ЛЕКЦИЯ I

ТЕОРИЯ БОЛЬЦМАНА

Содержание

В лекции изложены основополагающие идеи Л. Больцмана, позволившие получить интегродифференциальное уравнение, носящее его имя. Показано, что второе начало термодинамики выступает в качестве следствия уравнения Больцмана [1], если определить энтропию в согласии со статистикой классического идеального газа. Удаётся доказать, что правая часть кинетического уравнения – интеграл столкновений – обращается в нуль, если подставить туда термодинамически равновесную функцию распределения идеального газа, соответствующую произвольной средней скорости, температуре и плотности.

Эта функция распределения позволяет построить упрощённый интеграл столкновений – так называемое τ-приближение, которое превращает кинетическое уравнение в квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных. Решение этого уравнения при заданном градиенте температуры и градиенте средней скорости позволяет определить температурную зависимость коэффициентов вязкости и теплопроводности.

§ 1. Уравнение Больцмана

Пусть $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$ – одночастичная функция распределения в пространстве координат и скоростей. В классической статистике одночастичная функция распределения нормируется таким образом, что интеграл по всем скоростям есть плотность числа частиц в данной точке $\vec{r}$ и в данный момент времени t:

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{v}. \tag{1}$$

Вычислим полную производную функции распределения по времени:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial r_k}\frac{\partial r_k}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v_k}\frac{\partial v_k}{\partial t}. \tag{2}$$

По дважды повторяющимся индексам производится суммирование.

Учитывая определение скорости частицы, а также закон Ньютона, перепишем полную производную по времени следующим образом:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial r_k} + \frac{F_k}{m}\frac{\partial f}{\partial v_k}, \tag{3}$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на данную частицу, m – её масса.

Проследим за изменением функции распределения. Запишем символически:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial r_k} + \frac{F_k}{m}\frac{\partial f}{\partial v_k} = St(f), \tag{4}$$

где символ St обозначает скорость изменения функции распределения за единицу времени. St – оператор столкновений; $St(f)$ – интеграл столкновений.

Согласно теории Больцмана, интеграл столкновений содержит разность двух слагаемых: одно из них "уходное", а другое "приходное".

Полное число столкновений с переходами $\vec{v}, \vec{v}_1 \to \vec{v}', \vec{v}_1'$, происходящими в единицу времени в объёме dV, равно интегралу:

$$dV d\vec{v} \int w(\vec{v}', \vec{v}_1'; \vec{v}, \vec{v}_1) f(\vec{v}, \vec{r}, t) f(\vec{v}_1, \vec{r}, t) d\vec{v}_1 d\vec{v}_1' d\vec{v}'. \tag{5}$$

Это выражение соответствует переходам из данного элемента фазового пространства $d\vec{v}$ ("уход") и поэтому входит в интеграл столкновений со знаком "минус".

Происходят также и такие столкновения ("приход"), в результате которых молекулы, обладавшие первоначально значениями скоростей $\vec{v}$, лежащими вне заданного интервала $d\vec{v}$, попадают в этот интервал. Это есть столкновения с переходами $\vec{v}', \vec{v}_1' \to \vec{v}, \vec{v}_1$, происходящими в единицу времени в объёме dV. Их число равно интегралу:

$$dVd\vec{v}\int w(\vec{v},\vec{v}_1;\vec{v}^{\,\prime},\vec{v}_1^{\,\prime})f(\vec{v}^{\,\prime},\vec{r},t)f(\vec{v}_1^{\,\prime},\vec{r},t)d\vec{v}_1 d\vec{v}_1^{\,\prime} d\vec{v}^{\,\prime}\,. \tag{6}$$

Вычитая число актов ухода из числа актов прихода, находим, что в результате всех столкновений выделенное число молекул увеличивается за секунду на величину:

$$dVd\vec{v}\left\{\int\left[w(\vec{v},\vec{v}_1;\vec{v}^{\,\prime},\vec{v}_1^{\,\prime})f(\vec{v}^{\,\prime})f(\vec{v}_1^{\,\prime})\ -\right.\right.$$
$$\left.\left.-\ w(\vec{v}^{\,\prime},\vec{v}_1^{\,\prime};\vec{v},\vec{v}_1)f(\vec{v})f(\vec{v}_1)\right]d\vec{v}_1 d\vec{v}_1^{\,\prime} d\vec{v}^{\,\prime}\right\}. \tag{7}$$

Здесь и ниже предполагается, что время, проведённое частицей между столкновениями, значительно превышает само время столкновения. В соответствии с этим все функции распределения, стоящие под знаком интеграла столкновений, берутся в тот же момент времени и относятся к одной и той же координате.

