Применение квантовой H-теоремы для универсального описания классических и квантовых демонов Максвелла

Лаборатория физики квантовых информационных технологий

Н. С. Кирсанов, А. В. Лебедев, И. А. Садовский, М. В. Суслов, В. М. Винокур, Д. Блаттер, Г. Б. Лесовик

25 ноября 2017

Московский физико-технический институт

Содержание

Квантовая H-теорема

Квантовые каналы

Эволюция матрицы плотности системы $\hat{\rho}_f$ описывается **квантовым каналом** – сохраняющим след вполне-положительным отображением матрицы плотности начального состояния $\hat{\rho}_0$:

$$\hat{\rho}_f = \Phi(\hat{\rho}_0).$$

Если динамика системы описывается **унитальным** квантовым каналом $\Phi(\hat{\rho}_0)$, т.е.

$$\Phi(\hat{1}) = \hat{1},$$

то энтропия системы **не убывает**.

Квантовая H-теорема

Пусть динамика расширенной квантовой системы (системы и резервуара) описывается оператором эволюции вида:

$$\hat{U} = \sum_{i,j} |\psi_j\rangle \langle\psi_i| \otimes \hat{F}_{ji},$$

$\{|\psi_i\rangle\}$ – ортонормированный базис в гильбертовом пространстве системы; $\hat{F}_{ji}$ – семейство операторов, действующих в гильбертовом пространстве резервуара.

Квантовый канал эволюции системы:

$$\Phi(\hat{\rho}_0) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{res}}\{\hat{U}\hat{\rho}_0 \otimes \hat{\pi}_0 \hat{U}^\dagger\},$$

$\mathrm{Tr}_{\mathrm{res}}$ – след по состояниям резервуара, $\hat{\pi}_0$ – начальная матрица плотности резервуара.

Квантовая H-теорема

Уравнение для матричных элементов $\left[\Phi(\hat{1})\right]_{jj'} = \langle\psi_j|\Phi(\hat{1})|\psi_{j'}\rangle$:

$$\left[\Phi(\hat{1})\right]_{jj'} - \left[\hat{1}\right]_{jj'} = \sum_i \mathsf{Tr}_{\mathrm{res}}\left\{\hat{\pi}_0\,[\hat{F}^{\dagger}_{j'i}, \hat{F}_{ji}]\right\}$$

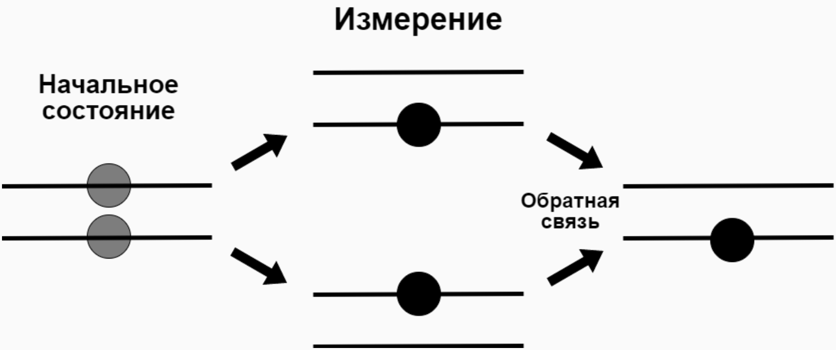
Квантовая H-теорема

Если правая часть уравнения равна нулю, то в процессе эволюции квантовой системы ее энтропия не убывает:

$$\Delta S = S(\Phi(\hat{\rho}_0)) - S(\hat{\rho}_0) \geq 0.$$

Демон Максвелла

Рабочий цикл



Начальное состояние кубита: $\hat{\rho}_0 = p_0 \left|g\right\rangle \left\langle g\right| + p_1 \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$.

Конечное состояние кубита: $\hat{\rho}_f = \left|g\right\rangle \left\langle g\right|$.

Изменение энтропии кубита: $\Delta S = p_0 \ln p_0 + p_1 \ln p_1 < 0 \rightarrow$ квантовый канал эволюции кубита неунитальный.

