

УДК 517.983

Г.Г. Амосов^{1,2}, А.И. Днестрян²

¹Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

²Московский физико-технический институт (государственный университет)

О спектре семейства интегральных операторов, определяющих симплектическую квантовую томограмму*

В предлагаемой работе найдены собственные функции и собственные значения семейства интегральных операторов, определяющих симплектическую квантовую томограмму. Показано, что при определенных параметрах рассматриваемые преобразования представляют собой дробное преобразование Фурье. Вычислены дисперсии канонических наблюдаемых в состояниях из спектра.

Ключевые слова: симплектическая квантовая томограмма, дробное преобразование Фурье, спектр интегрального оператора.

В данной работе мы рассматриваем семейство интегральных операторов $\hat{F}_{\mu,\nu}$, определенных в пространстве $H = L^2(\mathbb{R})$. Здесь μ, ν — действительные параметры, $\nu \neq 0$.

$$\hat{F}_{\mu,\nu}[\psi](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} \psi(y) dy \quad (1)$$

Видно, что при $\mu = 0, \nu = 1$ действие оператора есть прямое преобразование Фурье. Мотивировка исследования такого семейства связана с тем, что функция

$$\omega(x, \mu, \nu) = |\hat{F}_{\mu,\nu}[\psi](x)|^2$$

представляет собой симплектическую квантовую томограмму [1] состояния с волновой функцией ψ .

Из определения сразу можно увидеть некоторые свойства оператора $\hat{F}_{\mu,\nu}$: линейность и унитарность. Линейность очевидна. Оператор $\hat{F}_{\mu,\nu}$ является композицией умножения на единичную по модулю функцию и преобразования Фурье, поэтому сохраняет норму в $L^2(\mathbb{R})$.

Существует обратный оператор $\hat{F}_{\mu,\nu}^{-1} = \hat{F}_{\mu,-\nu}$. В самом деле:

$$\begin{aligned} (\hat{F}_{\mu,\nu} \cdot \hat{F}_{\mu,-\nu})[\psi](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} e^{-i\frac{\mu y^2}{2\nu}} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\mu t^2}{2\nu} + i\frac{yt}{\nu}} \psi(t) dt dy = \\ &= \frac{1}{2\pi|\nu|} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\mu t^2}{2\nu}} e^{i\frac{t-x}{\nu}y} \psi(t) dt dy = \\ &= \frac{1}{2\pi|\nu|} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\mu t^2}{2\nu}} \psi(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{t-x}{\nu}y} dy = \\ &= \frac{1}{2\pi|\nu|} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\mu t^2}{2\nu}} 2\pi\delta\left(\frac{t-x}{\nu}\right) \psi(t) dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{|\nu|} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{\mu t^2}{2\nu}} |\nu| \delta(t-x) \psi(t) dt = \psi(x).$$

Итак,

$$\hat{F}_{\mu,\nu}^{-1} = \hat{F}_{\mu,-\nu} = \hat{F}_{\mu,\nu}^* = \hat{F}_{\mu,\nu}^+ \quad (2)$$

Обозначим \hat{x} и \hat{p} — стандартные операторы координаты и импульса, действующие в пространстве H по формуле

$$(\hat{x}f)(x) = xf(x), \quad (\hat{p}f)(x) = -i\frac{d}{dx}f(x),$$

$f \in H$. Вычислим действие для композиции $\hat{F}_{\mu,\nu}$ и наблюдаемой $\mu\hat{x} + \nu\hat{p}$:

$$\begin{aligned} (\hat{F}_{\mu,\nu} \cdot (\mu\hat{x} + \nu\hat{p}))[\psi](x) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} \left(\mu y - i\nu \frac{d}{dy}\right) \psi(y) dy = \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} y \psi(y) dy - \\ &\quad - \frac{i\nu}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} \frac{d}{dy} \psi(y) dy = \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} y \psi(y) dy - \\ &\quad - \frac{i\nu}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} \psi(y) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \\ &+ \frac{i\nu}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy} \left(e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} \right) \psi(y) dy = \\ &= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} y \psi(y) dy + \\ &+ \frac{i\nu}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(i\frac{\mu y}{\nu} - i\frac{x}{\nu} \right) e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} \psi(y) dy = \end{aligned}$$

