Лекция I

1) Основные постулаты механики Ньютона, как известно, следуют из логически не противоречивого описания совокупности опытных фактов:

- **Инерциальные системы отсчета (ИСО) - это такие СО , относительно которых тело, на которое не действует никакая сила, движется равномерно и прямолинейно;**

- $\ddot{\vec{x}} = \vec{F}/m$ **- ускорение сообщенное телу равно силе, действующей на него, деленной на его инерциальную массу;**

- $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ **- действие равно противодействию.**

Не трудно видеть, что эти законы не меняются при преобразованиях Галилея:

$$\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}\,t$$
$$t' = t,$$

физический смысл которых заключается в том, что законы Ньютона не меняются при переходе от одной ИСО в другую, которая движется относительно исходной ИСО со скоростью $\vec{v}$. Т.е. абсолютного движения с постоянной скоростью не бывает. Движение с ускорением абсолютно. Тот факт, что уравнения Ньютоновой механики не зависят от выбора ИСО называется принципом относительности Галилея.

Чтобы осознать на сколько глубоко вы понимаете происхождение законов Ньютона, попробуйте ответить на следующие два вопроса:

- *Приведите пример эксперимента, в котором независимо бы измерялось ускорение тела, его масса и сила действующая на него. А затем явно бы проверялось, что $m\,\vec{a} = \vec{F}$. Или же силу и массу по отдельности измерить нельзя?*

- *Как бы выглядели преобразования Галилея, если бы вместо второго закона Ньютона мы имели бы $m\,\dot{\vec{a}} = \vec{F}$, где $\vec{a} = \ddot{\vec{x}}$? Как бы при этом изменился первый закон Ньютона? Какое-бы движение тогда было бы относительным, а какое абсолютным?*

В механике Ньтона имеется одно существенное упрощение. Рассмотрим систему частиц, взаимодействующих по закону Кулона. Сместим одну из частиц в новое положение. Тогда, в соответствии с законами механики Ньютона, остальные частицы мгновенно почувствуют это изменение в положении смещенной частицы. Т.е. взаимодействие в механике Ньютона переносится с бесконечной скоростью.

Из эксперимента мы знаем, что электромагнитное (ЭМ) взаимодействие переносится с конечной скоростью $c = 2,998 \cdot 10^8$м/с. Подавляющее большинство скоростей, с которыми мы имеем дело в повседневной жизни, пренебрежимо малы по сравнению со скоростью света. Поэтому все действительно выглядит как будто взаимодействия передаются мгновенно. Но нас теперь интересуют явления, при которых скорости частиц близки к скорости света и, поэтому такое упрощение недопустимо.

Рис. 1:

2) Чтобы понять, что происходит на самом деле, рассмотрим механическую модель, которая очень близка к действительности. А именно, рассмотрим одномерную бесконечную цепочку шариков одинаковой массы m, соединенных пружинами с одинаковыми коэффициентами Гука k. Пусть для простоты все шарики насажены на один бесконечный стержень, т.е. могут колебаться только в одном направлении — вдоль цепочки (см. рис. (1)). Эта модель является так же механической идеализацией одномерной кристаллической решетки атомов.

В положении равновесия все шарики находятся на одинаковом расстоянии друг от друга. Пусть я медленно потяну рукой (адиабатически приложив постоянную силу) один из шариков, скажем налево, возмутив тем самым решетку. Установится новое равновесие, в котором очевидно все пружины налево от смещенного шарика сожмутся в той или иной степени, а все пружины справа от шарика растянутся. Если задано смещение каждого из шариков из положения равновесия, то мы тем самым имеем некоторое поле: набор значений $\phi_i(t)$ для всех i, где $\phi_i(t)$ - смещение i-го шарика из положения равновесия в момент времени t. В случае постоянной приложенной силы очевидно, что все ϕ_i не зависят от времени, и мы имеем дело со статическим полем. Оказывается, что статический электрический заряд возмущает ЭМ поле аналогичным образом. Аналогия была бы более полной (но не абсолютной), если мы рассматривали бы трехмерную, а не одномерную решетку.

