

## ЛЕКЦИЯ VII

### НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

#### С о д е р ж а н и е

§ 1. Теория Швингера–Миллса–Келдыша .....	159
§ 1.1. Переход к представлению взаимодействия .....	160
§ 1.2. Переход к усреднению по состояниям идеального газа .....	161
§ 1.3. Диаграммная техника .....	164
§ 2. Теория туннелирования через плоский контакт .....	166
§ 3. Формула Кубо .....	169
§ 4. Продольное внешнее поле .....	170
§ 4.1. Вычисление продольной нестационарной поправки	171
§ 4.2. Продольная диэлектрическая проницаемость .....	173
§ 5. Поперечное внешнее поле .....	176
§ 5.1. Вычисление поперечной нестационарной поправки	177
§ 5.2. Поперечная диэлектрическая проницаемость .....	181
§ 5.3. Вычисление глубины проникновения .....	183
§ 6. Скорость релаксации ядерных спинов .....	184
Список литературы .....	188

Изучаются основные принципы, лежащие в основе квантовой кинетической теории, разработанные Швингером [1], Миллсом и Келдышем [2]. В качестве простейшего применения рассмотрена теория линейного отклика, которая используется для вычисления продольной и поперечной части диэлектрической проницаемости. На основании этого метода построена теория туннелирования через плоский контакт. Вычисляется температурная зависимость скорости релаксации ядерных спинов, взаимодействующих с идеальным ферми-газом.

## § 1. Теория Швингера–Миллса–Келдыша

Предположим, что система помещена во внешнее переменное поле и находится в тепловом и материальном контакте с термостатом. В линейном приближении по внешнему полю различные коэффициенты переноса можно выразить через запаздывающую функцию Грина:

$$D^R(t, t') = \left\{ \begin{array}{ll} -i \langle [\tilde{A}(t), \tilde{B}(t')]_{\pm} \rangle, & t > t' \\ 0, & t < t' \end{array} \right\} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\omega}^R e^{-i\omega(t-t')} d\omega. \quad (1)$$

Здесь  $\tilde{A}(t) = e^{i\hat{H}t} \hat{A} e^{-i\hat{H}t}$  – операторы в представлении Гейзенберга. Скобки означают усреднение по равновесному состоянию с заданной температурой и химическим потенциалом.  $\hat{H}$  – полный гамильтониан системы. Верхний знак (+) выбирается для случая, когда оба оператора ферми-типа; нижний знак – для операторов бозе-типа.

Некоторое время считалось, что теорию возмущений для нахождения запаздывающей функции построить невозможно. Однако оказалось, что ряды теории возмущений, наряду с запаздывающей функцией  $D^R(t, t')$ , содержат также опережающую  $D^A(t, t')$  и причинную  $D^c(t, t')$  функции:

$$D^A(t, t') = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t > t' \\ i \langle [\tilde{A}(t), \tilde{B}(t')]_{\pm} \rangle, & t < t' \end{array} \right\} = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\omega}^A e^{-i\omega(t-t')} d\omega, \quad (2)$$

$$D^c(t, t') = -i \langle \hat{T} (\tilde{A}(t), \tilde{B}(t')) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_{\omega}^c e^{-i\omega(t-t')} d\omega, \quad (3)$$

где  $\hat{T}$  – символ упорядочения по времени:

$$\hat{T}(\tilde{A}(t), \tilde{B}(t')) = \begin{cases} \tilde{A}(t)\tilde{B}(t'), & t > t' \\ \mp \tilde{B}(t)\tilde{A}(t'), & t < t' \end{cases}. \quad (4)$$

Здесь и ниже верхний знак относится к статистике Ферми, а нижний знак – к статистике Бозе.

### § 1.1. Переход к представлению взаимодействия

Выразим операторы в представлении Гейзенберга через операторы в представлении взаимодействия:

$$A(t) = e^{i\hat{H}_0 t} \hat{A} e^{-i\hat{H}_0 t}, \quad \tilde{A}(t) = S^+(t, 0) A(t) S(t, 0), \quad (5)$$

где

$$S(t, 0) = S(t) = e^{i\hat{H}_0 t} e^{-i\hat{H} t}. \quad (6)$$

Дифференцируя  $S$ -матрицу по времени, получим

$$i\dot{S}(t) = V(t)S(t, 0); \quad V(t) = e^{i\hat{H}_0 t} (\hat{H} - \hat{H}_0) e^{-i\hat{H}_0 t}. \quad (7)$$

Решая уравнение (7) путем итераций, находим при  $t > t_0$ :

$$S(t, t_0) = \hat{T} \exp \left( -i \int_{t_0}^t V(t') dt' \right). \quad (8)$$

Аналогично

$$S^+(t, t_0) = \hat{T}_a \exp \left( i \int_{t_0}^t V(t') dt' \right), \quad (9)$$

где  $\hat{T}_a$  – антихронологический оператор.

**§ 1.2. Переход к усреднению по состояниям идеального газа**

От усреднения со статистическим оператором  $\hat{\rho} = \exp(-\hat{H}/T)$  перейдем к усреднению со статистическим оператором  $\hat{\rho}_0 = \exp(-\hat{H}_0/T)$ .

Для этой цели вычислим коммутатор  $[\hat{H}_0, S(0, -\infty)]$ . Используя формулу  $-i\dot{A}(t) = [H_0, A(t)]$ , справедливую для любого оператора в представлении взаимодействия, имеем

$$\begin{aligned} [\hat{H}_0, \hat{S}(0, -\infty)] = & - \sum_{k=1}^{\infty} (-i)^{n-1} \sum_{\nu=1}^n \int_{-\infty}^0 V(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} V(t_2) \dots \\ & \dots \int_{-\infty}^{t_{\nu-1}} \dot{V}(t_{\nu}) \int_{-\infty}^{t_{\nu}} V(t_{\nu+1}) \dots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} V(t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_1. \end{aligned} \quad (10)$$

Легко видеть, что в результате интегрирования по частям происходит полное сокращение всех слагаемых внутренней суммы по  $\nu$ , кроме первого  $\nu = 1$  и последнего  $\nu = n$ . В результате находим соотношение:

$$[\hat{H}_0, S(0, -\infty)] = -V(0)S(0, -\infty) + S(0, -\infty)V(-\infty). \quad (11)$$

Отсюда

$$\hat{H}S(0, -\infty) = S(0, -\infty)(\hat{H}_0 + V(-\infty)), \quad \text{т.к.} \quad V(0) = \hat{H} - \hat{H}_0.$$

Используя это соотношение и условие унитарности  $\hat{S}^{-1}(0, -\infty) = \hat{S}^+(0, -\infty)$ , для любого целого положительного  $k$  можно получить

$$\hat{H}^k = S(0, -\infty) [\hat{H}_0 + V(-\infty)]^k S^+(0, -\infty). \quad (12)$$

Здесь и ниже используется обозначение  $\tilde{H}_0 = \hat{H}_0 + V(-\infty)$ .