Это фактически есть первый и основной постулат всей кинетической теории, от которого мы не откажемся на протяжении всех последующих лекций. По этой причине координатную и временную зависимости функций распределения, стоящих под знаком интеграла столкновений, мы для краткости опускаем.

Функция w удовлетворяет общему соотношению, которое следует из унитарности S-матрицы рассеяния: $\hat{S}^{+}\hat{S}=1$. Записанное через индексы начальных и конечных состояний это условие выглядит следующим образом:

$$\sum_k \left(\hat{S}^{+}\right)^i_k \left(\hat{S}\right)^k_j = \sum_k \left(\hat{S}^k_i\right)^* \hat{S}^k_j = \delta_{i,j}. \tag{8}$$

В частности, при $i = j$:

$$\sum_k \left|\hat{S}_i^k\right|^2 = 1. \tag{9}$$

Квадрат модуля $\left|\hat{S}_i^k\right|^2$ определяет вероятность столкновения с переходом $i \to k$, и поэтому соотношение (9) выражает собой условие нормировки вероятностей: сумма вероятностей всех возможных переходов из заданного начального состояния равна единице.

Заметим, что из условия унитарности $\hat{S}^+\hat{S} = 1$ следует

$$\hat{S} = \left(\hat{S}^+\right)^{-1}, \quad \text{и} \quad \text{поэтому} \quad \hat{S}\hat{S}^+ = 1. \tag{10}$$

Таким образом, из соотношения (10) можно написать два соотношения, вполне аналогичных (8), а затем по аналогии с (9) имеем

$$\sum_k \left|\hat{S}_k^i\right|^2 = 1. \tag{11}$$

Таким образом, равна единице сумма вероятностей всех возможных переходов в заданное конечное состояние. Следовательно, из (9) и (11) можно написать

$$\sum_k \left|\hat{S}_i^k\right|^2 = \sum_k \left|\hat{S}_k^i\right|^2, \quad \text{или} \quad \sum_{k,(k\neq i)} \left|\hat{S}_i^k\right|^2 = \sum_{k,(k\neq i)} \left|\hat{S}_k^i\right|^2. \tag{12}$$

Здесь мы исключили переход без изменения состояния $(k = i)$.

Это и есть основное равенство, которое называется соотношением Штюкельберга [2] (*E.C.G. Stückelberg*, 1952).

В терминах функций w это соотношение переписывается в виде

$$\int w(\vec{v}^{\,\prime}, \vec{v}_1^{\,\prime}; \vec{v}, \vec{v}_1) d\vec{v}_1^{\,\prime} d\vec{v}^{\,\prime} = \int w(\vec{v}, \vec{v}_1; \vec{v}^{\,\prime}, \vec{v}_1^{\,\prime}) d\vec{v}_1^{\,\prime} d\vec{v}^{\,\prime}. \tag{13}$$

Эту формулу применим к подынтегральной функции "уходов" (5), взятой при фиксированной скорости $\vec{v}_1$:

$$dV d\vec{v} \int d\vec{v}_1 f(\vec{v}) f(\vec{v}_1) \left\{ \int w(\vec{v}^{\,\prime}, \vec{v}_1^{\,\prime}; \vec{v}, \vec{v}_1) d\vec{v}_1^{\,\prime} d\vec{v}^{\,\prime} \right\} =$$

$$= dV d\vec{v} \int d\vec{v}_1 f(\vec{v}) f(\vec{v}_1) \left\{ \int w(\vec{v}, \vec{v}_1; \vec{v}', \vec{v}_1') d\vec{v}_1' d\vec{v}' \right\}. \tag{14}$$

Отсюда можно заключить, что интеграл столкновений (7) можно переписать в следующей форме:

$$St(f) = \int w(\vec{v}, \vec{v}_1; \vec{v}', \vec{v}_1') \left[f(\vec{v}') f(\vec{v}_1') - f(\vec{v}) f(\vec{v}_1) \right] d\vec{v}_1 d\vec{v}_1' d\vec{v}'. \tag{15}$$

Таким образом, кинетическое уравнение является интегро-дифференциальным и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial r_k} + \frac{F_k}{m} \frac{\partial f}{\partial v_k} =$$

$$= \int w(\vec{v}, \vec{v}_1; \vec{v}', \vec{v}_1') \left[f(\vec{v}') f(\vec{v}_1') - f(\vec{v}) f(\vec{v}_1) \right] d\vec{v}_1 d\vec{v}_1' d\vec{v}'. \tag{16}$$

Оно было установлено основателем кинетической теории Людвигом Больцманом в 1872 г. [1].