Пусть теперь мой коллега потянет медленно (адиабатически) своей рукой какой–нибудь второй шарик. Мы с моим коллегой почувствуем, что между нашими двумя руками возникнет сила притяжения или отталкивания, в зависимости от того с какой стороны и в каком направлении по отношению к исходному смещению был смещен второй шарик. Полученная сила является аналогом (не полным) силы Кулона, возникающей между двумя зарядами. Опять же аналогия была бы более полной, если бы мы рассматривали трехмерную, а не одномерную решетку. Мы увидим это в следующих лекциях.

Если теперь я резко смещу положение своей руки (изменив тем самым усилие) в ту или иную сторону, то рука коллеги почувствует это изменение в положении моей руки не мгновенно, а через некоторое время, равное времени распространения волны возмущения по решетке от одной руки до другой. Эта волна является аналогом электромагнитной волны, распространяющейся от одного электрического заряда к другому. Но еще более полным аналогом она является для звуковой волны в кристалле.

Давайте попробуем отчасти обратить эти наши качественные рассуждения в формулы, чтобы не быть голословными. Нам полученные формулы окажутся полезными в дальнейшем. Уравнение движения для i-го шарика:

$$m\,\ddot{\phi}_i = k\,(\phi_{i+1} - \phi_i) - k\,(\phi_i - \phi_{i-1}).$$

Т.е. мы имеем бесконечную систему уравнений — по одному для каждого i.

Рассмотрим теперь непрерывный предел, т.е. будем рассматривать такие длины волн колебаний решетки, при малых амплитудах, что они будут намного больше расстояния между шариками в положении равновесия и эффективные уравнения, описывающие эти волны не будут “чувствовать” тонкую структуру нашей решетки. В конце концов смысл непрерывного предела можно понять, уяснив, что любой реальный кристалл мы видим как однородное тело и волны в нем описываем как колебания плотности, ничего практически не зная о его кристаллической структуре. В этом пределе наша решетка будет выглядеть как однородное упругое тело. В непрерывном пределе

$$\phi_i(t) \to \phi(t,x),$$

где $\phi(t,x)$ — смещение $[x, x+dx]$ сегмента нашего упругого тела из положения равновесия в момент времени t на величину $|\phi|$. Далее

$$\phi_{i+1}(t) - \phi_i(t) \to \phi(t, x+\Delta x) - \phi(t,x) \approx \phi'(t,x)\,\Delta x.$$

Таким образом, уравнения движения принимают вид:

$$m\ddot{\phi}(t,x) \approx k\,[\phi'(t,x) - \phi'(t,x-\Delta x)]\,\Delta x \approx k\,\phi''(t,x)\,\Delta x^2.$$

Если в пределе $\Delta x \to 0$ мы держим $m/k\,\Delta x^2 \equiv 1/\bar{c}^2 = const$, что соответствует тому, что мы получим упругое тело, а не пыль из не взаимодействующих частиц ($\bar{c} = 0$) или абсолютно жесткий (не упругий) стержень ($\bar{c} = \infty$), то уравнение сводится к

$$\frac{1}{\bar{c}^2}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0, \tag{0.1}$$

где $\bar{c}$ имеет размерность скорости и, как мы увидим, имеет смысл скорости звука в нашем упругом теле. Мы так же увидим, что ЭМ волны являются решениями аналогичных уравнений — уравнений Максвелла — где вместо $\bar{c}$ стоит c — скорость света.

Подумайте, как изменятся эти уравнения, если мы рассмотрим малые колебания в 2–мерной и 3–мерной решетке (матрасе). Попробуйте учесть поляризацию звуковых волн в решетке, если шарики могут колебаться в любом направлении вдоль направлений, заполняемых решеткой. Что изменится в случае 2–мерной решетки, вложеной в 3-мерное пространство?

Подумайте, как изменится непрерывное уравнение, если к одному из шариков, скажем $i = 0$, мы приложим внешнюю силу? Попробуйте найти решение полученного уравнения в одно–, дву– и трех–мерном случаях. Для ответа на последний вопрос необходимы знания из последующих лекций.

Найдем решения полученных уравнений и поймем их физический смысл. Для этого представим полученные уравнения в виде:

$$\left(\frac{1}{\bar{c}^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\,\phi(t,x) = \left(\frac{\partial}{\bar{c}\,\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\,\left(\frac{\partial}{\bar{c}\,\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\,\phi(t,x) = 0.$$

Тогда легко видеть, что самое общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\phi(t,x) = f(\bar{c}\,t - x) + g(\bar{c}\,t + x),$$

где f и g совершенно произволные дважды дифференцируемые функции. Чтобы понять физический смысл таких решений, рассмотрим функцию $f(s)$, например, имеющую вид колокола (гребня волны) с вершиной в какой-то точке s_0, тогда гребень $f(\bar{c}\,t-x)$ как функции от x будет смещаться направо по оси x, т.к. в соответствии с уравнением положения вершины колокола $\bar{c}\,t_1 - x_1 = s_0 = \bar{c}\,t_2 - x_2$, если $t_2 > t_1$ то $x_2 > x_1$.