*Работа первого автора частично поддержана грантом АВИЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» № 2.1.1/12136.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} y \psi(y) dy - \\
&\quad - \frac{\mu}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} y \psi(y) dy + \\
&\quad + \frac{x}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} \psi(y) dy = \\
&= \frac{x}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} \psi(y) dy = \hat{x} \cdot \hat{F}_{\mu,\nu}[\psi](x).
\end{aligned}$$

Теперь имеем свойство оператора $\hat{F}_{\mu,\nu}$:

$$F_{\mu,\nu}^+ \hat{x} \hat{F}_{\mu,\nu} = \mu \hat{x} + \nu \hat{p}. \quad (3)$$

Из последней формулы следует

$$\begin{aligned}
&\hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{p} \hat{F}_{\mu,\nu} = \\
&= \frac{1}{-\nu} \hat{F}_{\mu,-\nu} (\mu \hat{x} - \nu \hat{p}) \hat{F}_{\mu,-\nu}^+ + \frac{\mu}{\nu} \hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{x} \hat{F}_{\mu,\nu} = \\
&= -\frac{1}{\nu} \hat{x} + \frac{\mu}{\nu} (\mu \hat{x} + \nu \hat{p}) = \frac{\mu^2 - 1}{\nu} \hat{x} + \mu \hat{p}. \quad (4)
\end{aligned}$$

Основной нашей задачей является поиск собственных функций и собственных значений $\hat{F}_{\mu,\nu}$. Вначале установим, как действует $\hat{F}_{\mu,\nu}$ на основное состояние квантового осциллятора $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Предложение 1.

$$\hat{F}_{\mu,\nu}[e^{-\frac{x^2}{2}}] = \frac{1}{\sqrt{|\nu|} \left(1 - i\frac{\mu}{\nu}\right)} e^{(i\mu - \frac{1}{\nu - i\mu})\frac{x^2}{2}}$$

(под корнем будем подразумевать такой, что его действительная часть положительна). \square

Замечание. Видно, что в общем случае $e^{-\frac{x^2}{2}}$ не является собственной функцией оператора.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\hat{F}_{\mu,\nu}[e^{-\frac{x^2}{2}}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{(\mu-\nu)y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}\frac{y^2}{2} - i\frac{xy}{\nu}} dy.
\end{aligned}$$

В последнем интеграле сделаем замену: $z = y\sqrt{\tilde{\alpha}}$, $\text{Re } \sqrt{\tilde{\alpha}} > 0$, $\tilde{\alpha} = 1 - i\frac{\mu}{\nu}$. Если $\tilde{\alpha} = |\tilde{\alpha}|e^{i\varphi}$, тогда интегрирование будет вестись по прямой L , наклоненной к действительной оси на угол $\varphi/2$ (см. рис. 1):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{\alpha}\frac{y^2}{2} - i\frac{xy}{\nu}} dy = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_L e^{-\frac{z^2}{2} - i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}} \frac{dz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}}.
\end{aligned}$$

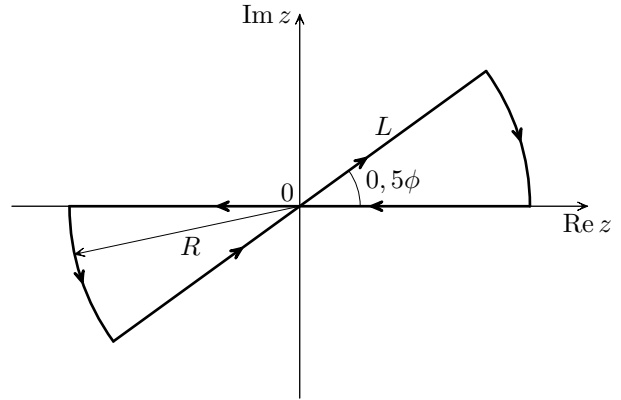


Рис. 1

Рассмотрим контур в комплексной плоскости, изображенный жирными линиями на рисунке. Он состоит из отрезка прямой L , отрезка действительной оси и дуг окружности радиуса R с центром в начале координат. Интеграл по C_R стремится к нулю:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_R} e^{-\frac{z^2}{2} - i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}} dz \right| &\leq \int_{C_R} \left| e^{-\frac{z^2}{2} - i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}} \right| dz = \\
&= \int_{C_R} \left| e^{-\frac{z^2}{2}} \right| \cdot \left| e^{-i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}} \right| \cdot |dz|.
\end{aligned}$$

