

Количественное описание корреляций,  
сопровождающих немарковскую квантовую  
динамику при смешивании марковских процессов

А.Н. Глинов, С.Н. Филиппов

8 мая 2019 г.

- Классический марковский процесс:

$$\begin{aligned} P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0) = \\ = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}). \end{aligned}$$

- Квантовый марковский процесс определяется неоднозначно (например, в терминах полугрупп,  $CP$ -делимости и т.д.). Полная аналогия с классикой невозможна, т.к. получение вероятностных распределений зависит от методики измерения и нарушает корреляции открытой системы с окружением.
- Один из подходов основан на критерии Бройера-Лайне-Пиило (БЛП), который удобен с операционной точки зрения.

- Мера различимости квантовых состояний -  
 $D(\rho_S^1, \rho_S^2) = \frac{1}{2} \|\rho_S^1 - \rho_S^2\|_1$  (возникает в задаче минимизации вероятности ошибки при различении двух состояний); её увеличение - признак немарковости процесса
- Действие квантового канала приводит к уменьшению различимости (потере информации), однако при этом она может возрастать **локально**
- Мера немарковости процесса  $\Phi_t$  -  
 $N(\Phi_t) = \max_{\rho_s^{1,2}} \int_{\sigma > 0} dt \sigma(t)$ , где  $\sigma(t) \equiv \frac{d}{dt} D(\Phi_t \rho_S^1, \Phi_t \rho_S^2)$

# БЛП-критерий и выпуклая комбинация марковских процессов

$$\Phi_t = q_1 \Phi_t^{(1)} + q_2 \Phi_t^{(2)}, \quad q_1 + q_2 = 1, \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0$$

Имеют место ситуации, когда смешивание двух динамических отображений таких, что  $N(\Phi_t) \equiv 0$ , приводит к локальному возрастанию расстояния между состояниями оптимальной пары (в смысле определения величины  $N(\Phi_t)$ )  $\Rightarrow$  проблема корректности БЛП-критерия.

# Микроскопическое рассмотрение немарковости

Микроскопическая модель немарковости Бройера, Амато и Ваккини основана на введении вспомогательного кубита в состоянии

$$\begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{pmatrix},$$

где  $q_1, q_2$  - коэффициенты (веса) смеси. Эволюция составной системы  $S + A$  получается из представления Стайнспринга

$$\Lambda_t[\rho_S] = \text{Tr}_{E_1} \text{Tr}_{E_2} [U_t \rho_S \otimes \rho_{E_1} \otimes \rho_{E_2} \otimes \rho_A U_t^\dagger] = q_1 \Phi_t^{(1)}[\rho_S] \otimes \Pi_1 + q_2 \Phi_t^{(2)}[\rho_S] \otimes \Pi_2,$$

$E_1, E_2$  - окружения, обуславливающие действие каналов  $\Phi_t^{(1)}, \Phi_t^{(2)}$ ;  $\Pi_1, \Pi_2$  - проекторы на базисные состояния кубита  $A$ .

# Канал, деполяризующий кубит $A$

$$(D_p \circ \Lambda_t)[\rho_{S+A}(0)] = p\Lambda_t[\rho_{S+A}(0)] \otimes \tilde{\Pi}_1 + \frac{1-p}{2}\Phi_t[\rho_S(0)] \otimes I \otimes \tilde{\Pi}_2,$$

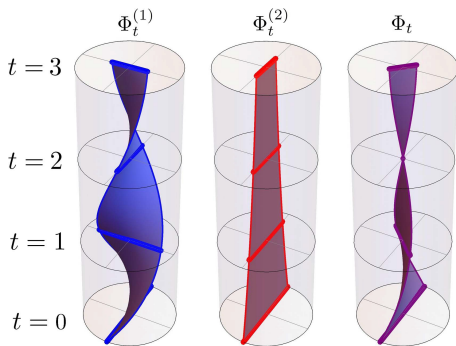
$0 \leq p \leq 1$  - степень деполяризации (характеристика доступа к вспомогательному кубиту);  $\tilde{\Pi}_1, \tilde{\Pi}_2$  - проекторы на собственные состояния второго вспомогательного кубита (такая конструкция позволяет рассмотреть  $D_p \circ \Lambda_t$  как динамическое отображение).

Деполяризация разрушает корреляции между системами  $S$  и  $A$ .