Таким образом, рассматриваемое решение соответствует волне, распространяющейся направо по оси x со скоростью звука $\bar{c}$. Аналогично $g(\bar{c}\,t + x)$ описывает волну, распространяющуюся налево со скоростью звука. Именно посредством обмена такими волнами и сообщаются друг с другом возмущения одномерного кристалла вроде тех, что были созданы выше “нашими руками”.

Рассмотрим “пространство-время” (ПВ) t, x. Произведем следующее преобразование этого ПВ:

$$\begin{aligned} \bar{c}\,t' &= \bar{c}\,t\,\cosh\alpha + x\,\sinh\alpha \\ x' &= \bar{c}\,t\,\sinh\alpha + x\,\cosh\alpha, \end{aligned}$$

где $\alpha = const$ — параметр преобразования. Как легко проверить, при таком преобразовании волновое уравнение не изменит свой вид:

$$\left(\frac{1}{\bar{c}^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\,\phi(t,x) = \left(\frac{1}{\bar{c}^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t'^2} - \frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)\,\phi(t',x') = 0.$$

Что, в частности, означает, что его решение преобразуется тривиальным образом $f(\bar{c}\,t - x) = f(\bar{c}\,t' - x')$, т.е. скорость волны при таком преобразовании не меняется. Заметим, что при таком преобразовании так же не изменится и следующая билинейная форма:

$$\bar{c}^2\,t^2 - x^2 = \bar{c}^2\,t'^2 - x'^2.$$

Рассмотренное преобразование t, x выделенно только тем, что не меняет вида волнового уравнения и рассматриваемой билинейной формы.

3) Какое отношение все это имеет к специальной теории относительности (СТО)?

Мы увидим далее, что многие из уравнений в СТО аналогичны рассмотренным только что, где вместо $\bar{c}$ стоит c — скорость света. При этом вышеупомянутая замена t, x на t', x' имеет физический смысл перехода из одной ИСО в другую.

Прежде, чем перейти к рассмотрению СТО сделаем шаг назад опять к механике Ньютона. Законы механики Ньютона, в частности, не изменяются еще и при вращениях 3-мерного пространства. С последним явлением тесно связан тот факт, что относительно вращений инвариантна билинейная форма в 3-мерном пространстве, определяющая расстояние:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

между двумя точками (x, y, z) и $(x + dx, y + dy, z + dz)$. Для нас сейчас важно не то, что при произвольных преобразованиях координат сохраняется физическая величина расстояния dl^2: скажем при переходе из ортонормированной системы координат (СК) в произвольную перекошенную СК, длина отрезка от (x, y, z) до $(x + dx, y + dy, z + dz)$ не меняет своей величины. Например, в 2-мерном случае при полярной замене координат, $x = x' \cos y', \quad y = x' \sin y'$ мы имеем:

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = dx'^2 + x'^2\, dy'^2.$$

Для нас сейчас важно, что при заменах координат, отвечающих врещениям, билинейная форма, определяющая вид выражения для длины, не меняет свой вид. А именно, опять же в 2-мерном случае при замене координат, отвечающей повороту

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\varphi + y \sin\varphi \\ y' &= -x \sin\varphi + y \cos\varphi, \end{aligned}$$

где $\varphi = const$, мы имеем (при любом φ)

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = dx'^2 + dy'^2,$$

при этом очевидно, что $dx \neq dx'$ и $dy \neq dy'$.

Что еще более важно при вращениях, как и при преобразованиях Галилея, не меняют своего вида уравнения Ньютоновой механики. Т.е. они сохраняют свой вид в новых координатах x', y', z'. На научном языке это утверждение звучит так: уравнения механики Ньютона преобразуются ковариантно при вращениях. Или просто ковариантны.

Убедитесь в последнем утверждении самостоятельно.