Если разложить статистический оператор  $\exp(-\hat{H}/T)$  в ряд Тейлора по обратной температуре, тогда с помощью общего соотношения (12) находим

$$\exp(-\hat{H}/T) = S(0, -\infty)\exp(-\tilde{H}_0/T)S^+(0, -\infty). \quad (13)$$

Формулы (8), (9) и (13) позволяют выразить причинную функцию Грина (3) в виде среднего по состояниям невзаимодействующих частиц. Используя инвариантность  $Sp$  относительно циклической перестановки при  $t > t'$ , можно написать

$$D^c(t, t') = -i \frac{Sp \left\{ \exp(-\tilde{H}_0/T) \hat{R}(t, t') \right\}}{Sp \left\{ \exp(-\tilde{H}_0/T) S^+(0, -\infty) S(0, -\infty) \right\}}, \quad (14)$$

где  $\hat{R}(t, t') =$

$$= S^+(0, -\infty) \hat{T} (S^+(t, 0) A(t) S(t, 0) S^+(t', 0) B(t') S(t', 0) S(0, -\infty)).$$

Вопрос о существовании предела  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \tilde{V}(t) = \hat{L}$  до конца не ясен, но его можно найти из "физических" соображений. Допустим, что  $\hat{L}$  есть число, и рассмотрим знаменатель причинной функции  $D^c$ :

$$Sp \left( e^{-\frac{H}{T}} \right) = Sp \left\{ e^{-\frac{\tilde{H}_0}{T}} S^+(0, -\infty) S(0, -\infty) \right\} = e^{-\frac{\hat{L}}{T}} Sp \left( e^{-\frac{H_0}{T}} \right). \quad (15)$$

Логарифмируя полученное соотношение, находим:  $\hat{L} =$

$$= \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{i\hat{H}_0 t} \hat{V} e^{-i\hat{H}_0 t} = -T \ln \left[ \frac{Sp(\exp(-H/T))}{Sp(\exp(-H_0/T))} \right] = \Omega - \Omega_0 \quad (16)$$

– разность  $\Omega$ -потенциалов при наличии и в отсутствие взаимодействия. Эта величина пропорциональна числу частиц в системе, однако, как видно из (14), она сокращается.

Мы видели, что оператор  $S^+(t, t')$  подразумевает упорядочение в направлении от  $t$  к  $t'$ . Отсюда ясно, что и в знаменателе под знаком среднего в (14) стоят операторы, упорядоченные от

$-\infty$  до максимального значения  $t_m = t$  (или  $t'$ ), а затем назад от  $t_m$  до  $-\infty$ . Это упорядочение можно представить как упорядочение на контуре "с", идущего из  $-\infty$  до максимального  $t_m$ , а затем возвращающегося назад в  $-\infty$ . Добавим к этому контуру часть, которая начинается в  $t_m$ , уходит в  $+\infty$ , а потом возвращается из  $+\infty$  в  $t_m$ . От такого добавления ничего не меняется, поэтому можно считать, что упорядочение произведено на контуре  $\Gamma$ , идущего от  $-\infty$  до  $+\infty$ , а затем назад от  $+\infty$  до  $-\infty$  (рис. 1).

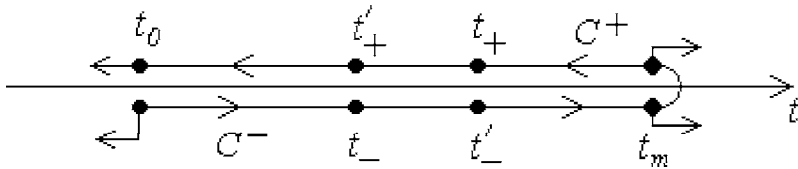


Рис. 1. Упорядочение на контуре Келдыша

Таким образом, сначала рассматриваем функцию Грина, зависящую от операторов, упорядоченных как на нижней, так и на верхней части контура Келдыша (ниже – контур  $\Gamma$ )

$$D^c(t, t') = -i \langle \hat{T}_\Gamma (A(t_-), B(t'_-) \hat{S}_\Gamma) \rangle_0 / \langle \hat{S}_\Gamma \rangle_0. \quad (17)$$

Мы считаем, что  $t_-$  и  $t'_-$  лежат на нижней части контура  $\Gamma$ , однако ясно, что нам придется рассмотреть еще три функции:

$$\tilde{D}^a(t_+, t'_+); \quad D^<(t_-, t'_+) \quad \text{и} \quad D^>(t_+, t'_-). \quad (18)$$

В первой из написанных функций происходит антиупорядочение; во второй всегда  $t_- < t'_+$ , а в третьей  $t_+ > t'_-$ .

В нулевом приближении получим:  $D^c(t, t') =$

$$= -i \langle \hat{T} (A(t), B(t')) \rangle_0 = \begin{cases} -i \langle A(t)B(t') \rangle_0, & t > t' \\ \pm i \langle B(t)A(t') \rangle_0, & t < t' \end{cases}; \quad (19)$$

$$\tilde{D}^c(t, t') = D^a(t, t') = \left\{ \begin{array}{l} -i \langle A(t)B(t') \rangle_0, \quad t < t' \\ \pm i \langle B(t')A(t) \rangle_0, \quad t' < t \end{array} \right\}; \quad (20)$$

$$D^<(t, t') = \pm i \langle B(t'), A(t) \rangle_0; \quad D^>(t, t') = -i \langle A(t), B(t') \rangle_0. \quad (21)$$

### § 1.3. Диаграммная техника

В представлении взаимодействия операторы рождения и уничтожения  $\hat{a}_k^+(t)$ ,  $\hat{a}_k(t)$  только множителями отличаются от соответствующих операторов в представлении Шрёдингера:

$$\hat{a}_k(t) = \hat{a}_k e^{(-i\xi_k t)}, \quad \hat{a}_k^+(t) = \hat{a}_k^+ e^{(i\xi_k t)}. \quad (22)$$

Отсюда следует, что при упорядочении вдоль контура  $\Gamma$  все рекуррентные соотношения, полученные для термодинамических (мацубаровских) операторов, остаются в силе, если во всех определениях произвести замену  $\xi_k \tau \rightarrow i\xi_k t/\hbar$ .

Перейдем от интегрирования по контуру  $\Gamma$  к интегрированию по времени. В результате каждая вершина один раз при интегрировании по  $t_+$  будет иметь знак, противоположный тому, который она имеет при интегрировании по  $t_-$  (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ).

Каждая сплошная линия приобретает второй индекс, по которому её следует сворачивать с вершиной, имеющей структуру:

$$\hat{\gamma} = -\text{sign}(\alpha_1) \delta_{\alpha_1, \alpha_2} \delta_{\alpha_1, \alpha_3} \delta_{\alpha_1, \alpha_4} \dots \delta_{\alpha_1, \alpha_n}. \quad (23)$$

Здесь по повторяющемуся индексу  $\alpha_1$  суммирование не производится.

Функция Грина теперь записывается в виде матрицы (2 x 2). Для её компонент Фурье можно написать

$$\hat{G}_\omega = G_\omega^{--} = G_\omega^c = \left[ \frac{1 - n_F(\xi)}{\omega - \xi + i\delta} \right] + \left[ \frac{n_F(\xi)}{\omega - \xi - i\delta} \right];$$

$$G_{\omega}^{-+} = G_{\omega}^{<} = 2\pi i \delta[\omega - \xi] n_F(\xi); \quad (24)$$

$$G_{\omega}^{+-} = G_{\omega}^{>} = -2\pi i \delta[\omega - (\xi)] [1 - n_F(\xi)];$$

$$G_{\omega}^{++} = G_{\omega}^a = - \left[ \frac{1 - n_F(\xi)}{\omega - \xi - i\delta} \right] - \left[ \frac{n_F(\xi)}{\omega - \xi + i\delta} \right]. \quad (25)$$

Здесь  $n_F(\xi)$  – распределение Ферми от энергии  $\xi = \epsilon - \mu$ . На самом деле, только две функции независимы, поэтому с помощью линейного преобразования можно уменьшить число уравнений [2], [3]. Обычно используют следующее каноническое преобразование:

$$\begin{aligned} \hat{G} &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^{--}, & G^{-+} \\ G^{+-}, & G^{++} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} = \\ &= e^{-i\xi t} \begin{pmatrix} 0, & i\theta(-t) \\ -i\theta(t), & -i[1 - 2n_F(\xi)] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

В компонентах Фурье новая  $G$ -функция имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{G}_{\omega} &= \begin{pmatrix} 0, & G_{\omega}^A \\ G_{\omega}^R, & F_{\omega} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0, & [\omega - \xi - i\delta]^{-1} \\ [\omega - \xi + i\delta]^{-1}, & -2\pi i [1 - 2n_F(\xi)] \delta[\omega - \xi] \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Вершинная часть после преобразования равна нулю, если четно суммарное число входящих ( $k$ ) и выходящих ( $n$ ) сплошных и волнистых линий, имеющих индекс два. Для нечетного числа единиц вершинная часть равна  $2^{1-(k+n)/2}$ . Волнистые линии, не зависящие от времени, преобразуются следующим образом:

$$\delta(t) V \cdots (\vec{r}) \hat{\tau}^{(z)} \rightarrow \delta(t) V \cdots (\vec{r}) \hat{\tau}^{(x)}. \quad (28)$$

В компонентах Фурье имеем

$$V \cdots (\vec{q}) \hat{\tau}^{(z)} \rightarrow V \cdots (\vec{q}) \hat{\tau}^{(x)}, \quad (29)$$

где  $\hat{\tau}^{(k)}$  – известные матрицы Паули.