На C_R выполняется $z = \text{Re } i\phi$, $0 \leq \phi \leq \frac{1}{2}\varphi$. Сделаем оценки:

$$\begin{aligned}
\left| e^{-\frac{z^2}{2}} \right| &= \left| e^{-\frac{R^2}{2} e^{2i\phi}} \right| = \left| e^{-\frac{R^2}{2} (\cos 2\phi + i \sin 2\phi)} \right| = \\
&= \left| e^{-\frac{R^2}{2} \cos 2\phi} e^{-\frac{R^2}{2} i \sin 2\phi} \right| = e^{-\frac{R^2}{2} \cos 2\phi} \leq e^{-\frac{R^2}{2} \cos \varphi}, \\
\cos \varphi &= \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}, \text{ следовательно, } \left| e^{-\frac{z^2}{2}} \right| \leq \\
&\leq e^{-\frac{R^2}{2} \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| e^{-i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}} \right| &\leq e^{\left| -i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu} \right|} = e^{\frac{|x|R}{\sqrt{|\tilde{\alpha}}\nu}} = \\
&= \exp \left(\frac{|x|R}{\nu \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{\nu^2}}} \right) \leq \exp \left(\frac{|x|R}{\nu} \right).
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} \left| e^{-\frac{z^2}{2}} \right| \cdot \left| e^{-i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}} \right| \cdot |dz| &\leq \\
&\leq \exp \left(-\frac{R^2}{2} \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \right) \exp \left(\frac{|x|R}{\nu} \right) \int_{C_R} |dz| = \\
&= \exp \left(-\frac{R^2}{2} \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \right) \exp \left(\frac{|x|R}{\nu} \right) R\varphi, \\
\lim_{R \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{R^2}{2} \frac{\nu}{\sqrt{\mu^2 + \nu^2}} \right) \exp \left(\frac{|x|R}{\nu} \right) R\varphi &= 0.
\end{aligned}$$

Функция $f(z) = e^{-\frac{z^2}{2} - i\frac{xz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}\nu}}$ регулярна во всей комплексной плоскости, поэтому интеграл по «жир-

ному» контуру равен нулю:

$$\int_L f(z) dz + \int_{+\infty}^{-\infty} f(z) dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Мы показали, что последний интеграл равен нулю, следовательно,

$$\int_L f(z) dz = - \int_{+\infty}^{-\infty} f(z) dz = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz.$$

А такой интеграл легко вычисляется и известен:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2} - i\frac{xz}{\sqrt{\alpha\nu}}} \frac{dz}{\sqrt{\tilde{\alpha}}} = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} e^{-i\frac{x}{\sqrt{\alpha\nu}}z} dz = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} e^{-\frac{x^2}{2\tilde{\alpha}\nu^2}} = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\alpha}|\nu|}} e^{(i\mu - \frac{1}{\nu-i\mu})\frac{x^2}{2\nu}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Положим $\mu = \cos \frac{\pi}{2n}, \nu = \sin \frac{\pi}{2n}$, тогда

$$\begin{aligned} & \hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}} [e^{-\frac{x^2}{2}}] = \\ & = \frac{1}{\sqrt{\sin \frac{\pi}{2n} - i \cos \frac{\pi}{2n}}} e^{i \cos \frac{\pi}{2n} - \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n} - i \cos \frac{\pi}{2n}} \frac{x^2}{2 \sin \frac{\pi}{2n}}} = \\ & = \sqrt{\frac{i}{i \sin \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{\pi}{2n}}} \cdot e^{(i \cos \frac{\pi}{2n} - \sin \frac{\pi}{2n} - i \cos \frac{\pi}{2n}) \frac{x^2}{2 \sin \frac{\pi}{2n}}} = \\ & = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{n})}} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{i\frac{\pi}{4}(1-\frac{1}{n})} e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

Это означает, что волновая функция основного состояния осциллятора будет собственной для оператора $\hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}}$. Так ли это для возбужденных уровней осциллятора? Введем стандартные операторы рождения \hat{a}^+ и уничтожения \hat{a} по формуле

$$\hat{a}^+ = \frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a} = \frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}.$$

Рассмотрим операторное произведение $\hat{F}_{\mu,\nu} \hat{a}^+$. Линейная комбинация операторов координаты и импульса при преобразовании переходит в линейную комбинацию этих операторов. Попробуем найти оператор $\hat{b}^+ = \alpha \hat{x} + \beta \hat{p}$, такой, что

$$\hat{F}_{\mu,\nu} \hat{a}^+ = \hat{b}^+ \hat{F}_{\mu,\nu}.$$

Предложение 2.