4) В СТО постулируется (следует из логически непротиворечивого описания совокупности опытных фактов), что:

- **Скорость света в вакууме является максимально возможной скоростью в природе.**

- **Пространство и время образуют единый 4-мерный ПВ континуум с метрикой вида:**

  $$ds^2 = c^2\, dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv c^2\, dt^2 - d\vec{x}^2.$$

  Последняя величина физиками чаще называется интервалом и определяет расстояние между двумя точками в ПВ с координатами (t, x, y, z) **и** $(t+dt, x+dx, y + dy, z + dz)$**. Здесь** c **— скорость света.**

  Из выше приведенного обсуждения сразу видно, что интервал сохраняет свой вид при Лоренцевском бусте:

$$
\begin{aligned}
c\,t' &= c\,t\,\cosh\alpha + x\,\sinh\alpha,\\
x' &= c\,t\,\sinh\alpha + x\,\cosh\alpha,\\
y' &= y, \quad z' = z,
\end{aligned} \tag{0.2}
$$

где $\alpha = const$**.**

Т.е. длина черырех–мерного интервала не меняется при бустах, но, как мы увидим, его проекции на оси t и x могут меняться, что аналогично ситуации с вращениями трех–мерной системы координат.

Еще один постулат гласит, что:

- **Лоренцевский буст имеет физический смысл перехода из одной ИСО в другую, которая движется относительно первой вдоль оси** x **со скоростью** v**, где**

$$
\cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sinh\alpha = \frac{-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{0.3}
$$

Подумайте, как будет выглядеть буст Лоренца вдоль оси y? Вдоль z? Вдоль произвольного направления? Как будет выглядеть обратное преобразование Лоренца?

В следующих лекциях мы увидим, что при Лоренцевских бустах ковариантны уравнения релятивистской механики. Сразу замечу, что формулы для буста Лоренца имеют смысл только, когда $v < c$, а в пределе $v << c$, Лоренцевский буст переходит в преобразование Галилея. Последнее замечание есть отражение того факта, что релятивисткая механика обобщает механику Ньютона.

Помимо этого, из этих постулатов сразу следует, что скорость света не зависит от выбора ИСО. Действительно, если частица движется со скоростью света, то ее смещение во времени dt и в пространстве $d\vec{x}$ связаны соотношением $|d\vec{x}/dt| = c$. Следовательно вдоль ее ПВ смещений $ds^2 = 0$. Но при переходе из одной ИСО в другую, интервал не меняет своего вида, а потому $ds^2 = c^2\,dt'^2 - d\vec{x}'^2 = 0$ тоже. Следовательно в новой системе отсчета между смещением частицы во времени и пространстве выполняется такое же соотношение $|d\vec{x}'/dt'| = c$.

Чтобы избежать конфузий, которые могут возникнуть при использовании *неинерциальных* СО, подчеркнем, что для последнего утверждения важно, что мы переходим от одной ИСО к другой ИСО, т.к. при этом не меняется билинейная форма, задающая выражение для интервала. При переходе к неинерциальным СО билинейная форма, задающая интервал, меняется существенным образом, но это уже предмет из общей теории относительности.

Следует подчеркнуть, что мы *не* постулируем тот факт, что скорость света не зависит от ИСО. Он следует из перечисленных выше постулатов. Можно было бы наоборот постулировать, что скорость света не зависит от ИСО. Тогда выражение для интервала и, следовательно, тот факт, что пространство и время образуют единый континуум можно вывести как следствие.

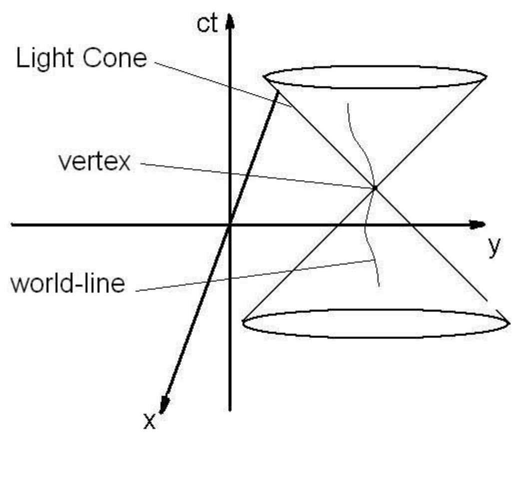

Рис. 2:

Попробуйте проверить, что действительно из независимости скорости света от ИСО следует приведенное выше выражение для интервала.