### § 2. Теория туннелирования через плоский контакт

Будем считать, что рождение и уничтожение электронов слева от контакта описывается операторами  $\hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+$ ,  $\hat{a}_{\vec{p}\sigma}$ , а справа соответственно операторами  $\hat{b}_{\vec{q}\sigma}^+$ ,  $\hat{b}_{\vec{q}\sigma}$ . Если существует перекрытие волновых функций правого и левого металлов, тогда в гамильтониане появляется дополнительное слагаемое:

$$\hat{H}_T = \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} \left( T_{\vec{p}\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ \hat{b}_{\vec{q}\sigma} + T_{\vec{p}\vec{q}}^* \hat{b}_{\vec{q}\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \right). \quad (30)$$

Здесь  $T_{\vec{p}, \vec{q}}$  – так называемый интеграл перескока. Для плоской границы при  $z = z_0$  он имеет следующий вид:

$$T_{\vec{p}, \vec{q}} = - \int \left\{ \frac{i}{2m} \left[ \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \frac{d}{dz} \chi_{\vec{q}}(\vec{r}) - \frac{d}{dz} \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \chi_{\vec{q}}(\vec{r}) \right] + \frac{e}{2mc} A_z \left[ \varphi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) \chi_{\vec{q}}(\vec{r}) + \text{h.c.} \right] \right\}_{z=z_0} dx dy, \quad (31)$$

где  $\varphi_{\vec{p}}(\vec{r})$ ,  $\chi_{\vec{q}}(\vec{r})$  – волновые функции левого и правого металла.

Полный ток слева направо равен скорости уменьшения числа электронов в левом металле  $\hat{N}_l = \sum_{\vec{p}, \sigma} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{p}\sigma}$ , умноженной на заряд электрона  $e$ :

$$\hat{I} = -e \dot{N}_l = -ie [\hat{H}_T, \hat{N}_l]. \quad (32)$$

Здесь оставлена только туннельная часть гамильтониана, которая приводит к несохранению по отдельности чисел электронов в левом и правом металлах. Непосредственное вычисление коммутатора [...] приводит к следующему выражению для оператора тока:

$$\hat{I} = ie \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} \left[ T_{\vec{p}\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ \hat{b}_{\vec{q}\sigma} - T_{\vec{p}\vec{q}}^* \hat{b}_{\vec{q}\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \right]. \quad (33)$$

Приложим к контакту разность потенциалов  $U$ . Это означает, что в пространственной области левого и правого металла возникает дополнительная потенциальная энергия  $e\varphi_1$  и  $e\varphi_2$ . В соответствии с этим гейзенберговские уравнения для  $\psi$ -операторов

приобретают дополнительные слагаемые:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}_1(\vec{r}, t)}{\partial t} = \varphi_1 \hat{\psi}_1(\vec{r}, t) + \dots; \quad i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}_2(\vec{r}, t)}{\partial t} = \varphi_2 \hat{\psi}_2(\vec{r}, t) + \dots \quad (34)$$

Поскольку каждый из этих потенциалов не зависит от координат, то удобно перейти к импульсному представлению, так что для каждого оператора рождения и уничтожения имеем дополнительную потенциальную энергию:

$$i\hbar \frac{\partial \hat{a}_{\vec{p},\sigma}(t)}{\partial t} = \varphi_1 \hat{a}_{\vec{p},\sigma}(t) + \dots; \quad i\hbar \frac{\partial \hat{b}_{\vec{q},\sigma}(t)}{\partial t} = \varphi_2 \hat{b}_{\vec{q},\sigma}(t) + \dots \quad (35)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \hat{a}_{\vec{p},\sigma}^+(t)}{\partial t} = \varphi_1 \hat{a}_{\vec{p},\sigma}^+(t) + \dots; \quad -i\hbar \frac{\partial \hat{b}_{\vec{q},\sigma}^+(t)}{\partial t} = \varphi_2 \hat{b}_{\vec{q},\sigma}^+(t) + \dots \quad (36)$$

Поскольку каждый из этих потенциалов не зависит от времени, то можно произвести каноническое преобразование, которое полностью сокращает дополнительные слагаемые. Для достижения этой цели достаточно сделать простейшую замену переменных:

$$\hat{a}_{\vec{p}\sigma} = \exp(-i\frac{\varphi_1}{\hbar}t) \hat{A}_{\vec{p}\sigma}; \quad \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ = \exp(i\frac{\varphi_1}{\hbar}t) \hat{B}_{\vec{p}\sigma}^+; \quad (37a)$$

$$\hat{b}_{\vec{p}\sigma} = \exp(-i\frac{\varphi_2}{\hbar}t) \hat{B}_{\vec{p}\sigma}; \quad \hat{b}_{\vec{p}\sigma}^+ = \exp(i\frac{\varphi_2}{\hbar}t) \hat{B}_{\vec{p}\sigma}^+. \quad (37b)$$

Для того чтобы не вводить новых обозначений, запишем это преобразование следующим образом:

$$\hat{a}_{\vec{p}\sigma} \rightarrow \exp(-i\varphi_1 t) \hat{a}_{\vec{p}\sigma}; \quad \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ \rightarrow \exp(i\varphi_1 t) \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+; \quad (38a)$$

$$\hat{b}_{\vec{p}\sigma} \rightarrow \exp(-i\varphi_2 t) \hat{b}_{\vec{p}\sigma}; \quad \hat{b}_{\vec{p}\sigma}^+ \rightarrow \exp(i\varphi_2 t) \hat{b}_{\vec{p}\sigma}^+. \quad (38b)$$

Здесь и ниже считается, что  $\hbar = 1$ , а разность потенциалов  $\varphi_2 - \varphi_1 = U$ .

Таким образом, в новых переменных нулевой гамильтониан не содержит потенциала, в то время как туннельный гамильтониан теперь зависит от разности потенциалов:

$$\hat{H}_T = \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} \left( e^{ieUt} T_{\vec{p}\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ \hat{b}_{\vec{q}\sigma} + e^{-ieUt} T_{\vec{p}\vec{q}}^* \hat{b}_{\vec{q}\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \right). \quad (39)$$

Оператор туннельного тока (33) также содержит две временных компоненты Фурье:

$$\hat{I} = ie \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} \left( e^{ieUt} T_{\vec{p}\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ \hat{b}_{\vec{q}\sigma} - e^{-ieUt} T_{\vec{p}\vec{q}}^* \hat{b}_{\vec{q}\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \right). \quad (40)$$

Вычислим среднее значение оператора тока:

$$I = \langle \hat{I} \rangle = \langle \hat{I}(t_+) \hat{S} \rangle_0 / \langle \hat{S} \rangle_0. \quad (41)$$