Отношение $w(\vec{v}', \vec{v}_1'; \vec{v}, \vec{v}_1) d\vec{v}' d\vec{v}_1'$ к абсолютной величине относительной скорости $\vec{v} - \vec{v}_1$ сталкивающихся частиц имеет размерность площади и представляет собой эффективное сечение столкновений:

$$d\sigma = \frac{w(\vec{v}', \vec{v}_1'; \vec{v}, \vec{v}_1)}{|\vec{v} - \vec{v}_1|} d\vec{v}' d\vec{v}_1'. \tag{17}$$

С помощью этого определения уравнение Больцмана (16) переписывается следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_k \frac{\partial f}{\partial r_k} + \frac{F_k}{m} \frac{\partial f}{\partial v_k} = \int |\vec{v} - \vec{v}_1| d\sigma \left[f(\vec{v}') f(\vec{v}_1') - f(\vec{v}) f(\vec{v}_1) \right] d\vec{v}_1. \tag{18}$$

В этой формуле считается, что при заданной скорости $\vec{v}$ между скоростями $\vec{v}'$, $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_1$ выполнены соотношения, связанные с законом сохранения суммарного импульса и суммарной энергии:

$$\vec{v} + \vec{v}_1 = \vec{v}' + \vec{v}_1', \quad v^2 + v_1^2 = \left(\vec{v}'\right)^2 + \left(\vec{v}_1'\right). \tag{19}$$

Исходя из последнего соотношения, можно сразу обнаружить, что интеграл столкновений обращается в нуль для распределения Больцмана произвольного вида:

$$f_0(\vec{v}) = C \exp\left[-B(\vec{v} - \vec{a})^2 \right], \tag{20}$$

где $\vec{a}$, B, C – произвольные функции координат и времени.

Если же все эти функции постоянны как по времени, так и по координате, тогда в отсутствие внешнего поля функция (20) удовлетворяет уравнению Больцмана.

Ясно при этом, что при подходящей нормировке функция (20) есть распределение Больцмана в системе координат, движущейся со скоростью $\vec{a}$.

Задача № 1. Число столкновений молекулы

Определить число столкновений молекулы с остальными в единицу времени [3].

Решение.

Распределение молекул идеального газа по относительным скоростям имеет тот же вид, что и распределение по абсолютным скоростям, но только массу m следует заменить на приведённую массу $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$. Поскольку все молекулы одинаковы, $\mu = m/2$, мы получаем для числа молекул в единице объёма, обладающих относительной скоростью, лежащей в интервале между v и $v + dv$, выражение

$$dN_v = \frac{N}{V}\frac{\pi}{2}\left(\frac{m}{\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{4T}\right) v^2 dv. \qquad (21)$$

Плотность потока частиц получим как произведение числа частиц на относительную скорость v. Эффективное сечение рассеяния есть отношение вероятности столкновения в единицу времени к плотности потока частиц. Поэтому число столкновений данной частицы с другими при заданном сечением рассеяния σ равно:

$$\nu' = \frac{N}{V}\frac{\pi}{2}\left(\frac{m}{\pi T}\right)^{3/2} \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{mv^2}{4T}\right) \sigma v^3 dv. \qquad (22)$$

Если молекулы считаются твёрдыми шарами радиуса r, тогда сечение рассеяния $\sigma = 4\pi r^2$, мы можем произвести интегрирование по относительным скоростям v:

$$\nu' = 16r^2\sqrt{\frac{\pi T}{m}}\frac{N}{V} = 16\pi^2 r^2\sqrt{\frac{\pi}{mT}}P, \tag{23}$$

где P – давление идеального газа. Отсюда находим время свободного пробега $\tau = 1/\nu'$ и длину свободного пробега $\lambda = \tau\bar{v}$:

$$\tau = \frac{1}{16r^2}\sqrt{\frac{m}{\pi T}}\frac{V}{N}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{2T}{m}}, \quad \lambda = \frac{1}{16r^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{V}{N}. \tag{24}$$

§ 2. *H*-теорема Больцмана

Определим неравновесную плотность энтропии и вычислим её производную:

$$S(t) = -\int d\vec{r}\left\{\int\left[f(\vec{v},\vec{r},t)\ln\left(\frac{f(\vec{v},\vec{r},t)}{e}\right)d\vec{v}\right]\right\},$$
$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = -\int d\vec{r}\left\{\int\left[\ln f(\vec{v},\vec{r},t)\frac{\partial f(\vec{v},\vec{r},t)}{\partial t}d\vec{v}\right]\right\}. \tag{25}$$

Таким образом, мы должны каждое слагаемое уравнения Больцмана (16) умножить на $-\ln f(\vec{v},t)$, а затем проинтегрировать по всем скоростям и координатам.