5) Итак, мы познакомились с понятием 4–мерного пространства–времени (ПВ). Нарисуем 3–мерную его часть, включающую время. Скажем оси ct, x и y — это максимум, что я могу нарисовать на 2–мерном листе. Точка в ПВ называется событием или мировой точкой. Линия, заметаемая точечной частицей в ПВ, называется мировой линией (world–line). Подчеркну, что последнее не совсем тоже самое, что траектория частицы, т.к. траектория заметается в пространстве, а не в ПВ.

Рассмотрим какую–нибудь мировую точку (vertex). (Смотри рис. 2.) Нарисуем все возможные лучи света, как они бы распространялись из этой точки вперед по времени. Нарисуем так же все возможные лучи света, как они бы сходились бы в эту точку из прошлого. Полученная фигура, которая заметается всевозможными лучами света, проходящими через данную точку, называется световой конус (light cone). Очевидно, что световой конус можно нарисовать для любой мировой точки.

Т.к. любая материальная точка может двигаться только со скоростью меньше, чем скорость света, то наклон по отношению к оси ct производной к мировой линии всегда меньше, чем 45 градусов. Поэтому любая мировая линия, проходящая через мировую точку, находящуюся в вершине данного светового конуса (vertex), будет целиком находиться внутри этого светового конуса.

Обсудим принцип причинности. (Смотри рис. 3) Любое событие из верхней части светового конуса (например, событие в мировой точке (a)) находится в абсолютном будущем по отношению к вершине конуса (o). Т.е. в любой СО это событие произойдет позже, чем то, что произойдет в вершине конуса. Любое же событие в нижней части светового конуса (например, событие в мировой точке b) находится в абсолютном прошлом по отношению к вершине конуса. В прошлом или в будущем событие вне светового конуса (например, событие в мировой точке d) по отношению к вершине конуса зависит от СО.

Объясним откуда следуют эти утверждения. Любая мировая точка внутри светового конуса соединяется с его вершиной отрезком с интервалом $\Delta s^2 = c^2\,\Delta t^2 - \Delta\vec{x}^2 > 0$, т.к. для такого интервала смещение в пространстве и во времени связаны как $|\Delta\vec{x}| < c\,|\Delta t|$.

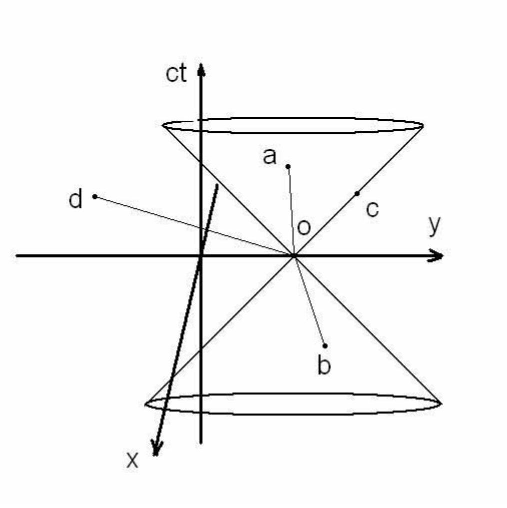

Рис. 3:

Более того Δt не возможно положить равным нулю выбором СО, т.к. иначе нарушилось бы условие $\Delta s^2 > 0$. Поэтому, если $\Delta t > 0$ в одной СО, то $\Delta t > 0$ и в любой другой СО. Тоже верно и в случае, если $\Delta t < 0$. Интервалы, для которых верно $\Delta s^2 > 0$ называются временниподобными.

Любая мировая точка вне светового конуса соединяется с его вершиной отрезком с $\Delta s^2 < 0$, т.к. для таких интервалов $|\Delta \vec{x}| > c\,|\Delta t|$. Поэтому, для таких интевалов выбором СО можно положить $\Delta t = 0$, т.е., меняя систему отсчета, можно сменить знак Δt. Следовательно, если событие было в прошлом по отношению к вершине конуса в одной СО, то его можно положить в будущее по отношению к вершине выбором другой СО. Интервалы, для которых верно $\Delta s^2 < 0$, называются пространственноподобными.