Здесь использована общая формула (17). В качестве гамильтониана взаимодействия используем туннельный гамильтониан (39), так что усреднение  $\langle \dots \rangle_0$  производится по состояниям без туннелирования. Оператор тока  $\hat{I}(t_+)$  есть оператор тока (40) в представлении взаимодействия, вычисленный в заданный момент времени на нижней половине контура  $\Gamma$ . После интегрирования по времени в первом порядке возникают произведения функций Грина с частотами, сдвинутыми на величину  $\pm eU$ . Можно заметить, что произведения причинных функций из окончательного ответа выпадают. Остаются только произведения  $\delta$ -образных компонент, отвечающих переходам между различными частями контура  $\Gamma$ :

$$I = 2e \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} |T_{\vec{p}\vec{q}}|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[ A_{\omega}^{-+} B_{\omega+\Omega}^{+-} - B_{\omega}^{-+} A_{\omega-\Omega}^{+-} \right]. \quad (42)$$

Здесь  $A_{\omega}$  и  $B_{\omega}$  – функции Грина, относящиеся к левому и правому металлу. После подстановки и интегрирования по  $\omega$  получим

$$I = 4\pi e \sum_{\vec{p}, \vec{q}} |T_{\vec{p}\vec{q}}|^2 [n_F(\xi_{\vec{p}}) - n_F(\xi_{\vec{q}})] \delta(\xi_{\vec{p}} - \xi_{\vec{q}} + eU). \quad (43)$$

При не слишком высоких температурах интегрирование по импульсам  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$  производится вблизи поверхности Ферми, так что удобно произвести следующую замену:

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow V_1 \frac{\nu_1}{2} \int d\xi_{\vec{p}}, \quad \sum_{\vec{q}} \rightarrow V_2 \frac{\nu_2}{2} \int d\xi_{\vec{q}}, \quad (44)$$

где  $V_{1,2}$  и  $\nu_{1,2}$  – объем и плотность состояний левого (1) и правого (2) металла. После такой замены произведем разложение по степеням разности потенциалов и, наконец, разделим на площадь контакта  $S$ . В результате получаем плотность тока:

$$j = \pi e^2 U \frac{V_1 V_2}{S} \nu_1 \nu_2 \overline{|T_{\vec{p}, \vec{q}}|^2}. \quad (45)$$

Таким образом, сопротивление контакта  $R = U/j$  определяется следующим соотношением:

$$R^{-1} = \pi e^2 \frac{V_1 V_2}{S} \nu_1 \nu_2 \overline{|T_{\vec{p}, \vec{q}}|^2}, \quad (46)$$

где черта обозначает интегрирование по импульсам  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$ , лежащим на поверхностях Ферми левого и правого металла.

### § 3. Формула Кубо

Предположим, что гамильтониан взаимодействия с внешним полем имеет следующий вид:  $-\vec{A}(t)\mathbf{j}(\mathbf{t})$ .

Если мы поставим перед собой задачу вычисления среднего тока, возникающего под действием внешнего поля  $\vec{A}(t)$ , то в линейном приближении по внешнему полю получаем общий результат:

$$\begin{aligned} \langle \hat{j}_k(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \hat{T}_{t\Gamma} \left( \hat{j}_k(t) \vec{A}_n(\tau_-) \hat{j}_n(\tau_-) \right) d\tau_- \rangle_0 - \\ &- \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \hat{T}_{\Gamma} \left( \hat{j}_k(t_-) A_n(\tau_+) \hat{j}_n(\tau_+) \right) \rangle_0 d\tau_+. \end{aligned} \quad (47)$$

Раскрываем последовательно операцию  $T$ -упорядочения сначала на нижней половине:

$$\langle \hat{j}_k(t) \rangle = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \langle \hat{j}_k(t) \vec{A}_n(\tau_-) \hat{j}_n(\tau_-) d\tau_- \rangle_0 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \vec{A}_n(\tau_-) \hat{j}_n(\tau_-) \hat{j}_k(t) \rangle d\tau_- >_0 - \\
& - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle A_n(\tau_+) \hat{j}_n(\tau_+) d\tau_+ \hat{j}_k(t) \rangle >_0 = \\
& = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \langle \hat{j}_k(t) \vec{A}_n(\tau_-) \hat{j}_n(\tau_-) \rangle d\tau_- >_0 - \\
& - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \langle A_n(\tau_+) \hat{j}_n(\tau_+) d\tau_+ \hat{j}_k(t) \rangle >_0 . \quad (48)
\end{aligned}$$

Это выражение можно записать через интеграл от коммутатора:

$$\langle \hat{j}_k(t) \rangle = - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t A_n(\tau) \langle [\hat{j}_n(\tau), \hat{j}_k(t)] \rangle_0 d\tau. \quad (49)$$

Это и есть формула Кубо.

#### § 4. Продольное внешнее поле

Предположим, что электронная система помещена во внешнее переменное электрическое поле, определяемое скалярным потенциалом  $U(\vec{R}, t)$ , при этом система находится в тепловом и материальном контакте с термостатом. Запишем гамильтониан взаимодействия с внешним полем в представлении вторичного квантования:

$$\hat{V}(t) = e \sum \hat{\psi}^+(\vec{r}, t) U(t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) d\vec{r}. \quad (50)$$

Здесь и ниже  $\hat{\psi}^+(\vec{r}, t)$  и  $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$  – операторы рождения и уничтожения в представлении взаимодействия.

Наша задача состоит в том, чтобы определить поправку к электронной плотности, происходящую от взаимодействия с внешним полем.

Для достижения этой цели запишем оператор электронной плотности в представлении Гейзенберга:

$$\hat{\rho}(\vec{r}, t) = e\hat{\Psi}^+(\vec{r}, t)\hat{\Psi}(\vec{r}, t), \quad (51)$$

а затем усредним этот оператор по состоянию с заданной температурой и химическим потенциалом.

Окончательный результат выразим через произведения  $\psi$ -операторов в представлении взаимодействия, усреднённых по стационарным состояниям невзаимодействующих электронов:

$$\langle \hat{\rho}(\vec{r}, t) \rangle = -e \left\langle \hat{T}_\Gamma \left( \hat{\psi}(\vec{r}, t_-) \hat{\psi}^+(\vec{r}, t_- + \delta) \hat{S}_\Gamma \right) \right\rangle_{0c}. \quad (52)$$

Здесь  $\delta$  – бесконечно малая положительная величина;  $\hat{T}_\Gamma$  – символ  $T$ -упорядочения на контуре  $\Gamma$ , вдоль которого производится интегрирование в  $S$ -матрице:

$$\hat{S}_\Gamma = \exp \left( \frac{-i}{\hbar} \int_\Gamma \hat{V}(t) dt \right). \quad (53)$$

Времена  $t_-$  и  $t_- + \delta$  берутся на нижней (нормальной) части контура  $\Gamma$ , символ  $|_{0c}$  обозначает, что усреднение производится по состояниям невзаимодействующих частиц, а также то, что необходимо учитывать только несвязанные диаграммы.

#### § 4.1. Вычисление продольной нестационарной поправки

В нулевом приближении по внешнему полю получим равновесную среднюю электронную плотность, которая в уравнениях Максвелла в силу электронейтральности компенсируется возмущённой плотностью остальных зарядов.