Полуклассический демон

Полуклассический демон

Измерение состояния кубита производится стандартным образом; обратная связь зависит от исхода измерения.

- Начальное состояние кубита:
  $\hat{\rho}_0 = p_0 \left|g\right\rangle \left\langle g\right| + p_1 \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$

Полуклассический демон

Измерение состояния кубита производится стандартным образом; обратная связь зависит от исхода измерения.

- Начальное состояние кубита:
  $\hat{\rho}_0 = p_0 \left|g\right\rangle \left\langle g\right| + p_1 \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$
- Измерение:
  $\hat{M}_g = \left|g\right\rangle \left\langle g\right|$; $\hat{M}_e = \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$

Полуклассический демон

Измерение состояния кубита производится стандартным образом; обратная связь зависит от исхода измерения.

- Начальное состояние кубита:
  $\hat{\rho}_0 = p_0 |g\rangle \langle g| + p_1 |e\rangle \langle e|$
- Измерение:
  $\hat{M}_g = |g\rangle \langle g|$; $\hat{M}_e = |e\rangle \langle e|$
- Обратная связь:
  $\hat{U}_g = |g\rangle \langle g| + |e\rangle \langle e|$; $\hat{U}_e = |g\rangle \langle e| + |e\rangle \langle g|$

Полуклассический демон

Измерение состояния кубита производится стандартным образом; обратная связь зависит от исхода измерения.

- Начальное состояние кубита:
  $\hat{\rho}_0 = p_0 \left|g\right\rangle \left\langle g\right| + p_1 \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$
- Измерение:
  $\hat{M}_g = \left|g\right\rangle \left\langle g\right|$; $\hat{M}_e = \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$
- Обратная связь:
  $\hat{U}_g = \left|g\right\rangle \left\langle g\right| + \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$; $\hat{U}_e = \left|g\right\rangle \left\langle e\right| + \left|e\right\rangle \left\langle g\right|$
- Конечное состояние:
  $\Phi(\hat{\rho}_0) = \hat{U}_g \hat{M}_g \hat{\rho}_0 \hat{M}_g^\dagger \hat{U}_g^\dagger + \hat{U}_e \hat{M}_e \hat{\rho}_0 \hat{M}_e^\dagger \hat{U}_e^\dagger = \left|g\right\rangle \left\langle g\right|$

Полуклассический демон

Измерение состояния кубита производится стандартным образом; обратная связь зависит от исхода измерения.

- Начальное состояние кубита:
  $\hat{\rho}_0 = p_0 \left|g\right\rangle \left\langle g\right| + p_1 \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$
- Измерение:
  $\hat{M}_g = \left|g\right\rangle \left\langle g\right|$; $\hat{M}_e = \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$
- Обратная связь:
  $\hat{U}_g = \left|g\right\rangle \left\langle g\right| + \left|e\right\rangle \left\langle e\right|$; $\hat{U}_e = \left|g\right\rangle \left\langle e\right| + \left|e\right\rangle \left\langle g\right|$
- Конечное состояние:
  $\Phi(\hat{\rho}_0) = \hat{U}_g \hat{M}_g \hat{\rho}_0 \hat{M}_g^\dagger \hat{U}_g^\dagger + \hat{U}_e \hat{M}_e \hat{\rho}_0 \hat{M}_e^\dagger \hat{U}_e^\dagger = \left|g\right\rangle \left\langle g\right|$
  $\Phi(\hat{1}) = 2 \cdot \left|g\right\rangle \left\langle g\right|$
  Квантовый канал Φ неунитальный.

Квантовый демон

Квантовый демон

Демон является квантовой системой. Задействовано двумерное подпространство гильбертова пространства демона, в котором $|0\rangle$ и $|1\rangle$ – ортонормированный базис.

- Начальное состояние полной системы кубит-демон: $\hat{R}_0 = (p_0 |g\rangle \langle g| + p_1 |e\rangle \langle e|) \otimes |0\rangle \langle 0|$

Квантовый демон

Демон является квантовой системой. Задействовано двумерное подпространство гильбертова пространства демона, в котором $|0\rangle$ и $|1\rangle$ – ортонормированный базис.

