Квантовые преобразования и квантовые каналы

Ксения Икаева

Лаборатория квантовой теории информации МФТИ

г.Долгопрудный, 2017

Квантовые преобразования

Классическое состояние описывается вектором распределения вероятностей $\mathbf{q}$ и преобразуется с матрицей вероятностей перехода (матрицей эволюции) E:

$$\mathbf{q}' = E\mathbf{q}.$$

Квантовое состояние описывается матрицей плотности ρ и преобразуется по закону

$$\rho' = \Phi[\rho].$$

Отображение Φ называется квантовым преобразованием.

Два простых примера квнтовых преобразований:

- унитарное преобразование

$$\Phi(\rho) = U\rho U^\dagger$$

- измерение

$$\Phi(\rho) = M_m \rho M_m^\dagger$$

Существут три эквивалентных подхода к квантовым преобразованиям.

- Взаиможействие между системой и средой (динамика как следствие этого взаимодействия)
- Представление операторной суммой
- Физические аксиомы (квантовые преобразования описываются на языке физических аксиом)

Взаимодействие с окружением

Одно из трех эквивалентных определений квантовых преобразований:

$$\Phi(\rho) = tr_{env}[U(\rho \otimes \rho_{env})U^{\dagger}].$$

Предполагаем, что исходное состояние - прямое произведение. Достаточно описывать окружение с размерностью d^2, если размерность пространства основной сисьемы d и считать, что среда в начальный момент находится в чистом состоянии.

Представление операторной суммой (Крауса)

$|e_0\rangle\langle e_0|$ - исходное состояние среды, $|e_k\rangle$ - ОНБ в ее пространстве состояний.

$$\Phi(\rho) = \sum_k \langle e_k|U[\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|]U^\dagger|e_k\rangle = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger$$

$E_k = \langle e_k|U|e_0\rangle$ - операторы Крауса. Для сохраняющих след квантовых преобразований

$$\sum_k E_k^\dagger E_k = I$$

(в общем случае $\sum_k E_k^\dagger E_k \leq I$). Это **второе определение** квантового преобразования.

Обратная задача

Найти модельную среду и взаимодействие, которые приводят к преобразованию с заданными операторами Крауса. Имеет ли она решение? - да.

Приведем доказательство для схораняющего след отображения, у которого $\sum_k E_k^\dagger E_k = I$. Найдем унитарный оперптор U.

Пусть среда в начальный момент находится в чистом состоянии $|e_0\rangle$, $|\psi\rangle$-некоторый вектор состояния системы. Определим оператор U со следующим действием на состояние вида $|\psi\rangle|e_0\rangle$:

$$U|\psi\rangle|e_0\rangle = \sum_k E_k|\psi\rangle|e_k\rangle.$$

Тогда для произвольных $|\psi\rangle$ и $|\phi\rangle$ имеем

$$\langle\psi|\langle e_0|U^\dagger U|\phi\rangle|e_0\rangle = \sum_k \langle\psi|E_k^\dagger E_k|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle$$

из соотношения полноты для операторов Крауса. Значит, **U можно расширить до унитарного оператора, действующего на всем пространстве объединенной системы.** Так же легко проверить, что

$$tr_E[U(\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|)U^\dagger] = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger,$$

что и требовалось доказать.

Аксиоматический подход

Определим квантовое преобразование Φ как отображение из множества операторов плотности Q_1 в множество операторов плотности Q_2, удовлетворяющее трем аксиомам.

A1 $tr(\Phi(\rho))$ - вероятность процесса. $0 \leq tr(\Phi(\rho)) \leq 1$.
A2 Φ линейно на Q_1.
A3 Φ - вполне положительное.

Remark Если $tr(\Phi(\rho)) = tr(\rho) = 1$, то это определение квантового канала.

Теорема

Отображение Φ *удовлетворяет аксиомам* **A1, A2, A3** *тогда и только тогда, когда*

$$\Phi(\rho) = \sum_i E_i \rho E_i^\dagger$$

для некоторого набора операторов E_i*, которые отображают исходное гильбертово пространство в результирующее гильбериово пространство, и* $\sum_i E_i^\dagger E_i \leq I$*.*

Кубит

Состояние одного кубита всегда может быть записано **в представлении Блоха**:

$$\rho = \frac{I + \vec{r}\vec{\sigma}}{2}$$

$\vec{r}$ - трехкомпонентный действительный вектор. Произвольное сохраняющее след квантовое преобразование эквивалентно отображению вида

$$\vec{r} \to \vec{r}' = M\vec{r} + \vec{c}$$

M - действительная матрица. Это аффинное отображение, переводящее сферу Блоха в себя.

То есть для кубитов есть взаимно-однозначное соответствие с точками в трехмерном геометрическом пространстве. Для кутритов, например, такого нет.

Примеры

1. Канал с переворотом фазы (dephasing).

$$E_0 = \sqrt{p} I = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_1 = \sqrt{1-p} Z = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (2p-1) r_x \\ (2p-1) r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

Сжатие к оси z.