Для нахождения первого приближения достаточно разложить  $S$ -матрицу (6), а затем произвести усреднение двух слагаемых, происходящих от двух частей контура  $\Gamma$ :

$$\langle \hat{\rho}_1(\vec{r}, t) \rangle = \langle \hat{\rho}_1^-(\vec{r}, t) \rangle - \langle \hat{\rho}_1^+(\vec{r}, t) \rangle. \quad (54)$$

В каждом слагаемом вычисление средних производится с помощью теоремы Вика:

$$\begin{aligned} \langle \hat{\rho}_1^-(\vec{r}, t) \rangle &= -e^2 \frac{(-i)}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{T}_t (\hat{\psi}(\vec{r}, t_-) \hat{\psi}^+(\vec{r}, t_- + \delta) \times \\ &\quad \times \hat{\psi}(\vec{R}, t'_-) U(\vec{R}, t') \hat{\psi}^+(\vec{R}, t'_-)) \rangle |_{0c} dt'_- d\vec{R} = \\ &= 2e^2 \frac{(-i)}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} G^{--}(\vec{r}, t; \vec{R}, t') U(\vec{R}, t') G^{--}(\vec{R}, t'; \vec{r}, t) dt'_- d\vec{R}. \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{\rho}_1^+(\vec{r}, t) \rangle &= -e^2 \frac{(-i)}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{T}_t (\hat{\psi}(\vec{r}, t_-) \hat{\psi}^+(\vec{r}, t_- + \delta) \times \\ &\quad \times \hat{\psi}(\vec{r}, t'_+) U(\vec{R}, t') \hat{\psi}^+(\vec{r}, t'_+)) \rangle |_{0c} dt'_+ = \\ &= 2e^2 \frac{(-i)}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} G^{+-}(\vec{r}, t; \vec{R}, t') U(\vec{R}, t') G^{+-}(\vec{R}, t'; \vec{r}, t) dt'_+ d\vec{R}. \end{aligned} \quad (56)$$

В каждом из двух окончательных слагаемых одночастичные гриновские функции относятся к невзаимодействующим электронам. По этой причине они зависят от разности пространственных и временных координат и таким образом определяются через соответствующие компоненты Фурье:

$$\begin{aligned} \hat{G}_\omega &= G_\omega^{--} = \left[ \frac{1 - n_F(\xi)}{\omega - \xi + i\delta} \right] + \left[ \frac{n_F(\xi)}{\omega - \xi - i\delta} \right]; \\ G_\omega^{-+} &= n_F(\xi) \left\{ \left[ \frac{1}{\omega - \xi - i\delta} \right] - \left[ \frac{1}{\omega - \xi + i\delta} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (57a)$$

$$\begin{aligned} G_\omega^{+-} &= -(1 - n_F(\xi)) \left\{ \left[ \frac{1}{\omega - \xi - i\delta} \right] - \left[ \frac{1}{\omega - \xi + i\delta} \right] \right\}; \\ G_\omega^{++} &= - \left[ \frac{1 - n_F(\xi)}{\omega - \xi - i\delta} \right] - \left[ \frac{n_F(\xi)}{\omega - \xi + i\delta} \right]. \end{aligned} \quad (57b)$$

Здесь введено обозначение  $\xi = \xi_{\vec{p}} = p^2/2m - \mu$ .

Предположив, что внешнее поле также задано через свою компоненту Фурье,  $U = U_{\vec{q}, \Omega} \exp(-i\Omega t, i\vec{q}\vec{R})$ , сразу получим компоненту Фурье поправки к плотности заряда:

$$\begin{aligned} \rho_1(\vec{q}, \Omega) = & -2ie^2 \int \frac{d\vec{p}d\omega}{(2\pi)^4} G^{--}(\vec{p} + \vec{q}, \omega + \Omega) G^{--}(\vec{p}, \omega) U(\vec{q}, \Omega) + \\ & + 2ie^2 \int \frac{d\vec{p}d\omega}{(2\pi)^4} G^{-+}(\vec{p} + \vec{q}, \omega + \Omega) G^{+-}(\vec{p}, \omega) U(\vec{q}, \Omega). \end{aligned} \quad (58)$$

Произведения функций Грина можно проинтегрировать по частоте с помощью двух легко проверяемых соотношений:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{d\omega}{\omega - \xi_1 \pm i\delta} \right] \left[ \frac{1}{\omega - \xi_2 \pm i\delta} \right] &= 0; \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{d\omega}{\omega - \xi_1 \pm i\delta} \right] \left[ \frac{1}{\omega - \xi_2 \mp i\delta} \right] &= \pm \frac{2\pi i}{\xi_2 - \xi_1 \pm i\delta}. \end{aligned} \quad (59)$$

Окончательно в результате существенных взаимных сокращений можно получить интегральное представление [4]:

$$\rho_1(\vec{q}, \Omega) = 2e^2 \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{n_F(\xi_{\vec{p}+\vec{q}}) - n_F(\xi_{\vec{p}})}{\xi_{\vec{p}+\vec{q}} - \xi_{\vec{p}} - \Omega - i\delta} U(\vec{q}, \Omega). \quad (60)$$

## § 4.2. Продольная диэлектрическая проницаемость

Запишем уравнение электростатики для изотропного диэлектрика:

$$\epsilon \vec{e} = \vec{e} + 4\pi \vec{P}; \quad \vec{e} = -\nabla U, \quad -\operatorname{div} \vec{P} = \rho_1(\vec{r}). \quad (61)$$

Последнее соотношение, устанавливающее связь между нашей поправкой (60) и вектором электрической поляризации, есть не что иное, как линеаризованное уравнение Власова.

Для того чтобы определить продольную диэлектрическую поляризацию, достаточно перейти в соотношении (58) к компонентам Фурье, а затем исключить из них электрическое поле  $\vec{e}$  и вектор поляризации  $\vec{P}$ .



В результате получим

$$\rho_1(\vec{q}, \Omega) = -i \frac{\epsilon(\vec{q}, \Omega) - 1}{4\pi} (\vec{e}\vec{q}) = -q^2 \frac{\epsilon(\vec{q}, \Omega) - 1}{4\pi} U(\vec{q}, \Omega). \quad (62)$$

Таким образом, линейная зависимость между потенциалом и плотностью заряда (58) позволяет определить продольную диэлектрическую проницаемость:

$$\epsilon_l(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{q^2} \int \frac{2d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{n_F(\xi_{\vec{p}+\hbar\vec{q}}) - n_F(\xi_{\vec{p}})}{\xi_{\vec{p}+\hbar\vec{q}} - \xi_{\vec{p}} - \hbar\Omega - i\delta}. \quad (63)$$

Эта формула была впервые получена Ю.Л. Климонтовичем и В.П. Силиным в 1952 году [4].

В квазиклассическом пределе  $\hbar q\bar{v} \ll T$  и  $\hbar\omega \ll \epsilon_F$  имеем результаты, которые совпадают с теми, которые были получены из кинетического уравнения.

Для того чтобы определить закон дисперсии плазменных колебаний, достаточно положить  $\epsilon_l(\vec{q}, \vec{Q}) = 0$ . В результате получаем неявную зависимость частоты и волнового вектора.

В классическом пределе для максвелловской плазмы тройной интеграл в (63) представляется в виде произведения двух гауссовых интегралов, которые сразу вычисляются.

Оставшийся интеграл имеет следующий вид:

$$\epsilon_l(\vec{q}, \omega) = 1 - \frac{1}{(r_D q)^2} \left\{ \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-z^2)}{x-z} dz - 1 - i\sqrt{\pi} x \exp(-x^2) \right\}, \quad (64)$$

где  $x = \omega\sqrt{m}/\sqrt{2T}q$ ,  $r_D = (T/4\pi n e^2)^{1/2}$  – радиус экранирования Дебая–Хюккеля.

Для того чтобы получить дисперсионную кривую, необходимо решить уравнение  $\epsilon_{\omega, q} = 0$ .

Эту кривую удобно представить в параметрической форме:

$$qr_D = R(x) = \left\{ \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-z^2)}{x-z} dz - 1 - i\sqrt{\pi} x \exp(-x^2) \right\}^{1/2},$$

$$\omega\sqrt{m}/\sqrt{2T}r_D = xR(x). \quad (65)$$

Здесь и ниже  $\Omega = \sqrt{4\pi ne^2/m}$  – плазменная частота; интеграл вычисляется в смысле главного значения и может быть выражен через  $\operatorname{erfi}(x)$  – функцию ошибок от чисто мнимого аргумента:

$$qr_D = R(x) = \left\{ x\sqrt{\pi}\exp(-x^2)\operatorname{erfi}(x) - 1 - i\sqrt{\pi}x\exp(-x^2) \right\}^{1/2},$$

$$\omega\sqrt{m}/\sqrt{2T}r_D = xR(x). \quad (66)$$

Плазменные колебания могут существовать только в ограниченной области длин волн, когда они значительно превышают радиус экранирования.