Докажем, что второе и третье слагаемые под интегралом преобразуются к поверхностным интегралам, которые дают ноль при интегрировании по бесконечно удалённой поверхности.

Второе слагаемое преобразуется к полной пространственной производной:

$$-\int d\vec{v}v_k\left\{\int\left[\ln f(\vec{v},\vec{r},t)\frac{\partial f(\vec{v},\vec{r},t)}{\partial r_k}d\vec{r}\right]\right\} =$$
$$= -\int d\vec{v}v_k\left\{\int\frac{\partial}{\partial r_k}\left[f(\vec{v},\vec{r},t)\ln\frac{f(\vec{v},\vec{r},t)}{e}\right]d\vec{r}\right\}.$$

Если внешняя сила не зависит от скорости, тогда и третье слагаемое преобразуется к полной производной по скорости:

$$-\int d\vec{r}\frac{F_k}{m}\left\{\int\left[\ln f(\vec{v},\vec{r},t)\frac{\partial f(\vec{v},\vec{r},t)}{\partial v_k}d\vec{v}\right]\right\}=$$
$$=-\int d\vec{r}\frac{F_k}{m}\left\{\int\frac{\partial}{\partial v_k}\left[f(\vec{v},\vec{r},t)\ln\frac{f(\vec{v},\vec{r},t)}{e}\right]d\vec{v}\right\}.$$

Для нахождения вклада, происходящего от интеграла столкновений, используем его выражение в форме (7):

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t}=-\int d\vec{r}\left\{\int\left[\ln f(\vec{v},\vec{r},t)\frac{\partial f(\vec{v},\vec{r},t)}{\partial t}d\vec{v}\right]\right\}=$$
$$=-\int d\vec{r}d\vec{v}\left\{\int\ln f(\vec{v},\vec{r},t)\left[w(\vec{v},\vec{v}_1;\vec{v}^{\,\prime},\vec{v}_1^{\,\prime})f(\vec{v}^{\,\prime})f(\vec{v}_1^{\,\prime})\right.\right.-$$
$$\left.\left.-\,w(\vec{v}^{\,\prime},\vec{v}_1^{\,\prime};\vec{v},\vec{v}_1)f(\vec{v})f(\vec{v}_1)\right]d\vec{v}_1d\vec{v}_1^{\,\prime}d\vec{v}^{\,\prime}\right\}. \qquad (26a)$$

Произведём замену переменных $\vec{v},\vec{v}_1\leftrightarrow\vec{v}^{\,\prime},\vec{v}_1^{\,\prime}$, при которой вероятность перехода во втором слагаемом переходит в вероятность перехода в первом. Поэтому можно написать

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t}=$$
$$=-\int d\vec{r}\left\{\int\ln\frac{f(\vec{v})}{f(\vec{v}^{\,\prime})}w(\vec{v},\vec{v}_1;\vec{v}^{\,\prime},\vec{v}_1^{\,\prime})f(\vec{v}^{\,\prime})f(\vec{v}_1^{\,\prime})d\vec{v}d\vec{v}_1d\vec{v}_1^{\,\prime}d\vec{v}^{\,\prime}\right\}. \qquad (26b)$$

Далее произведём преобразование симметрии $\vec{v},\vec{v}^{\,\prime}\leftrightarrow\vec{v}_1,\vec{v}_1^{\,\prime}$, которое в силу тождественности рассеивающихся частиц не меняет величины вероятности перехода:

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t}=-\int d\vec{r}\left\{\int\ln\frac{f(\vec{v}_1)}{f(\vec{v}_1^{\,\prime})}w(\vec{v},\vec{v}_1;\vec{v}^{\,\prime},\vec{v}_1^{\,\prime})f(\vec{v}^{\,\prime})f(\vec{v}_1^{\,\prime})d\vec{v}d\vec{v}_1d\vec{v}_1^{\,\prime}d\vec{v}^{\,\prime}\right\}. \qquad (26c)$$

Остаётся сложить выражения (26b) и (26c):