$$\hat{b}^+ = e^{-i\frac{\pi}{2n}} \hat{a}^+,$$

так что

$$\hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}} \hat{a}^+ = e^{-i\frac{\pi}{2n}} \hat{a}^+ \hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}}. \quad \square$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} \hat{a}^+ & = \hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{b}^+ \hat{F}_{\mu,\nu} = \hat{F}_{\mu,\nu}^+ (\alpha \hat{x} + \beta \hat{p}) \hat{F}_{\mu,\nu} = \\ & = \alpha \hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{x} \hat{F}_{\mu,\nu} + \beta \hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{p} \hat{F}_{\mu,\nu}. \end{aligned}$$

Используем ранее полученное свойство $\hat{F}_{\mu,\nu}(\mu \hat{x} + \nu \hat{p}) = \hat{x} \hat{F}_{\mu,\nu}$ и его комплексное сопряжение $\hat{F}_{\mu,\nu}^+(\mu \hat{x} - \nu \hat{p}) = \hat{x} \hat{F}_{\mu,\nu}^+$:

$$\hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{p} = \frac{\mu}{\nu} \hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{x} - \frac{1}{\nu} \hat{x} \hat{F}_{\mu,\nu}^+,$$

$$\begin{aligned} & \alpha \hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{x} \hat{F}_{\mu,\nu} + \beta \hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{p} \hat{F}_{\mu,\nu} = \\ & = \alpha \hat{F}_{\mu,\nu}^+ + \hat{x} \hat{F}_{\mu,\nu} + \beta \frac{\mu}{\nu} \hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{x} \hat{F}_{\mu,\nu} - \frac{\beta}{\nu} \hat{x} \hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{F}_{\mu,\nu}, \end{aligned}$$

$$\hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{x} \hat{F}_{\mu,\nu} = \hat{F}_{\mu,\nu}^+ \hat{F}_{\mu,\nu} (\mu \hat{x} + \nu \hat{p}) = \mu \hat{x} + \nu \hat{p},$$

$$\hat{a}^+ = \frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}} = \left(\alpha + \beta \frac{\mu}{\nu} \right) (\mu \hat{x} + \nu \hat{p}) - \frac{\beta}{\nu} \hat{x}.$$

Подставляя $\mu = \cos \frac{\pi}{2n}, \nu = \sin \frac{\pi}{2n}$ и приравнявая коэффициенты, получим систему

$$\begin{cases} \alpha \cos \frac{\pi}{2n} - \beta \sin \frac{\pi}{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \alpha \sin \frac{\pi}{2n} + \beta \cos \frac{\pi}{2n} = -\frac{i}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Решение системы:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{2n}}, \quad \beta = -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{2n}}. \quad \blacksquare$$

Теперь мы можем найти собственные функции.

Теорема 1. Волновые функции возбужденных состояний осциллятора

$$\psi_m(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{(\hat{a}^+)^m}{\sqrt{m!}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^m m!}} H_m(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$$

являются собственными функциями оператора $\hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}}$, отвечающие собственным значениям

$$\lambda_m = e^{-i\frac{\pi m}{2n}}. \quad \square$$

Доказательство. Утверждение может быть доказано по индукции.

Утверждение верно для $m = 0$ с собственным значением $\lambda_0 = 1$ в силу предложения 1. Пусть верно для m с собственным значением λ_m , докажем для $m + 1$. Используя предложение 2, получаем

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}} [\psi_{m+1}] & = \frac{1}{\sqrt{m+1}} \hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}} \hat{a}^+ [\psi_m] = \\ & = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{\sqrt{m+1}} \hat{a}^+ \hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}} [\psi_m] = \\ & = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2n}}}{\sqrt{m+1}} \hat{a}^+ (\lambda_m \psi_m) = \lambda_m e^{-i\frac{\pi}{2n}} \psi_{m+1}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим оператор

$$\hat{\Phi}_n = \left(e^{i\frac{\pi}{4}(\frac{1}{n}-1)} \hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}} \right)^n.$$

Тогда $e^{-\frac{x^2}{2}}$ является неподвижной точкой преобразования

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_n [f](x) & = \\ & = \sqrt{\frac{1 - i \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2n} \right)}{2\pi}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{x y}{\nu}} f(y) dy. \quad (5) \end{aligned}$$