Другой предельный случай ( $T = 0$ ),  $q \ll p_F$ :

$$\epsilon_l(\omega, q) = 1 - \frac{3\Omega^2}{q^2v_F^2} \left\{ 1 - \frac{\omega}{2qv_F} \ln \frac{\omega + qv_F}{|\omega - qv_F|} \right\} + i\theta(qv_F - |\omega|) \frac{i\pi\Omega\omega}{2(qv_F)^3}. \quad (67)$$

Уравнение для нахождения дисперсионной кривой  $\omega(q)$  содержит функцию, которая зависит только от отношения  $\omega/qv_F$ , так что искомая зависимость снова определяется в параметрическом виде:

$$\frac{qv_F}{\sqrt{3}\Omega} = W(x) = \left\{ 1 - \frac{x}{2} \ln \frac{x+1}{|x-1|} \right\}^{1/2}, \quad \frac{\omega}{\sqrt{3}\Omega} = xW(x). \quad (68a)$$

Здесь  $x = \omega/qv_F > 1$ , так что в этой области затухание Ландау отсутствует.

Для произвольной частоты и любого волнового вектора при  $T = 0$  можно получить явное выражение для диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon_l(\omega, q) = 1 - \frac{3\Omega_{pl}^2}{q^2v_F^2} \{1 - g(\omega_+) + g(\omega_-)\},$$

где  $\omega_{\pm} = \omega \pm \hbar q^2/2m$ ,

$$g(\omega) = \frac{m(\omega^2 - q^2v_F^2)}{2\hbar q^3v_F} \ln \frac{\omega + qv_F}{\omega - qv_F}, \quad (68b)$$

причём логарифм следует понимать как  $\ln|z| - i\pi$ , если его аргумент  $z < 0$ ; частота  $\Omega_{pl} = \sqrt{4\pi e^2 n_e / m}$  есть классическая электронная плазменная частота.

### § 5. Поперечное внешнее поле

Предположим, что электронная система помещена во внешнее переменное электрическое поле, определяемое векторным потенциалом  $\vec{A}(\vec{R}, t)$ .

Запишем гамильтониан взаимодействия с внешним полем в представлении вторичного квантования:

$$\hat{V}(t) = -\frac{e}{c} \sum \hat{\psi}^+(\vec{r}, t) \left( \vec{A}(\vec{r}, t) \hat{\mathbf{v}} \right) \hat{\psi}(\vec{r}, t) d\vec{r}. \quad (69)$$

Здесь и ниже  $\hat{\psi}^+(\vec{r}, t)$  и  $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$  – операторы рождения и уничтожения в представлении взаимодействия.

В изотропном случае и в нулевом приближении по величине векторного потенциала оператор скорости  $\hat{\mathbf{v}}$  есть полусумма оператора импульса, поделённого на массу, действующего направо, и импульса, поделённого на массу, действующего налево.

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить среднюю плотность тока, происходящую от приложенного векторного потенциала.

Для достижения этой цели запишем оператор плотности тока в представлении Гейзенберга:

$$\hat{\mathbf{j}}(\vec{r}, t) = \frac{e}{2m} \left\{ \hat{\Psi}^+(\vec{r}, t) \left( -i\nabla \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \right) + \left( i\nabla \hat{\Psi}^+(\vec{r}, t) \right) \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \right\} - \mathbf{A}(\vec{r}, t) \frac{e^2}{mc} \hat{\Psi}^+(\vec{r}, t) \hat{\Psi}(\vec{r}, t), \quad (70)$$

а затем усредним этот оператор по состоянию с заданной температурой и химическим потенциалом.

Окончательный результат выразим через произведения  $\psi$ -операторов в представлении взаимодействия, усреднённых по

стационарным состояниям невзаимодействующих электронов:

$$\mathbf{j}(\vec{r}, t) = -i \frac{e}{2m} (-i\nabla + i\nabla_1) G(\vec{r}, t; \vec{r}_1, t_1) \Big|_{\vec{r}_1=\vec{r}, t_1=t+\delta} - \mathbf{A}(\vec{r}, t) \frac{e^2}{mc} N. \quad (71)$$

Здесь  $N$  – электронная плотность,  $\delta$  – бесконечно малая положительная величина;  $G(\vec{r}, t; \vec{r}_1, t_1)$  – одночастичная функция Грина, которую необходимо вычислить в первом приближении по величине векторного потенциала. Выраженная через операторы в представлении взаимодействия, она имеет следующий вид:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}_1, t_1) = -i \left\langle \hat{T}_\Gamma \left( \hat{\psi}(\vec{r}, t_-) \hat{\psi}^+(\vec{r}_1, t_{1-}) \hat{S}_\Gamma \right) \right\rangle_{0c}. \quad (72)$$

Здесь  $\hat{T}_\Gamma$  – символ  $T$ -упорядочения на контуре  $\Gamma$ , вдоль которого производится интегрирование в  $S$ -матрице:

$$\hat{S}_\Gamma = \exp \left( \frac{-i}{\hbar} \int_\Gamma \hat{V}(t) dt \right). \quad (73)$$

Времена  $t_-$  и  $(t_{1-} + \delta)$  берутся на нижней (нормальной) части контура  $\Gamma$ , символ  $|_{0c}$  обозначает, что усреднение производится по состояниям невзаимодействующих частиц.

### § 5.1. Вычисление поперечной нестационарной поправки

В нулевом приближении по векторному потенциалу получим нулевой результат.

Для нахождения первого приближения достаточно разложить  $S$ -матрицу (73), а затем произвести усреднение двух слагаемых, происходящих от двух частей контура  $\Gamma$ :

$$G^{(1)}(\vec{r}, t; \vec{r}_1, t_{1-}) = G^{(1-)}(\vec{r}, t; \vec{r}_1, t_{1-}) + G^{(1+)}(\vec{r}, t; \vec{r}_1, t_{1-}). \quad (74)$$

В каждом слагаемом вычисление средних производится с помощью теоремы Вика:

$$\begin{aligned}
G^{(1-)}(\vec{r}, t; \vec{r}_1, t_{1-}) &= \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{T}_t \left( \hat{\psi}(\vec{r}, t_-) \hat{\psi}^+(\vec{r}_1, t_{1-} + \delta) \times \right. \\
&\quad \left. \times \hat{\psi}^+(\vec{R}, t_-) \left( \vec{A}(\vec{R}, t') \vec{v} \right) \hat{\psi}(\vec{R}, t_-) \right) \rangle |_{0c} dt'_- d\vec{R} = \\
&= -2 \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} G^{--}(\vec{r}, t; \vec{R}, t') \left( \vec{A}(\vec{R}, t') \vec{v} \right) G^{--}(\vec{R}, t'; \vec{r}, t) dt'_- d\vec{R}; \quad (75) \\
G^{(1+)}(\vec{r}, t; \vec{r}_1, t_{1-}) &= -\frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \hat{T}_t \left( \hat{\psi}(\vec{r}, t_-) \hat{\psi}^+(\vec{r}_1, t_{1-} + \delta) \times \right. \\
&\quad \left. \times \hat{\psi}^+(\vec{R}, t_+) \left( \vec{A}(\vec{R}, t') \vec{v} \right) \hat{\psi}(\vec{R}, t_+) \right) \rangle |_{0c} dt'_+ d\vec{R} = \\
&= 2 \frac{e}{c} \int_{-\infty}^{\infty} G^{-+}(\vec{r}, t; \vec{R}, t') \left( \vec{A}(\vec{R}, t') \vec{v} \right) G^{-+}(\vec{R}, t'; \vec{r}, t) dt'_+ d\vec{R}. \quad (76)
\end{aligned}$$

В каждом из двух окончательных слагаемых одночастичные гринаовские функции относятся к невзаимодействующим электронам. По этой причине они зависят от разности пространственных и временных координат и таким образом определяются через соответствующие компоненты Фурье (57a) и (57b).