- Начальное состояние полной системы кубит-демон:
  $\hat{R}_0 = (p_0 |g\rangle \langle g| + p_1 |e\rangle \langle e|) \otimes |0\rangle \langle 0|$
- Измерение (унитарный оператор):
  $\hat{U}_1 = |g\rangle \langle g| \otimes (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) + |e\rangle \langle e| \otimes (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|)$

Квантовый демон

Демон является квантовой системой. Задействовано двумерное подпространство гильбертова пространства демона, в котором $|0\rangle$ и $|1\rangle$ – ортонормированный базис.

- Начальное состояние полной системы кубит-демон:
  $\hat{R}_0 = (p_0 |g\rangle \langle g| + p_1 |e\rangle \langle e|) \otimes |0\rangle \langle 0|$
- Измерение (унитарный оператор):
  $\hat{U}_1 = |g\rangle \langle g| \otimes (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) + |e\rangle \langle e| \otimes (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|)$
- Обратная связь (унитарный оператор):
  $\hat{U}_2 = (|g\rangle \langle g| + |e\rangle \langle e|) \otimes |0\rangle \langle 0| + (|g\rangle \langle e| + |e\rangle \langle g|) \otimes |1\rangle \langle 1|$

Квантовый демон

Демон является квантовой системой. Задействовано двумерное подпространство гильбертова пространства демона, в котором $|0\rangle$ и $|1\rangle$ – ортонормированный базис.

- Начальное состояние полной системы кубит-демон:
  $\hat{R}_0 = (p_0 |g\rangle \langle g| + p_1 |e\rangle \langle e|) \otimes |0\rangle \langle 0|$
- Измерение (унитарный оператор):
  $\hat{U}_1 = |g\rangle \langle g| \otimes (|0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|) + |e\rangle \langle e| \otimes (|0\rangle \langle 1| + |1\rangle \langle 0|)$
- Обратная связь (унитарный оператор):
  $\hat{U}_2 = (|g\rangle \langle g| + |e\rangle \langle e|) \otimes |0\rangle \langle 0| + (|g\rangle \langle e| + |e\rangle \langle g|) \otimes |1\rangle \langle 1|$
- Конечное состояние:
  $\hat{R}_f = \hat{U}_2 \hat{U}_1 \hat{R}_0 \hat{U}_1^\dagger \hat{U}_2^\dagger = |g\rangle \langle g| \otimes (p_0 |0\rangle \langle 0| + p_1 |1\rangle \langle 1|)$

Квантовый демон

Унитарный оператор эволюции в течение всего процесса:

$$\begin{aligned}\hat{U} =& \hat{U}_2\,\hat{U}_1\\ &= |g\rangle\langle g|\otimes|0\rangle\langle 0| + |g\rangle\langle e|\otimes|1\rangle\langle 0|\\ &+ |e\rangle\langle g|\otimes|1\rangle\langle 1| + |e\rangle\langle e|\otimes|0\rangle\langle 1|\,.\end{aligned}$$

Воспользуемся формулой

$$\left[\Phi(\hat{1})\right]_{jj'} - \left[\hat{1}\right]_{jj'} = \sum_i \mathrm{Tr}_{\mathrm{res}}\{\hat{\pi}_0\,[\hat{F}^\dagger_{j'i}, \hat{F}_{ji}]\};$$

$$\begin{aligned}\hat{F}_{gg} &= |0\rangle\langle 0| & \hat{F}_{ge} &= |1\rangle\langle 0|\\ \hat{F}_{eg} &= |1\rangle\langle 1| & \hat{F}_{ee} &= |0\rangle\langle 1|\,.\end{aligned}$$

$$\Phi(\hat{1}) = 2\cdot|g\rangle\langle g|\,,$$

т.е. квантовый канал Φ неунитальный.

Заключение

Заключение

Квантовая H-теорема позволяет производить анализ процессов, сопряженных с изменением энтропии, и может использоваться для описания демонов Максвелла.