Обозначим $k = \sqrt{\sin \frac{\pi}{2n} - i \cos \frac{\pi}{2n}} = e^{i\frac{\pi}{4}(\frac{1}{n}-1)}$.
Тогда

$$k \hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}} [e^{-\frac{x^2}{2}}] = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \left(k \hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}}\right)^n \hat{a}^+ &= e^{-i\frac{\pi}{2}} \hat{a}^+ \left(k \hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}}\right)^n = \\ &= -i \hat{a}^+ \left(k \hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}}\right)^n, \end{aligned}$$

так что ψ_m так же являются собственными функциями $\hat{\Phi}_n$, отвечающими собственным значениям $(-i)^m$. Следовательно, оператор $\hat{\Phi}_n$ является обычным преобразованием Фурье. Тем самым преобразование

$$e^{i\frac{\pi}{4}(\frac{1}{n}-1)} \hat{F}_{\cos \frac{\pi}{2n}, \sin \frac{\pi}{2n}}$$

является корнем n -й степени из преобразования Фурье. Такое преобразование называется *дробным преобразованием Фурье* и было введено и подробно исследовано в [2].

Теперь вернемся к рассмотрению общего оператора. Результат действия $\hat{F}_{\mu, \nu} [e^{-\frac{x^2}{2}}]$, полученный в предложении 1, наталкивает на мысль, что собственную функцию $\hat{F}_{\mu, \nu}$ нужно искать в виде $e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}$, где a — некоторая, вообще говоря, комплексная постоянная.

Предложение 3. Функция $e^{-\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2\nu}x^2}$ является собственной функцией оператора $\hat{F}_{\mu, \nu}$. \square

Доказательство. Рассматривая действие $\hat{F}_{\mu, \nu} [e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}]$ и проводя рассуждения, аналогичные приведенным в предложении 1, получим

$$\hat{F}_{\mu, \nu} [e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}] = \frac{1}{\sqrt{\alpha(a)|\nu|}} e^{(i\mu - \frac{1}{\alpha - i\mu})\frac{x^2}{2\nu}},$$

где $\alpha(a) = \frac{a - i\mu}{\nu}$. Приравниваем показатели экспонент

$$i\mu - \frac{1}{\alpha - i\mu} = -a$$

и получаем

$$a = \sqrt{1 - \mu^2}. \quad \blacksquare$$

В зависимости от значения μ значение a может быть либо действительным, либо мнимым. В случае действительного a (будем считать $a > 0$) функция $e^{-\frac{ax^2}{2\nu}} \in L^2(\mathbb{R})$ и, следовательно, $\hat{F}_{\mu, \nu} [e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}]$ существует. В случае мнимого a функция $e^{-\frac{ax^2}{2\nu}} \notin L^2(\mathbb{R})$, тем не менее функция $\hat{F}_{\mu, \nu} [e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}]$ определена. Более того, $\hat{F}_{\mu, \nu} [1]$ также существует (в смысле того, что интеграл сходится). Это легко показать простым интегрированием:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu, \nu} [1](x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\mu y^2}{2\nu} - i\frac{xy}{\nu}} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{\mu x^2}{2\nu}} e^{-i\frac{x^2}{2\mu\nu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\sqrt{\frac{\mu}{2\nu}}y - \frac{x}{\sqrt{2\mu\nu}})^2} dy = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi|\nu|}} e^{i\frac{x^2}{2\nu}(\mu - \frac{1}{\mu})} \sqrt{\frac{2\nu}{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2} dt.$$

Последний интеграл вычислим с помощью интегралов Френеля:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it^2} dt &= 2 \int_0^{\infty} (\cos t^2 + i \sin t^2) dt = \\ &= 2\sqrt{\frac{\pi}{8}} + 2i\sqrt{\frac{\pi}{8}} = (1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu, \nu} [1](x) &= \\ &= \sqrt{\frac{1}{\mu} \frac{|\nu|}{\nu}} \exp\left(i \frac{x^2}{2\nu} \left(\mu - \frac{1}{\mu}\right) + i \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Аналогично для мнимого $a = i|a|$:

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu, \nu} [e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}] &= \\ &= \sqrt{\frac{1}{\mu - |a|} \frac{|\nu|}{\nu}} \exp\left(i \frac{x^2}{2\nu} \left(\mu - \frac{1}{\mu - |a|}\right) + i \frac{\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