# Пример смеси фазовых затуханий

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \rho_{11} & \mu_k \rho_{12} \\ \mu_k^* \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix};$$

$$\mu_k(t) = \exp[-(\gamma_k + i\lambda_k)t], k = 1, 2$$

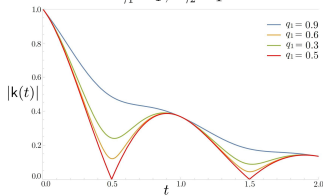


# Невыполнение БЛП-критерия

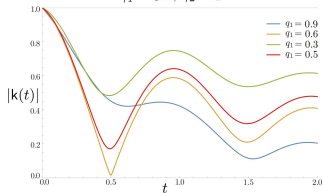
Различимость оптимальной пары состояний задаётся модулем величины

$$\kappa(t) = q_1 \mu_1(t) + q_2 \mu_2(t)$$

$$\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 1$$



$$\gamma_1 = 0.1, \gamma_2 = 1$$



(графики приведены для случая  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2\pi$ ).

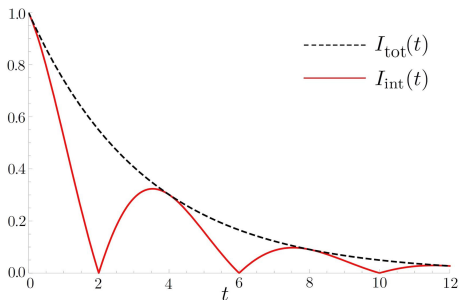


# Деполаризация + динамика

Применим (формально) канал  $D_p$  к системе  $S + A$  в произвольный момент времени  $t$  и отметим два предельных случая:

- $p = 0 \Rightarrow$  немарковский процесс, корреляции между  $S$  и  $A$  отсутствуют;
- $p = 1 \Rightarrow$  марковская эволюция составной системы, описание микроскопической моделью.

Различимость состояний систем  $S$  и  $S + A$ :



$p'$  - значение степени деполяризации, при непрерывном уменьшении которой от  $p = 1$  в некоторый момент времени уменьшение различимости оптимальной пары  $D(\rho_1(t), \rho_2(t))$  состояний составной системы сменяется возрастанием, т.е.  $\frac{\partial}{\partial t} \|(D_p \circ \Lambda_t)[\rho_1(0) - \rho_2(0)]\|_1 = 0$  (причём это имеет отношение к односторонней производной в исследуемом примере).

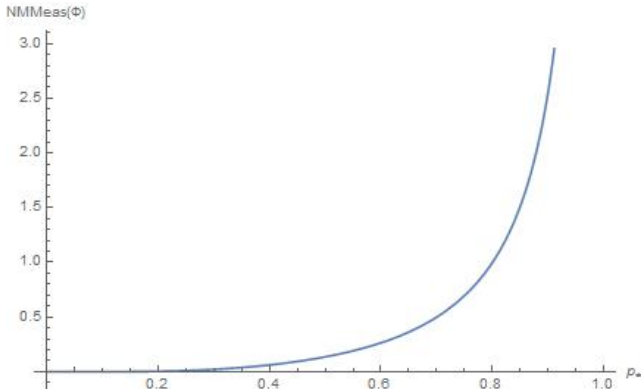
$p'$  для данного примера - значение  $p$ , при котором марковская эволюция (в смысле БЛП-критерия) сменяется немарковской.

$$p_* = \frac{1}{\xi+1} \quad (p_* = p' \text{ при } q_1 = q_2; \xi = \frac{2\gamma}{\Delta\lambda} \geq 0, \gamma = \gamma_1 = \gamma_2, \\ \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1)$$

# Мера немарковости $N(\cdot)$ и $\rho_*$

Помимо связи с максимально возможной корреляцией, значение  $\rho_*$  (или, вернее,  $\xi$ ) может быть рассмотрено как удобная мера немарковости всего процесса. В исследуемом случае

$$N(\Phi) = \frac{1}{1 - \exp(-\pi\xi)} \exp\left(-\xi \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\right)\right) \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$



Из выражений для различимости состояний и определения меры немарковости  $N(\Phi)$  получаем верхнюю оценку

$$N(\Phi) \leq \frac{\rho_*}{1-\rho_*}.$$

Таким образом, знание  $\rho_*$  может позволить оценить интегральную величину немарковости.

Спасибо за внимание!