),$$

учитывая, что $|a| = \sqrt{\mu^2-1}$,

$$\hat{F}_{\mu,\nu}[e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}] = \sqrt{(\mu+\sqrt{\mu^2-1})\,\frac{|\nu|}{\nu}} \exp\left(-\,i\,\frac{x^2}{2\nu}\sqrt{\mu^2-1} + i\,\frac{\pi}{4}\right).$$

Итак, найдена одна собственная функция общего оператора. Естественно предположить, что это не единственная собственная функция. Попытаемся найти оператор $\hat{b}$ (в виде линейной комбинации $\hat{x}$ и $\hat{p}$), удовлетворяющий соотношению

$$\hat{F}_{\mu,\nu}\hat{b} = \lambda\hat{b}\hat{F}_{\mu,\nu}.$$

Предложение 4. Операторы

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt[4]{\frac{1-\mu^2}{\nu^2}}\hat{x} \pm i\sqrt[4]{\frac{\nu^2}{1-\mu^2}}\hat{p}\right)$$

удовлетворяют соотношению

$$\hat{F}_{\mu,\nu}\hat{b} = \lambda\hat{b}\hat{F}_{\mu,\nu}. \qquad □$$

Доказательство. Будем искать операторы в виде

$$\hat{b} = \alpha\hat{x} + \beta\hat{p}.$$

Тогда

$$\hat{b} = \lambda\hat{F}^+_{\mu,\nu}\hat{b}\hat{F}_{\mu,\nu} = \lambda\hat{F}^+_{\mu,\nu}(\alpha\hat{x}+\beta\hat{p})\hat{F}_{\mu,\nu} = \lambda(\alpha\hat{F}^+_{\mu,\nu}\hat{x}\hat{F}_{\mu,\nu} + \beta\hat{F}^+_{\mu,\nu}\hat{p}\hat{F}_{\mu,\nu}).$$

Действия $\hat{F}^+_{\mu,\nu}\hat{x}\hat{F}_{\mu,\nu}$ и $\hat{F}^+_{\mu,\nu}\hat{x}\hat{F}_{\mu,\nu}$ найдены нами выше (3) – (4), так что

$$\lambda(\alpha\hat{F}^+_{\mu,\nu}\hat{x}\hat{F}_{\mu,\nu} + \beta\hat{F}^+_{\mu,\nu}\hat{p}\hat{F}_{\mu,\nu}) = \lambda\left(\alpha(\mu\hat{x}+\nu\hat{p}) + \beta\left(\frac{\mu^2-1}{\nu}\,\hat{x} + \mu\hat{p}\right)\right) = \lambda\left(\alpha\mu + \beta\,\frac{\mu^2-1}{\nu}\right)\hat{x} + \lambda(\alpha\nu+\beta\mu)\hat{p}.$$

Приравниваем коэффициенты при каждом операторе и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha(\lambda\mu - 1) + \beta\lambda\,\dfrac{\mu^2 - 1}{\nu} = 0, \\ \alpha\lambda\nu + \beta(\lambda\mu - 1) = 0. \end{cases}$$

По правилу Крамера эта система имеет нетривиальное решение при

$$(\lambda\mu - 1)^2 - \lambda^2(\mu^2 - 1) = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\mu\lambda + 1 = 0,$$

т. е. при $\lambda = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$. Обозначим $\lambda_1 = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1}$ и $\lambda_2 = \mu - \sqrt{\mu^2 - 1}$. При $\lambda = \lambda_1$ имеем $\hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt[4]{\frac{1-\mu^2}{\nu^2}}\hat{x} + i\sqrt[4]{\frac{\nu^2}{1-\mu^2}}\hat{p}\right)$, а при $\lambda = \lambda_2$ получим $\hat{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt[4]{\frac{1-\mu^2}{\nu^2}}\hat{x} - i\sqrt[4]{\frac{\nu^2}{1-\mu^2}}\hat{p}\right)$. ■

Посмотрим, как действуют эти операторы на собственную функцию:

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\exp\Big(-\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2\nu}\,x^2\Big) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\,\gamma^2 x^2\right).$$

Легко видеть, что $\hat{b}_1 f_0 = 0$ и $\hat{b}_2 f_0 = \sqrt{2}\gamma x f_0$, а также $\hat{F}_{\mu,\nu}\hat{b}_2 f_0 = \lambda_2\hat{b}_2\hat{F}_{\mu,\nu}f_0 = \lambda_2\hat{b}_2 f_0$. И вообще $\hat{F}_{\mu,\nu}\hat{b}_2^n f_0 = \lambda_2^n\hat{b}_2^n f_0$.