учитывая, что $|a| = \sqrt{\mu^2 - 1}$,

$$\begin{aligned} \hat{F}_{\mu, \nu} [e^{-\frac{ax^2}{2\nu}}] &= \\ &= \sqrt{(\mu + \sqrt{\mu^2 - 1}) \frac{|\nu|}{\nu}} \exp\left(-i \frac{x^2}{2\nu} \sqrt{\mu^2 - 1} + i \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Итак, найдена одна собственная функция общего оператора. Естественно предположить, что это не единственная собственная функция. Попытаемся найти оператор \hat{b} (в виде линейной комбинации \hat{x} и \hat{p}), удовлетворяющий соотношению

$$\hat{F}_{\mu, \nu} \hat{b} = \lambda \hat{b} \hat{F}_{\mu, \nu}.$$

Предложение 4. Операторы

$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{\frac{1 - \mu^2}{\nu^2}} \hat{x} \pm i \sqrt{\frac{\nu^2}{1 - \mu^2}} \hat{p} \right)$$

удовлетворяют соотношению

$$\hat{F}_{\mu, \nu} \hat{b} = \lambda \hat{b} \hat{F}_{\mu, \nu}. \quad \square$$

Доказательство. Будем искать операторы в виде

$$\hat{b} = \alpha \hat{x} + \beta \hat{p}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{b} &= \lambda \hat{F}_{\mu, \nu}^+ \hat{b} \hat{F}_{\mu, \nu} = \lambda \hat{F}_{\mu, \nu}^+ (\alpha \hat{x} + \beta \hat{p}) \hat{F}_{\mu, \nu} = \\ &= \lambda (\alpha \hat{F}_{\mu, \nu}^+ \hat{x} \hat{F}_{\mu, \nu} + \beta \hat{F}_{\mu, \nu}^+ \hat{p} \hat{F}_{\mu, \nu}). \end{aligned}$$

Действия $\hat{F}_{\mu, \nu}^+ \hat{x} \hat{F}_{\mu, \nu}$ и $\hat{F}_{\mu, \nu}^+ \hat{p} \hat{F}_{\mu, \nu}$ найдены нами выше (3) – (4), так что

$$\begin{aligned} \lambda (\alpha \hat{F}_{\mu, \nu}^+ \hat{x} \hat{F}_{\mu, \nu} + \beta \hat{F}_{\mu, \nu}^+ \hat{p} \hat{F}_{\mu, \nu}) &= \\ &= \lambda \left(\alpha (\mu \hat{x} + \nu \hat{p}) + \beta \left(\frac{\mu^2 - 1}{\nu} \hat{x} + \mu \hat{p} \right) \right) = \\ &= \lambda \left(\alpha \mu + \beta \frac{\mu^2 - 1}{\nu} \right) \hat{x} + \lambda (\alpha \nu + \beta \mu) \hat{p}. \end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при каждом операторе и получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha(\lambda\mu - 1) + \beta\lambda \frac{\mu^2 - 1}{\nu} = 0, \\ \alpha\lambda\nu + \beta(\lambda\mu - 1) = 0. \end{cases}$$

По правилу Крамера эта система имеет нетривиальное решение при

$$(\lambda\mu - 1)^2 - \lambda^2(\mu^2 - 1) = 0,$$

$$\lambda^2 - 2\mu\lambda + 1 = 0,$$

т. е. при $\lambda = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$. Обозначим $\lambda_1 = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1}$ и $\lambda_2 = \mu - \sqrt{\mu^2 - 1}$. При $\lambda = \lambda_1$ имеем

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt[4]{\frac{1-\mu^2}{\nu^2}} \hat{x} + i \sqrt[4]{\frac{\nu^2}{1-\mu^2}} \hat{p} \right), \text{ а при } \lambda = \lambda_2$$

получим $\hat{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt[4]{\frac{1-\mu^2}{\nu^2}} \hat{x} - i \sqrt[4]{\frac{\nu^2}{1-\mu^2}} \hat{p} \right)$. ■

Посмотрим, как действуют эти операторы на собственную функцию:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(-\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2\nu} x^2\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \gamma^2 x^2\right). \end{aligned}$$

Легко видеть, что $\hat{b}_1 f_0 = 0$ и $\hat{b}_2 f_0 = \sqrt{2}\gamma x f_0$, а также $\hat{F}_{\mu,\nu} \hat{b}_2 f_0 = \lambda_2 \hat{b}_2 \hat{F}_{\mu,\nu} f_0 = \lambda_2 \hat{b}_2 f_0$. И вообще $\hat{F}_{\mu,\nu} \hat{b}_2^n f_0 = \lambda_2^n \hat{b}_2^n f_0$.