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t}=$$

$$= -\frac{1}{2}\int d\vec{r}\left\{\int \ln\frac{f(\vec{v})f(\vec{v}_1)}{f(\vec{v}^{'})f(\vec{v}_1^{'})} w(\vec{v},\vec{v}_1;\vec{v}^{'},\vec{v}_1^{'})f(\vec{v}^{'})f(\vec{v}_1^{'})d\vec{v}d\vec{v}_1d\vec{v}_1^{'}d\vec{v}^{'}\right\}. \tag{26d}$$

Введём обозначение $f(\vec{v}^{'})f(\vec{v}_1^{'}) = xf(\vec{v})f(\vec{v}_1)$, тогда произведение $f(\vec{v}^{'})f(\vec{v}_1^{'})$ из выражения ($22d$) можно исключить:

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int d\vec{r}\left\{\int x\ln x w(\vec{v},\vec{v}_1;\vec{v}^{'},\vec{v}_1^{'})f(\vec{v})f(\vec{v}_1)d\vec{v}d\vec{v}_1d\vec{v}_1^{'}d\vec{v}^{'}\right\}. \tag{26e}$$

Вернёмся снова к выражению (15) и проинтегрируем его по всем скоростям:

$$\int \hat{S}tfd\vec{v} = \int d\vec{v}\left\{\int \Big[w(\vec{v},\vec{v}_1;\vec{v}^{'},\vec{v}_1^{'})f(\vec{v}^{'})f(\vec{v}_1^{'}) - \right.$$
$$\left. - w(\vec{v}^{'},\vec{v}_1^{'};\vec{v},\vec{v}_1)f(\vec{v})f(\vec{v}_1)\Big] d\vec{v}_1d\vec{v}_1^{'}d\vec{v}^{'}\right\}. \tag{27}$$

После замены переменной $\vec{v},\vec{v}^{'} \leftrightarrow \vec{v}_1,\vec{v}_1^{'}$ второй интеграл переходит в первый, так что всё выражение оказывается равным нулю.

Применим далее к этому выражению соотношение Штюкельберга (13). В результате получим

$$\int d\vec{v}\left\{\int w(\vec{v},\vec{v}_1;\vec{v}^{'},\vec{v}_1^{'})\Big[f(\vec{v}^{'})f(\vec{v}_1^{'}) - f(\vec{v})f(\vec{v}_1)\Big] d\vec{v}_1d\vec{v}_1^{'}d\vec{v}^{'}\right\} = 0. \tag{28}$$

Снова введём обозначение $f(\vec{v}^{'})f(\vec{v}_1^{'}) = xf(\vec{v})f(\vec{v}_1)$, тогда произведение $f(\vec{v}^{'})f(\vec{v}_1^{'})$ из выражения (28) можно исключить:

$$\frac{1}{2}\int d\vec{v}\left\{\int w(\vec{v},\vec{v}_1;\vec{v}^{'},\vec{v}_1^{'})f(\vec{v})f(\vec{v}_1)(x-1)d\vec{v}_1d\vec{v}_1^{'}d\vec{v}^{'}\right\} = 0. \tag{29}$$

Вычитая это выражение из ($24d$), окончательно находим

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} =$$
$$= \frac{1}{2}\int d\vec{r}\left\{\int [x\ln x - (x-1)]\, w(\vec{v},\vec{v}_1;\vec{v}^{'},\vec{v}_1^{'})f(\vec{v})f(\vec{v}_1)d\vec{v}d\vec{v}_1d\vec{v}_1^{'}d\vec{v}^{'}\right\}. \tag{30}$$

Функция $x\ln(x) - x + 1$, стоящая под интегралом, всегда положительна, кроме единственной точки $x = 1$, где функция обращается в нуль и там же имеет минимум. См. рис. 1.

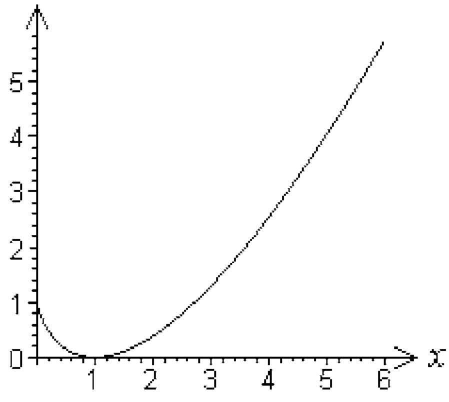

Рис. 1. Подынтегральная функция (30)

§ 3. **Законы сохранения**

Преобразования, которые были использованы при доказательстве H-теоремы, могут быть применены к любой функции $\chi(\vec{r}, \vec{v})$, зависящей от координаты и скорости.