Предположив, что внешнее поле также задано через свою компоненту Фурье  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\vec{q}, \Omega} \exp(-i\Omega t + i\vec{q}\vec{R})$ , сразу получим компоненту Фурье первой поправки к функции Грина заряда:

$$\begin{aligned}
G^{(1)}(\vec{q}; \Omega) &= \frac{e}{mc} \int \frac{d\vec{p}d\omega}{(2\pi)^4} \mathbf{p} \mathbf{A}(\vec{q}, \Omega) G^{--}(\vec{p} + \vec{q}, \omega + \Omega) G^{--}(\vec{p}, \omega) - \\
&\quad - \frac{e}{mc} \int \frac{d\vec{p}d\omega}{(2\pi)^4} \mathbf{p} \mathbf{A}(\vec{q}, \Omega) G^{-+}(\vec{p} + \vec{q}, \omega + \Omega) G^{-+}(\vec{p}, \omega). \quad (77)
\end{aligned}$$

Произведения функций Грина можно проинтегрировать по частоте с помощью двух легко проверяемых соотношений:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{d\omega}{\omega - \xi_1 \pm i\delta} \right] \left[ \frac{1}{\omega - \xi_2 \pm i\delta} \right] = 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{d\omega}{\omega - \xi_1 \pm i\delta} \right] \left[ \frac{1}{\omega - \xi_2 \mp i\delta} \right] = \pm \frac{2\pi i}{\xi_2 - \xi_1}. \quad (78)$$

Окончательно в результате существенных взаимных сокращений можно получить следующее интегральное представление:

$$G^{(1)}(\vec{q}, \Omega) = i \frac{e}{mc} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} (\vec{p}\vec{A}(\vec{q}, \Omega)) \frac{n_F(\xi_{\vec{p}+\vec{q}}) - n_F(\xi_{\vec{p}})}{\xi_{\vec{p}+\vec{q}} - \xi_{\vec{p}} - \Omega - i\delta}. \quad (79)$$

Переходя к фурье-представлению в соотношении (71) и производя суммирование по спине, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \vec{j}(\vec{q}, \Omega) = & -\frac{2e^2}{m^2c} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \vec{p} (\mathbf{p}\vec{A}(\vec{q}, \Omega)) \frac{n_F(\xi_{\vec{p}+\vec{q}}) - n_F(\xi_{\vec{p}})}{\xi_{\vec{p}+\vec{q}} - \xi_{\vec{p}} - \Omega - i\delta} - \\ & - \vec{A}(\vec{q}, \Omega) \frac{e^2}{mc} N. \end{aligned} \quad (80)$$

Поскольку угловая зависимость подынтегрального множителя

$$\frac{n_F(\xi_{\vec{p}+\vec{q}}) - n_F(\xi_{\vec{p}})}{\xi_{\vec{p}+\vec{q}} - \xi_{\vec{p}} - \Omega - i\delta} \quad (81)$$

определяется только скалярным произведением векторов  $\vec{p}$  и  $\vec{q}$ , можно утверждать, что это выражение вовсе не зависит от направления вектора  $\vec{p}$  в плоскости, перпендикулярной к направлению вектора  $\vec{q}$ .

Из условия калибровки векторного потенциала  $\text{div}\vec{A} = 0$  следует, что компонента Фурье от векторного потенциала направлена перпендикулярно по отношению к вектору  $\vec{q}$ .

Отсюда можно заключить, что продольная составляющая интегрального токового слагаемого (80) обращается в нуль. Для доказательства достаточно спроектировать подынтегральную функцию на направление  $\vec{q}$ , а затем усреднить в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{q}$ :

$$\langle (\vec{q}\vec{p}) (\vec{p}\vec{A}(\vec{q}, \Omega)) \rangle = (\vec{q}\vec{p}) \langle (\vec{p}_{\perp}\vec{A}(\vec{q}, \Omega)) \rangle = 0. \quad (82)$$

Таким образом, мы доказали, что продольная токовая составляющая обращается в нуль. Что же касается поперечной составляющей, то для её вычисления достаточно усреднить две поперечных токовых составляющих в плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{q}$ :

$$\langle \vec{p}_\perp (\vec{p}_\perp \vec{A}(\vec{q}, \Omega)) \rangle = \frac{1}{2q^2} \vec{A}(\vec{q}, \Omega) [\vec{p}\vec{q}]^2. \quad (83)$$

Таким образом, можно утверждать, что в нашем приближении из условия  $\text{div} \vec{A} = 0$  следует условие  $\text{div} \vec{j} = 0$ , а между поперечными компонентами Фурье векторного потенциала и тока имеется соотношение:  $\vec{j}(\vec{q}, \Omega) = -Q(\vec{q}, \Omega) \vec{A}(\vec{q}, \Omega)$  или  $\vec{j}(\vec{q}, \Omega) =$

$$= -\vec{A}(\vec{q}, \Omega) \left\{ \frac{e^2}{m^2 q^2 c} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} [\vec{p}\vec{q}]^2 \frac{n_F(\xi_{\vec{p}+\vec{q}}) - n_F(\xi_{\vec{p}})}{\xi_{\vec{p}+\vec{q}} - \xi_{\vec{p}} - \Omega - i\delta} + \frac{e^2}{mc} N \right\}. \quad (84)$$

Важно отметить, что при малом переданном импульсе, когда можно произвести разложение числителя и знаменателя, мы получаем выражение, которое можно было бы получить из классического кинетического уравнения:  $\vec{j}(\vec{q}, \Omega) =$

$$= -\vec{A}(\vec{q}, \Omega) \left\{ \frac{e^2}{m^2 q^2 c} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} [\vec{p}\vec{q}]^2 \frac{\partial n_F(\xi_{\vec{p}})}{\partial \xi} \frac{(\vec{q}\vec{v})}{(\vec{q}\vec{v}) - \Omega - i\delta} + \frac{e^2}{mc} N \right\}. \quad (85)$$

Это выражение допускает дальнейшее упрощение, если выделить целую часть, а затем произвести интегрирование по частям. В результате произойдёт точное сокращение постоянной части, так что окончательное выражение окажется пропорциональным первой степени частоты:  $\vec{j}(\vec{q}, \Omega) =$

$$= -\Omega \vec{A}(\vec{q}, \Omega) \left\{ \frac{e^2}{m^2 q^2 c} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} [\vec{p}\vec{q}]^2 \frac{\partial n_F(\xi_{\vec{p}})}{\partial \xi} \frac{1}{(\vec{q}\vec{v}) - \Omega - i\delta} \right\}. \quad (86)$$

Мнимая часть полученного выражения определяет поглощение электромагнитных волн. В области частот  $\Omega \ll q < v >$  полу-

чим следующее выражение:

$$\vec{j}(\vec{q}, \Omega) = -i\pi\Omega\vec{A}(\vec{q}, \Omega) \left\{ \frac{e^2}{m^2q^2c} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} [\vec{p}\vec{q}]^2 \frac{\partial n_F(\xi_{\vec{p}})}{\partial \xi} \delta(\vec{q}\vec{v}) \right\}. \quad (87)$$