Итак, найден спектр (набор собственных функций) оператора $\hat{F}_{\mu,\nu}$:

$$f_n = \hat{b}_2^n f_0.$$

Целесообразно назвать \hat{b}_2 оператором рождения и обозначить \hat{b}^+ .

Заметим еще один интересный факт: пусть $\hat{a}^+ = \frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}$ — обычный оператор рождения.

Пусть $\hat{a}_\gamma^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\gamma x - \frac{1}{\gamma} \frac{d}{dx} \right)$ имеет смысл оператора рождения на растянутой в γ раз оси. Тогда

$$\hat{b}^+ = \hat{a}_\gamma^+,$$

где $\gamma = \sqrt[4]{\frac{1-\mu^2}{\nu^2}}$, причем $f_0(x) = \psi_0(\gamma x)$, где ψ_0 — волновая функция основного состояния осциллятора.

Итак, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. Набор нормированных собственных функций оператора $\hat{F}_{\mu,\nu}$ при $|\mu| < 1$ и $\nu \neq 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left(\frac{1}{\sqrt{n!}} (b^+)^n f_0 \right) (x) = \\ &= \sqrt[4]{\frac{1-\mu^2}{\pi^2 \nu^2}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\sqrt[4]{\frac{1-\mu^2}{\nu^2}} x \right) e^{-\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{2\nu} x^2}. \square \end{aligned}$$

Замечание. Операторы \hat{b} и \hat{b}^+ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\hat{b}, \hat{b}^+] &= \frac{1}{2} \left(\gamma \hat{x} + \frac{i}{\gamma} \hat{p} \right) \left(\gamma \hat{x} - \frac{i}{\gamma} \hat{p} \right) - \\ &- \frac{1}{2} \left(\gamma \hat{x} - \frac{i}{\gamma} \hat{p} \right) \left(\gamma \hat{x} + \frac{i}{\gamma} \hat{p} \right) = \left[\frac{i}{\gamma} \hat{p}, \gamma \hat{x} \right] = \\ &= -i[\hat{x}, \hat{p}] = -i^2 = 1. \end{aligned}$$

Вычислим дисперсии координаты и импульса в состояниях с волновыми функциями $f_n(x)$:

$$\begin{aligned} (D\hat{x})_n &= \langle f_n | \hat{x}^2 | f_n \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_n^2(x) dx = \\ &= \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi_n^2(\gamma x) dx = \frac{1}{\gamma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\gamma x)^2 \psi_n^2(\gamma x) d(\gamma x) = \\ &= \frac{1}{\gamma^2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \psi_n^2(t) dt = \frac{1}{\gamma^2} \left(n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Здесь ψ_n — волновые функции состояний гармонического осциллятора, а, как известно, дисперсии координаты и импульса осциллятора на n -м возбужденном уровне равны $(n + \frac{1}{2})$. Аналогично для импульса:

$$\begin{aligned} (D\hat{p})_n &= \langle f_n | \hat{p}^2 | f_n \rangle = \left\langle f_n \left| -\frac{d^2}{dx^2} \right| f_n \right\rangle = \\ &= \gamma^2 \left\langle f_n \left| -\frac{d^2}{d(\gamma x)^2} \right| f_n \right\rangle = \gamma^2 \left(n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, в зависимости от значений параметров μ, ν дисперсии могут принимать любые положительные значения:

$$\begin{aligned} (D\hat{x})_n &= \sqrt{\frac{\nu^2}{1-\mu^2}} \left(n + \frac{1}{2} \right), \\ (D\hat{p})_n &= \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\nu^2}} \left(n + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Литература

1. Mancini S., Man'ko V.I., Tombesi P. Symplectic tomography as classical approach to quantum systems // Phys. Lett. A. – 1996. – V. 213. – P. 1–6.
2. Namias V. The fractional order Fourier transform and its application to quantum mechanics // J. Inst. Math. Appl. – 1980. – V. 25. – P. 241–265.

Поступила в редакцию 16.01.2011