И наконец, любая точка на световом конусе соединяется с его вершиной интервалом с $\Delta s^2 = 0$, т.к. для такого интервала $|\Delta \vec{x}| = c\,|\Delta t|$. Такие интервалы называются нулевыми или светоподобными. Очевидно, является ли интервал светоподобным, пространственноподобным или времениподобным не зависит от СО, т.к. величина интервала не зависит от СО.

6) Из вышеуказанных постулатов имеются и другие простые следствия. Рассмотрим стандартный в СТО мысленный эксперимент. Станционный смотритель видит проходящий мимо него с релятивистской постоянной скоростью поезд (конечно скорый), состоящий из одного вагона. Посередине вагона стоит пассажир. Пассажир держит фонарь в каждой руке. Передняя и задняя (по движению поезда) стенки вагона — зеркала. Когда пассажир ровняется со смотрителем, он мгновенно включает и выключает фонари, излучая свет в направлении каждого из зеркал. И в ИСО пассажира и в ИСО смотрителя свет движется с одинаковой скоростью — скорость света. И в ИСО пассажира и в ИСО смотрителя испускание обоих лучей света одновременно. В ИСО пассажира оба луча света одновременно отражаются от зеркал и одновременно возвращаются к пассажиру (см. рис. (4)).

Однако в ИСО смотрителя луч света, испущенный по направлению движения вагона, достигнет его передней стенки позже, чем луч, испущенный против направления движения вагона, достигнет его задней стенки. Это очевидно, т.к. скорости сближения стенок и

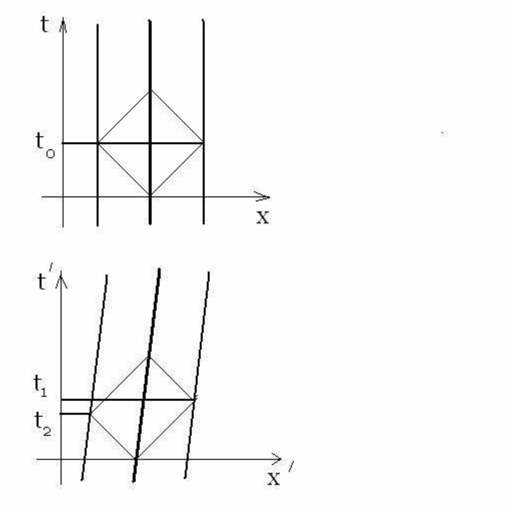

Рис. 4:

лучей света разные. Однако отраженные лучи света вернутся к пассажиру одновременно так же и в ИСО смотрителя. Действительно после отражения лучей от стенок их скорости сближения с пассажиром будут разные, но с противопоожным знаком, т.к. отраженный луч от передней стенки будет теперь двигаться против направлени движения позда, тогда как отраженный от задней стенки будет, после отражения, двигаться по направлению движения поезда.

Итак моменты отражения лучей света от стенок вагона, будучи одновременными в ИСО пассажира, не являются таковыми в ИСО смотрителя. Т.е. в СТО одновременность некоторых событий относительна как мы поняли выше.

7) После того как стало понятно, что происходит с промежутками времени при переходе из одной ИСО в другую, посмотрим, что происходит с пространственными отрезками. Пусть теперь пассажир вышеуказанного поезда, двигающегося со скоростью v, держит в руках стержень параллельно движению вагона. Длина стержня, которую измеряет пассажир, равна l_0. Какую длину стержня будет видеть смотритель? Пусть в ИСО пассажира (К') задний (по движению поезда) конец стержня находится в начале координат $x_1' = 0$, а передний, соответственно в $x_2' = l_0$. Пусть теперь в ИСО смотрителя в какой-то момент времени t (по его часам) задний конец стержня находится в точке x_1, а передний в точке x_2. Наша задача найти $l = x_2 - x_1$. Из формулы для буста Лоренца мы знаем как x' и t' связаны с x и t:

$$\begin{aligned} x_1' \equiv 0 &= (x_1 - \beta\, c\, t)\,\gamma \\ x_2' \equiv l_0 &= (x_2 - \beta\, c\, t)\,\gamma \\ t_1' &= \left(t - \frac{\beta\, x_1}{c}\right)\gamma \\ t_2' &= \left(t - \frac{\beta\, x_2}{c}\right)\gamma. \end{aligned}$$