2. Затухание амплитуды (amplitude damping).

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}, \qquad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Нужен для описания явлений, связанных с потерями энергии в квантовых системах.

Определение 1

Отображением Ландау-Стритера [1] *называется отображение вида*

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{j(j+1)}(J_x \rho J_x + J_y \rho J_y + J_z \rho J_z),$$

где J_x, J_y, J_z *- генераторы группы* $SU(2)$ *в представлении матриц размерности* $2j+1$.

Что о нем известно?

- является неунитарным экстремальным каналом ($j > 1/2$)
- обладает свойством унитальности $\Phi(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$.

[1] L. J. Landau, R. F. Streater. On Birkhoff's theorem for doubly stochastic completely positive maps of matrix algebras // Linear Algebra and its Applications **193**, 1 (1993)

Случай $j = 1/2$

$$\Phi(\rho) = \frac{1}{3}\sigma_\alpha \rho \sigma_\alpha$$

Является random unitary. При больших спинах это свойство не сохраняется. На сфере Блоха:

$$\vec{r} \to -\frac{\vec{r}}{3}$$

То есть это инверсия со сжатием. Обычная инверсия (NOT) - σ_x- инверсия вокруг одной оси. Это не вполне положительное отображение. ЛС в этом случае - его SPA.

Так как Φ является вполне положительным отображнием, то из **теоремы Стайнспринга** следует, что существует оператор плотности окружения ρ_{env} и унитарный оператор U, такие что

$$\Phi(\rho) = tr_{env}\left(U\left(\rho \otimes \rho_{env}\right)U^{\dagger}\right)$$

(**представление Стайнспринга**).

Обозначим $B(H_{sys})$, $B(H_{env})$ — линейное пространство всех эрмитовых операторов в H_{sys} и H_{env} соответственно. Тогда Φ: $B(H_{sys}) \to B(H_{sys})$, U: $H_{sys} \otimes H_{env} \to H_{sys} \otimes H_{env}$.

Случай $j = 1$

Рассмотрим частный случай $j = 1$ ($dimH_{sys} = 2j + 1 = 3$). В этом случае генераторы группы $SU(2)$ в представлении матриц 3×3 есть

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \; J_y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\imath}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\imath}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{\imath}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\imath}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 1. Найти представление Стайнспринга.

Решение. Будем искать явный вид представления Стайнспринга с размерностью окружения $dimH_{env} = 3$.
Запишем оператор U в виде

$$U = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes |e_i\rangle\langle e_j|,$$

где $|e_i\rangle \in H_{env}$ — базисные векторы, E_{ij}: $H_{sys} \to H_{sys}$, $i, j \in \overline{1,3}$.
Пусть $\rho_{env} = |e_1\rangle\langle e_1|$. Тогда

$$tr_{env}\{U\left(\rho_{sys} \otimes \rho_{env}\right) U^\dagger\} = \sum_k A_k \rho_{sys} A_k^\dagger,$$

$$A_k \equiv E_{k1} = (\mathbb{I} \otimes \langle e_k|)U(\mathbb{I} \otimes |e_1\rangle).$$

Тогда $A_k = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} J_k = \frac{1}{\sqrt{2}} J_k$, $k \in x, y, z$ или $k \in \overline{1,3}$.

Из условий $A_k = \frac{1}{\sqrt{2}} J_k$, $k \in \{x, y, z\}$ и унитарности $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$ найдем:

$$\widetilde{U} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\imath}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{\imath}{2} \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\imath}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\imath}{2} \\
\hline
0 & -\frac{\imath}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\imath}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\
\frac{\imath}{2} & 0 & -\frac{\imath}{2} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{\imath}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2} & 0 \\
0 & \frac{\imath}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
\hline
\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\imath}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{\imath}{2\sqrt{2}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\imath}{2\sqrt{2}} & 0
\end{array}\right),$$

$\widetilde{U} = SWAP$ U $SWAP$, где $SWAP$ - оператор перестановки, т.е. $\widetilde{U} : H_{env} \otimes H_{sys} \to H_{env} \otimes H_{sys}$. $\rho_{env} = |e_1\rangle\langle e_1|$, $|e_1\rangle$ — базисный вектор из H_{env}.

Перейдем от $\widetilde{U}$ к U и окончательно получим **представление Стайнспринга**:

$$U = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\imath}{\sqrt{2}} & -\frac{\imath}{2} \\
0 & 0 & \frac{\imath}{\sqrt{2}} & -\frac{\imath}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & \frac{\imath}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{\imath}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{\imath}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
\frac{\imath}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} - \frac{\imath}{2\sqrt{2}} & -\frac{\imath}{2} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\imath}{2} \\
0 & 0 & 0 & \frac{\imath}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{\imath}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0
\end{array}\right)$$

$\rho_{env} = |e_1\rangle\langle e_1|$, $|e_1\rangle$ — базисный вектор из H_{env}.