Итак, найден спектр (набор собственных функций) оператора $\hat{F}_{\mu,\nu}$:

$$f_n = \hat{b}_2^n f_0.$$

Целесообразно назвать $\hat{b}_2$ оператором рождения и обозначить $\hat{b}^+$.

Заметим еще один интересный факт: пусть $\hat{a}^+ = \frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}$ — обычный оператор рождения. Пусть $\hat{a}^+_\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\gamma x - \frac{1}{\gamma}\,\frac{d}{dx}\right)$ имеет смысл оператора рождения на растянутой в γ раз оси. Тогда

$$\hat{b}^+ = \hat{a}^+_\gamma,$$

где $\gamma = \sqrt[4]{\frac{1-\mu^2}{\nu^2}}$, причем $f_0(x) = \psi_0(\gamma x)$, где ψ_0 — волновая функция основного состояния осциллятора.

Итак, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Набор нормированных собственных функций оператора $\hat{F}_{\mu,\nu}$ при $|\mu| < 1$ и $\nu \neq 0$ имеет вид

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{n!}}\,(b^+)^n f_0\right)(x) = \sqrt[8]{\frac{1-\mu^2}{\pi^2\nu^2}}\,\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\,H_n\left(\sqrt[4]{\frac{1-\mu^2}{\nu^2}}x\right)e^{-\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2\nu}x^2}.\square$$

Замечание. Операторы $\hat{b}$ и $\hat{b}^+$ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$[\hat{b},\hat{b}^+] = \frac{1}{2}\left(\gamma\hat{x} + \frac{i}{\gamma}\,\hat{p}\right)\left(\gamma\hat{x} - \frac{i}{\gamma}\,\hat{p}\right) - \frac{1}{2}\left(\gamma\hat{x} - \frac{i}{\gamma}\,\hat{p}\right)\left(\gamma\hat{x} + \frac{i}{\gamma}\,\hat{p}\right) = \left[\frac{i}{\gamma}\,\hat{p},\gamma\hat{x}\right] = -i[\hat{x},\hat{p}] = -i^2 = 1.$$

Вычислим дисперсии координаты и импульса в состояниях с волновыми функциями $f_n(x)$:

$$(D\hat{x})_n = \langle f_n|\hat{x}^2|f_n\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n^2(x)\,dx = \gamma\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\psi_n^2(\gamma x)\,dx = \frac{1}{\gamma^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\gamma x)^2\psi_n^2(\gamma x)\,d(\gamma x) = \frac{1}{\gamma^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} t^2\psi_n^2(t)\,dt = \frac{1}{\gamma^2}\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Здесь ψ_n — волновые функции состояний гармонического осциллятора, а, как известно, дисперсии координаты и импульса осциллятора на n-м возбужденном уровне равны $\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Аналогично для импульса:

$$(D\hat{p})_n = \langle f_n|\hat{p}^2|f_n\rangle = \left\langle f_n\middle| -\frac{d^2}{dx^2}\middle|f_n\right\rangle = \gamma^2\left\langle f_n\middle| -\frac{d^2}{d(\gamma x)^2}\middle|f_n\right\rangle = \gamma^2\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Таким образом, в зависимости от значений параметров μ, ν дисперсии могут принимать любые положительные значения:

$$(D\hat{x})_n = \sqrt{\frac{\nu^2}{1-\mu^2}}\left(n + \frac{1}{2}\right),$$

$$(D\hat{p})_n = \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\nu^2}}\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Литература

1. *Mancini S., Man'ko V.I., Tombesi P.* Symplectic tomography as classical approach to quantum systems // Phys. Lett. A. – 1996. – V. 213. – P. 1–6.

2. *Namias V.* The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics // J. Inst. Math. Appl. – 1980. – V. 25. – P. 241–265.

Поступила в редакцию 16.01.2011