В результате после интегрирования по скоростям $\vec{v}$ по аналогии с $(26d)$ получим

$$\int \chi(\vec{r}, \vec{v}) \left[\frac{\partial f(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t}\right]_{\text{ст}} d\vec{v} = \int \chi(\vec{r}, \vec{v}) St(f(\vec{r}, \vec{v}, t)) d\vec{v} =$$
$$= -\frac{1}{2} \int \left\{ \left[\chi(\vec{r}, \vec{v}) + \chi(\vec{r}, \vec{v}_1) - \chi(\vec{r}, \vec{v}_1^{'}) - \chi(\vec{r}, \vec{v}^{'})\right] \times \right.$$
$$\left. \times \; w(\vec{v}, \vec{v}_1; \vec{v}^{'}, \vec{v}_1^{'}) f(\vec{v}^{'}) f(\vec{v}_1^{'}) d\vec{v} d\vec{v}_1 d\vec{v}_1^{'} d\vec{v}^{'} \right\}. \qquad (31)$$

Если предположить, что функция $\chi(\vec{r}, \vec{v})$ зависит только от координаты $\vec{r}$, правая часть (31) обратится в нуль.

Точно так же правая часть обращается в нуль, если $\chi(\vec{r}, \vec{v}) = \vec{v}\zeta(\vec{r})$ или если $\chi(\vec{r}, \vec{v}) = v^2\eta(\vec{r})$, где $\zeta(\vec{r})$ и $\eta(\vec{r})$ – произвольные функции координаты $\vec{r}$. Это утверждение следует из того, что вероятностная величина $w(\vec{v}, \vec{v}_1; \vec{v}^{'}, \vec{v}_1^{'})$ содержит в качестве множителя произведение δ-функций от импульсов и энергий:

$$w(\vec{v}, \vec{v}_1; \vec{v}^{'}, \vec{v}_1^{'}) \sim$$
$$\sim \delta\left(m\vec{v} + m\vec{v}_1 - m\vec{v}^{'} - m\vec{v}_1^{'}\right)\delta\left(mv^2 + mv_1^2 - m(v^{'})^2 - m(v_1^{'})^2\right). \quad (32)$$

Эти свойства интеграла столкновений связаны с выполнением законов сохранения трёх компонент импульса и закона сохранения энергии при столкновениях.

З а д а ч а № 2. Локально-равновесная функция распределения

Доказать, что локально-равновесная функция распределения с заданной средней скоростью $\vec{V}$ обращает в нуль интеграл столкновений.

Р е ш е н и е.

В системе отсчёта, движущейся с заданной скоростью $\vec{V}$, кинетическая энергия молекулы записывается через скорость относительного движения $\vec{u} = \vec{v} - \vec{V}$ следующим образом: $\epsilon(v) = m(\vec{v} - \vec{V})^2/2$.

В соответствии с этим максвелловская функция распределения, пронормированная на заданную плотность частиц (n), имеет вид

$$f(\vec{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\vec{v} - \vec{V})^2}{2T}\right). \quad (33)$$

В результате естественной замены переменной интегрирования $\vec{v} = \vec{V} + \vec{u}$ обнаруживаем, что $< \vec{v} > = \vec{V}$, а произведения δ-функций, выражающих законы сохранения энергии и импульса (32), переписываются следующим образом:

$$\delta\left(m\vec{v} + m\vec{v}_1 - m\vec{v}^{'} - m\vec{v}_1^{'}\right)\delta\left(mv^2 + mv_1^2 - m(v^{'})^2 - m(v_1^{'})^2\right) \sim$$

$$\sim \delta\left(\vec{u}+\vec{u}_1-\vec{u}^{'}-\vec{u}_1^{'}\right)\times$$
$$\times\ \delta\left\{u^2+u_1^2-(u^{'})^2-(u_1^{'})^2+2\vec{V}\left(\vec{u}+\vec{u}_1-\vec{u}^{'}-\vec{u}_1^{'}\right)\right\}=$$
$$=\delta\left(\vec{u}+\vec{u}_1-\vec{u}^{'}-\vec{u}_1^{'}\right)\delta\left\{u^2+u_1^2-(u^{'})^2-(u_1^{'})^2\right\}.$$

Умножая это выражение на произведение функций локально-равновесных функций распределения, получим

$$\delta\left\{u^2+u_1^2-(u^{'})^2-(u_1^{'})^2\right\}\exp\left(-\frac{m(\vec{u})^2}{2T}\right)\exp\left(-\frac{m(\vec{u}_1)^2}{2T}\right)=$$
$$=\delta\left\{u^2+u_1^2-(u^{'})^2-(u_1^{'})^2\right\}\exp\left(-\frac{m(\vec{u}^{'})^2}{2T}\right)\exp\left(-\frac{m(\vec{u}_1^{'})^2}{2T}\right).$$

Это соотношение фактически решает поставленную задачу.