Здесь $\beta = v/c$ — скорость поезда в единицах скорости света, а $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ — так называемый релятивистский γ–фактор. Из рассматриваемых уравнений следует, что

$$t_2' - t_1' = \frac{\gamma\,\beta}{c}\,(x_2 - x_1) \equiv \frac{\gamma\,\beta\,l}{c} > 0.$$

Т.е. если смотритель видит, что в его ИСО концы стежня находятся в точках x_1 и x_2 одновременно, то с точки зрения пассажира попадание заднего конца стержня в точку x_1, а переднего — в точку x_2 в ИСО смотрителя не есть одновременные события. Но при этом интервалы в двух ИСО должны быть равны:

$$\begin{aligned} ds^2 = c^2\,(t-t)^2 - (x_2-x_1)^2 = -(x_2-x_1)^2 \equiv -l^2 \\ ds^2 = c^2\,(t_2'-t_1')^2 - (x_2'-x_1')^2 = l^2\,\gamma^2\,\beta^2 - l_0^2. \end{aligned}$$

Поэтому $l^2 = -l^2\,\gamma^2\,\beta^2 + l_0^2$ и, т.к. $\gamma^2 - \beta^2\,\gamma^2 \equiv \cosh^2\alpha - \sinh^2\alpha \equiv 1/(1-v^2/c^2) - v^2/c^2/(1-v^2/c^2) = 1$, то $l_0 = l\,\gamma$. Следовательно $l_0 \geq l$, т.к. $\gamma \geq 1$. Последнее явление в СТО называется Лоренцевым сокращением длин.

Как вы, надеюсь, видите из приведенных здесь рассуждений, буст Лоренца есть аналог поворота в пространстве — точнее гиперболический поворот, т.к. cosh и sinh — это не совсем тоже самое, что cos и sin. Поэтому после Лоренцевского буста могут меняться величины приращений времени и пространственные размеры (проекции интервала на оси координат), но разность их квадратов — квадрат длины интервал — остается неизменным.

Вооружившись полученными знаниями, попробуйте объяснить следующий парадокс. Человек с шестом длины 10 метров (в ИСО покоя шеста) бежит сквозь сарай длины 6 метров (в ИСО покоя сарая). Он движется с такой скоростью, что релятивистский γ–фактор равен $10/6$, т.ч. длина стержня в ИСО сарая равна 6 метров. Когда человек вбегает в сарай и находится в его центре, наблюдатель, покоящийся в этом сарае, видит, что шест целиком умещается в сарае. Как же такое может быть, если движение с постоянной скоростью относительно, а в ИСО человека с шестом сарай налетает на него с такой скоростью, что его длина сокращается до размеров равных $6 \cdot 6/10 = 3,6$ метра?

8) Найдем теперь закон сложения скоростей. Пусть поезд движется с постоянной скоростью v, а пассажир кидает камень тоже с постоянной скоростью вдоль движения поезда, которая в ИСО пассажира равна u. Какова скорость движения камня в ИСО смотрителя?

Сделаем два буста Лоренца подряд — сначала для перехода из ИСО смотрителя в ИСО пассажира, а затем из ИСО пассажира в ИСО камня. Т.е. мы должны применить композицию двух Лоренцевских бустов с параметрами: $\cosh\alpha_1 = 1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, $\tanh\alpha_1 = v/c$ и $\cosh\alpha_2 = 1/\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$, $\tanh\alpha_2 = u/c$:

$$\begin{pmatrix} c\,t_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha_1 & \sinh\alpha_1 \\ \sinh\alpha_1 & \cosh\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,t \\ x \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c\,t_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha_2 & \sinh\alpha_2 \\ \sinh\alpha_2 & \cosh\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\,t_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \quad (0.4)$$

В результате мы получим опять буст Лоренца для перехода из ИСО смотрителя прямо в ИСО камня, а параметр его будет равен $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$.

Проверьте, что последнее верно для композиции двух бустов.

Т.е. скорость камня по отношению к ИСО смотрителя равна

$$\frac{V}{c} = \tanh(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\tanh\alpha_1 + \tanh\alpha_2}{1 + \tanh\alpha_1\, \tanh\alpha_2} = \frac{v+u}{1+\frac{v\,u}{c^2}}.$$

Заметим, что параметр буста Лоренца в t, x части ПВ очень похож на угол поворота при 2–мерных вращениях, ведь если мы последовательно применим два 2-мерных поворота с углами φ_1 и φ_2 один за другим, то получим опять 2-мерный поворот на угол $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Т.е. действительно буст Лоренца правомерно называть (гиперболическим) поворотом.