Задача 2. Рассмотрим комплементарный канал $\tilde{\Phi}$: $\tilde{\Phi}(\rho) = tr_{sys}\left(U\left(\rho \otimes \rho_{env}\right)U^{\dagger}\right)$. Найти операторы E_k, такие что $\tilde{\Phi} = \sum\limits_k E_k \rho E_k^{\dagger}$ (**представление Крауса**).

Решение. Используя явный вид U, беря по определению след по системе, можно найти явно операторы Крауса комплементарного канала. Они имеют вид:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\imath}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{\imath}{2} & 0 & -\frac{\imath}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\imath}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Определение 2

Пусть $S = \sum_{j=1}^{d} s_j |e_j\rangle\langle e_j|$ *— оператор плотности в* d*-мерном гильбертовом пространстве* H_d *в спектральном представлении.* **Энтропия** *оператора плотности* S *определяется соотношением* $H(S) = \sum_{j=1}^{d} \eta(s_j)$, *где* $\eta(s_j) = \begin{cases} -s_j \log s_j & \text{при } s_j \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$.

Определение 3

χ - **пропускной способностью канала** Φ *будем называть величину*

$$C_\chi(\Phi) = \sup_{\{\pi_i, S_i\}} \left\{ H\left(\sum_i \pi_i \Phi[S_i]\right) - \sum_i \pi_i H\left(\Phi[S_i]\right) \right\},$$

где $\{\pi_i, S_i\}$ *— ансамбль квантовых состояний.*

Задача 3. Найти $C_\chi(\Phi)$.

Решение. Известно, что $0 \leq H(S) \leq \log d$ для любого состояния S и максимум достигается на хаотическом состоянии $\overline{S} = \frac{1}{d}\mathbb{I}$. Так как Φ унитальный и $\sum\limits_i \pi_i = 1$, то

$$C_\chi(\Phi) = H\left(\Phi\left[\frac{\mathbb{I}}{d}\right]\right) - \min_S H\left(\Phi[S]\right),$$

то есть

$$C_\chi(\Phi) = \log d - \min_S H\left(\Phi[S]\right),$$

$$d = 3.$$

Следовательно, нужно найти минимальную выходную энтропию.

Прямым вычислением показано, что минимальная выходная энтропия: $\min_S H(\Phi(S)) = H(\Phi(|\Psi\rangle\langle\Psi|)) = \log 2$ достигается на любом чистом состоянии, то есть $\forall S : \langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ верно $\min_S H(\Phi(S)) = H(\Phi(|\Psi\rangle\langle\Psi|)) = \log 2$.

Следовательно, классическая пропускная способность канала равна $C_\chi(\Phi) = \log d - 1$, $(d = 3)$, то есть

$$C_\chi(\Phi) = \log 3 - 1.$$

Определение 4

Канал Φ называется **деградируемым**, *если существует канал T такой, что $\tilde{\Phi} = T \circ \Phi$, и* **антидеградируемым**, *если существует канал T', такой что $\Phi = T' \circ \tilde{\Phi}$.*

Задача 4. Исследовать рассматриваемый канал на деградируемость и антидеградируемость.

Решение.

Рассмотрим матричное представление каналов Φ и $\tilde{\Phi}$. Если существует канал T (или T'), то в матричном представлении условие деградируемости (антидеградируемости) примет вид:

$$M_{\tilde{\Phi}} = M_T M_\Phi \qquad (M_\Phi = M_{T'} M_{\tilde{\Phi}}),$$

то есть сведется к умножению соответствующих матриц.

Тогда

$$M_T = M_{\tilde{\Phi}} M_\Phi^{-1} \qquad (M_{T'} = M_\Phi M_{\tilde{\Phi}}^{-1}).$$

Теорема [2] [3]

Отображение G вполне положительно $\Leftrightarrow$ матрица Чоя Ω_G положительно полуопределенная.

Следовательно, нужно исследовать матрицу Чоя для T (T') на положительную полуопределенность. Построением явного вида Ω_T $(\Omega_{T'})$ можно показать, что в случае канала Ландау-Стритера Φ у матрицы Чоя для T (T') не выполнено условие неотрицательности собственных чисел. Противоречие.

Таким образом, показано отсутствие как деградируемости, так и антидеградируемости рассматриваемого канала Φ.

---

[2] A. Jamiolkowski, "Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators," Rep. Math. Phys. 3, 275 (1972)

[3] M.-D. Choi, "Completely positive linear maps on complex matrices," Linear Algebra Appl. 10, 285 (1975).

Выводы

Для случая $j = 1$:

- найдены явный вид представления Стайнспринга с размерностью окружения $dimH_{env} = 3$ и операторы Крауса комплементарного канала;
- показано, что минимальная выходная энтропия: $\min\limits_{\rho} S(\Phi(\rho)) = \log 2$ достигается на любом чистом состоянии;
- классическая пропускная способность канала равна $C_{\chi}(\Phi) = \log d - 1$, $(d = 3)$;
- показано отсутствие как деградируемости, так и антидеградируемости канала Φ.