§ 4. τ-приближение

Обозначим через f_0 локально-равновесную функцию распределения (33), тогда плотность газа ρ, скорость потока $\vec{V}$ и плотность энергии E будут определяться по формулам:

$$\rho = mn = \int mf_0 d\vec{v}, \quad \rho\vec{V} = \int m\vec{v}f_0 d\vec{v}, \quad nE = \frac{1}{2}\int mv^2 f_0 d\vec{v}. \tag{34}$$

Эти соотношения совпадают с общими формулами, записанными для точной функции распределения f:

$$\rho = mn = \int mf d\vec{v}, \quad \rho\vec{V} = \int m\vec{v}f d\vec{v}, \quad nE = \frac{1}{2}\int mv^2 f d\vec{v}. \tag{35}$$

Поскольку локально-равновесная функция распределения обращает в нуль интеграл столкновений, кинетическое уравнение может быть записано в максимально упрощённом виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v_k\frac{\partial f}{\partial r_k}+\frac{F_k}{m}\frac{\partial f}{\partial v_k}=-\frac{f-f_0}{\tau}, \tag{36}$$

где $1/\tau$ – величина порядка частоты столкновений выделенной частицы в единицу времени.

Умножая уравнение (36) на плотность, на импульс и на кинетическую энергию, получим законы сохранения числа частиц, импульса и энергии, поскольку после интегрирования по скоростям в правой части обнаружим нулевой результат. В этом можно убедиться, если произвести взаимное вычитание соответствующих соотношений (35) и (34).

Скорость изменения энтропии запишем в следующем виде (см. (26a)):

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = -\int d\vec{r}\left\{\int\left[\ln f(\vec{v},\vec{r},t)\frac{\partial f(\vec{v},\vec{r},t)}{\partial t}d\vec{v}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{\tau}\int d\vec{r}\left\{\int \ln f(\vec{v},\vec{r},t)\left[f(\vec{v},\vec{r},t) - f_0(\vec{v},\vec{r},t)\right]\right\}d\vec{v}. \qquad (37)$$

Поскольку $\ln f_0$ есть линейная функция энергии и импульса, то из (37) можно вычесть такое же выражение, но с заменой $\ln f(\vec{v},\vec{r},t) \to \ln f_0(\vec{v},\vec{r},t)$. В результате получим закон возрастания энтропии:

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau}\int d\vec{r}\left\{\int \ln\frac{f(\vec{v},\vec{r},t)}{f_0(\vec{v},\vec{r},t)}\left[f(\vec{v},\vec{r},t) - f_0(\vec{v},\vec{r},t)\right]\right\}d\vec{v}. \qquad (38)$$

З а д а ч а № 3. Коэффициент теплопроводности в τ-приближении

Найти коэффициент теплопроводности в τ-приближении.

Р е ш е н и е.

Предположим, что в системе задан постоянный во времени градиент температуры. В этом случае функция распределения не зависит от времени, и в τ-приближении имеем следующее уравнение:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}\vec{v}\right) = -\frac{f - f_0}{\tau}. \qquad (39)$$

Здесь f_0 – локально-равновесная функция распределения, которая в данном случае совпадает с равновесной функцией распределения, в которую входит температура, зависящая от координат. При этом плотность следует выразить через давление P и температуру, поскольку по условию задачи при заданном градиенте температуры система находится в механическом равновесии. Так, для идеального газа имеем: $n(\vec{r}) = P/T(\vec{r})$,

$$f_0(\vec{r},\vec{v}) = n(\vec{r})\left(\frac{m}{2\pi T(\vec{r})}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{mv^2}{2T(\vec{r})}\right). \tag{40}$$

Будем решать кинетическое уравнение (39) в виде разложения по степеням градиента температуры $f \approx f_0 + f_1$. Тогда поправка первого приближения приобретает вид

$$f_1 = -\tau\left(\frac{\partial f_0}{\partial \vec{r}}\vec{v}\right) = (\vec{v}\nabla T)\,\tau f_0\left\{-\frac{mv^2}{2T^2} + \frac{5}{2T}\right\}. \tag{41}$$