Мы рассмотрели случай, когда $\vec{u}$ и $\vec{v}$ параллельны. Найдем теперь скорость камня в ИСО смотрителя, если он движется с постоянной скоростью $\vec{u}$ не обязательно параллельной $\vec{v}$ (мы забываем в нашем мысленном эксперименте о наличии силы тяжести). Разобьем все векторы на две составляющие — вдоль скорости поезда $\vec{v}$ и перпендикулярную ей, т.е., например, $\vec{x}$ — на $\vec{x}_{||} = \frac{(\vec{v},\vec{x})}{|\vec{v}|}\,\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ и $\vec{x}_\perp = \vec{x} - \vec{x}_{||}$. Тогда при бусте Лоренца из ИСО смотрителя в ИСО пассажира перпендикулярная компонента $\vec{x}$ не преобразуется $d\vec{x}_\perp = d\vec{x}\,'_\perp$, продольная же компонента преобразуется в соответствии с:

$$d\vec{x}_{||} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\left(d\vec{x}\,'_{||} + \vec{v}\,dt'\right),$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,\left(dt' + \frac{(\vec{v}\,d\vec{x}\,'_{||})}{c^2}\right),$$

где штрихованные величины относятся к ИСО пассажира, а не штрихованные — к ИСО смотрителя. Отсюда следует, что:

$$\vec{V}_\perp \equiv \frac{d\vec{x}_\perp}{dt} = \frac{\vec{u}_\perp}{1+\frac{(\vec{u},\vec{v})}{c^2}}\,\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$
$$\vec{V}_{||} \equiv \frac{d\vec{x}_{||}}{dt} = \frac{\vec{u}_{||}+\vec{v}}{1+\frac{(\vec{u},\vec{v})}{c^2}}. \tag{0.5}$$

Теперь, если вместо бросания камня, пассажир будет светить из фонаря в произвольном направлении, т.е. испускаемый пассажиром объект будет двигаться со скоростью света, т.ч. $|\vec{u}_{||}| = c\,\cos\theta'$, где θ' — угол между направлением движения поезда и направлением луча света в ИСО пассажира. Тогда, в соответствии с (0.5), угол θ в ИСО смотрителя между направлением движения поезда и луча света, $|\vec{V}_{||}| = c\,\cos\theta$, определяется по формуле:

$$\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}\,\cos\theta'}, \quad v \equiv |\vec{v}|. \tag{0.6}$$

Явление изменения направления распространения луча света при переходе из одной ИСО в другую называется <u>аберрацией</u>.

9) Т.к. время относительно, то для дальнейших наших целей удобно ввести инвариантную характеристику, имеющую смысл времени — так называемое <u>собственное время</u>. Рассмотрим часы, которые двигаются произвольным, не обязательно инерциальным, образом. Собственным временем в, вообще говоря, неинерциальной СО, всегда сопутствующей часам, называется время, которое показывают эти часы. Очевидно, что сколько натикают часы, двигающиеся данным произвольным образом, не зависит от того из какой СО мы смотрим на эти часы. Предположим, что мы наблюдаем за ними из произвольной ИСО. В каждый отдельный момент времени движение часов можно рассматривать как равномерное и прямолинейное. Поэтому в каждый момент времени можно ввести неподвижно связанную с движущимися часами, т.е. мгновенно сопутствующую, ИСО.

В течении малого приращения времени dt по лабораторным часам движущиеся часы проходят расстояние $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{d\vec{x}^2}$ в лабораторной же ИСО. Нас интересует какой промежуток времени $d\tau$ покажут сами движущиеся часы. В мгновенно сопутсвующей ИСО часы покоятся, поэтому пройденное ими расстояние в этой ИСО равно очевидно $dx' = dy' = dz' = 0$. В силу инвариантности интервала, имеем:

$$c^2\, d\tau^2 = ds^2 = c^2\, dt^2 - d\vec{x}^2.$$

Поэтому

$$d\tau = dt\,\sqrt{1 - \frac{\dot{\vec{x}}^2(t)}{c^2}}, \tag{0.7}$$

где $\dot{\vec{x}}(t)$ — скорость часов в момент времени t в нашей ИСО. Аналогичным образом можно ввести собственную длину.