Далее считаем поток энергии:

$$\vec{Q} = \int \vec{v}\frac{mv^2}{2}f_1 d\vec{v} = \nabla T\int \frac{mv^4}{6}\tau f_0\left\{\frac{mv^2}{2T^2} - \frac{5}{2T}\right\}d\vec{v}, \tag{42}$$

а затем коэффициент теплопроводности:

$$\kappa = \int \frac{mv^4}{6}\tau f_0\left\{\frac{mv^2}{2T^2} - \frac{5}{2T}\right\}d\vec{v}. \tag{43}$$

Если считать величину τ не зависящей от скорости, тогда получим

$$\kappa = \frac{5T}{2m}n_0\tau = \frac{5P}{2m}\tau. \tag{44}$$

На самом деле обратное время релаксации пропорционально плотности n_0, скорости v и сечению рассеяния σ. Если предположить, что сечение рассеяния не зависит от скорости ($\sigma = \pi d^2$), тогда имеем результат, не зависящий от плотности и пропорциональный средней тепловой скорости:

$$\kappa \sim \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{T}{m}}. \tag{45}$$

Приближённое решение уравнения Больцмана даёт

$$\kappa = \frac{75}{64\sqrt{\pi}d^2}\sqrt{\frac{T}{m}} \approx \frac{0.66}{d^2}\sqrt{\frac{T}{m}}. \qquad (45a)$$

З а д а ч а № 4. Коэффициент вязкости в τ-приближении

Определить коэффициент первой вязкости в τ-приближении.

Р е ш е н и е.

Предположим, что в системе имеется средняя скорость $\vec{u}$ вдоль оси x, зависящая от координаты y. В соответствии с этим функция распределения нулевого приближения записывается в следующем виде: $\vec{u} = (u_x(y), 0, 0)$,

$$f_0(\vec{r}, \vec{v}) = n_0\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\exp\left\{-\frac{m\left(\vec{v} - \vec{u}(\vec{r})\right)^2}{2T}\right\}. \qquad (46)$$

С учётом того, что нулевая функция распределения зависит только от y, находим решение кинетического уравнения (39) в следующем виде:

$$f_1 = -\tau\left(\frac{\partial f}{\partial y}v_y\right) = \tau f_0\frac{m}{T}\left(v_x - u_x\right)v_y\frac{\partial u_x}{\partial y}. \qquad (47)$$

С помощью этой функции распределения вычисляем среднюю плотность потока x-компоненты импульса единицы объёма в направлении y:

$$\Pi_{x,y} = \int mv_xv_yf_1d\vec{v} = \frac{m^2}{T}\int\tau f_0v_x\left(v_x - u_x\right)v_y^2\frac{\partial u_x}{\partial y}d\vec{v}. \qquad (48)$$

Учитывая, что f_0 зависит от разности $v_x - u_x$, имеет смысл произвести замену $v_x \to v_x + u_x$, после чего находим коэффициент вязкости:

$$\eta = \frac{m^2}{T}\int\tau f_{00}v_x^2v_y^2d\vec{v} = Tn_0\tau = \tau P. \qquad (49)$$

Здесь f_{00} – распределение Максвелла с нулевой средней скоростью, а вычисление интеграла произведено для случая, не зависящего от скорости времени релаксации.

Вычисление интеграла с постоянным сечением рассеяния и $1/\tau \sim \sigma n_0 v$ приводит к той же температурной зависимости, что и у теплопроводности:

$$\eta \sim \frac{\sqrt{mT}}{\sigma}. \tag{50a}$$

Приближённое решение уравнения Больцмана с заданным сечением рассеяния $\sigma = \pi d^2$ даёт

$$\eta = \frac{5}{16\sqrt{\pi}d^2}\sqrt{mT} \approx 0.18\frac{\sqrt{mT}}{d^2}. \tag{50b}$$

Непосредственные вычисления показывают, что отношение вязкости к теплопроводности есть постоянная величина, пропорциональная массе:

$$\frac{\eta}{\kappa} = \frac{2}{5}m, \quad \frac{\eta}{\kappa} = \frac{4}{15}m. \tag{51}$$

Первая формула соответствует постоянному времени релаксации, вторая – постоянному сечению рассеяния. Эти формулы называются соотношениями Чепмэна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Больцман Л.* Избранные труды. – М.: Наука, 1984. – 589 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Физическая кинетика. – М.: Физматлит, 2001. – 535 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001. – 494 с.