Таким образом, в пределе низких частот мы получаем поглощение, пропорциональное амплитуде электрического поля  $i\Omega\vec{A}(\vec{q}, \Omega)/c = \vec{e}(\vec{q}, \Omega)$ , неаналитическим образом зависящее от величины волнового вектора  $q$ , – так называемый аномальный скин-эффект:

$$\vec{j}(\vec{q}, \Omega) = \vec{e}(\vec{q}, \Omega) \left\{ -\frac{\pi e^2}{m^2q^2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} [\vec{p}\vec{q}]^2 \frac{\partial n_F(\xi_{\vec{p}})}{\partial \xi} \delta(\vec{q}\vec{v}) \right\}. \quad (88)$$

### § 5.2. Поперечная диэлектрическая проницаемость

Запишем правую часть уравнения Максвелла через производную от вектора индукции и через вектор плотности тока:

$$\text{rot}\vec{h} = \frac{\partial \vec{D}}{c\partial t}, \quad \text{rot}\vec{h} = \frac{\partial \vec{e}}{c\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j},$$

или

$$4\pi\vec{j} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} - \vec{e}) = 4\pi \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \quad (89)$$

После перехода к компонентам Фурье находим связь между поперечной диэлектрической проницаемостью и плотностью электрического тока:

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{j}, \quad \text{или} \quad -i\frac{\omega \vec{D}}{c} = -i\epsilon_{tr}(\omega) \frac{\omega \vec{e}}{c} = -i\frac{\omega \vec{e}}{c} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}. \quad (90)$$

Таким образом, мы определяем только поперечную часть вектора поляризации  $\vec{P}$ . Уравнение для продольной части уже было введено при изучении продольных полей. В результате



мы имеем следующую систему уравнений для нахождения вектора электрической поляризации  $\vec{P}$ :

$$\operatorname{div} \vec{P} = -\rho(\vec{r}), \quad \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{j}. \quad (91)$$

Непротиворечивость этих двух соотношений обеспечивается уравнением непрерывности электрического тока:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (92)$$

При нулевом скалярном потенциале электрическое поле  $\vec{e}(\vec{r}, t)$  выражается только через производную от векторного потенциала, поэтому в компонентах Фурье можно написать

$$\begin{aligned} -i\Omega \vec{P}(\vec{q}, \Omega) &= \vec{j}(\vec{q}, \Omega), \quad \frac{i\Omega}{c} \vec{A}(\vec{q}, \Omega) = \vec{e}(\vec{q}, \Omega), \\ (\epsilon_t(\vec{q}, \Omega) - 1) \vec{e}(\vec{q}, \Omega) &= 4\pi \vec{P}(\vec{q}, \Omega). \end{aligned} \quad (93)$$

Из этих трёх уравнений можно исключить электрическое поле и вектор поляризации, после чего получим связь между током и векторным потенциалом:

$$\frac{\Omega^2}{c} (\epsilon_t(\vec{q}, \Omega) - 1) \vec{A}(\vec{q}, \Omega) = 4\pi \vec{j}(\vec{q}, \Omega). \quad (94)$$

Отсюда с помощью соотношения (84) находим поперечную диэлектрическую проницаемость. Для этого достаточно перейти к компонентам Фурье, а затем исключить из них электрическое поле  $\vec{e}$  и вектор поляризации  $\vec{P}$ :

$$\epsilon_t(\vec{q}, \Omega) = 1 - \frac{4\pi e^2}{m\Omega^2} \left\{ \frac{1}{mq^2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} [\vec{p}\vec{q}]^2 \frac{n_F(\xi_{\vec{p}+\vec{q}}) - n_F(\xi_{\vec{p}})}{\xi_{\vec{p}+\vec{q}} - \xi_{\vec{p}} - \Omega - i\delta} + N \right\}. \quad (95)$$

## § 5.3. Вычисление глубины проникновения

Запишем полную систему уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{e} = -\frac{\partial \vec{h}}{c \partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{h} = \frac{4\pi\sigma \vec{e}}{c}. \quad (96)$$

Для поперечных компонент электрического поля имеем соотношение  $\vec{j}(\vec{q}, \Omega) = \sigma(\vec{q}, \Omega) \vec{e}(\vec{q}, \Omega)$ , где

$$\sigma(\vec{q}, \Omega) = \left\{ -\frac{\pi e^2}{m^2 q^2} \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} [\vec{p}\vec{q}]^2 \frac{\partial n_F(\xi_{\vec{p}})}{\partial \xi} \delta(\vec{q}\vec{v}) \right\}. \quad (97)$$

Если ввести сферическую систему координат с осью  $z$  вдоль направления вектора  $\vec{q}$ , тогда правая часть соотношения (97) без труда интегрируется по углам:

$$\sigma(\vec{q}) = -\frac{\pi e^2}{m} \frac{2\pi}{q} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\partial n_F(\xi_{\vec{p}})}{\partial \xi}. \quad (98)$$

Таким образом, в нашем приближении проводимость не зависит от частоты, но аномальным образом (как  $1/q$ ) зависит от волнового вектора  $\vec{q}$ .

Для того чтобы определить частотную зависимость глубины аномального скин-эффекта, перепишем уравнения Максвелла в компонентах Фурье. а затем исключим из них магнитное поле:

$$\operatorname{rot} \vec{e} = \frac{i\Omega \vec{h}}{c}, \quad -i \frac{c}{\Omega} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{e} = \frac{4\pi\sigma \vec{e}}{c}. \quad (99)$$

Переходя в последнем уравнении к пространственным компонентам Фурье и учитывая поперечность электрического поля, находим зависимость частоты от волнового вектора:

$$\Omega = -i \frac{c^2 q^2}{4\pi\sigma(q)}. \quad (100)$$

Мнимая часть волнового вектора, полученная как решение уравнения (100), по порядку величины есть глубина проникновения  $\delta(\omega)$  электромагнитного поля вглубь металла:

$$\delta_{an}(\omega) \approx \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{\omega}\right)^{1/3} \left(\frac{c}{e}\right)^{2/3} \left\{ - \int_0^{\infty} \frac{p^3 dp}{m} \frac{\partial n_F(\xi_{\vec{p}})}{\partial \xi} \right\}^{-1/3}. \quad (101)$$

Для сравнения приведём "нормальную" частотную зависимость глубины проникновения:

$$\delta_n(\omega) = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}}, \quad (102)$$

где статическая проводимость выражается через длину пробега:

$$\sigma = \frac{Ne^2\tau}{m}.$$

### § 6. Скорость релаксации ядерных спинов

Рассмотрим совокупность независимых примесных центров, каждый из которых имеет спин  $S$ , и взаимодействующих с окружающим электронным газом с помощью короткодействующего  $\delta$ -образного потенциала. Соответствующий гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$\hat{W} = \frac{1}{V} \sum_k \hat{a}_{\vec{p},\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}',\beta} \left\{ v\delta_{\alpha,\beta} + J\vec{\sigma}_{\alpha,\beta} \vec{S}_k \right\} \exp(-i(\vec{p}' - \vec{p})\vec{r}_k), \quad (103)$$

где  $\vec{r}_k$  – координата примесного центра с номером  $k$ ,  $J$  – произведение обменного интеграла на атомный объём,  $\vec{S}_k$  – оператор спина примеси.

Произведём вычисление оператора скорости изменения спина примесного центра, находящегося в начале координат:

$$\frac{\partial \hat{S}^n}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [\hat{W}(t), \hat{S}^n(t)] = \frac{i}{\hbar} \exp(i\frac{\hat{V}t}{\hbar}) [\hat{V}, \hat{S}^n] \exp(-i\frac{\hat{V}t}{\hbar}). \quad (104)$$

Здесь  $\hat{V}$  – обменная часть гамильтониана (103), относящаяся к выделенному атому:

$$\hat{V} = \frac{J}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}, \alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}', \beta} \hat{\sigma}_{\alpha, \beta}^k \hat{S}^k, \quad k = x, y, z. \quad (105)$$

Производя непосредственное вычисление коммутатора спиновых компонент  $[\hat{S}^k, \hat{S}^n] = ie_{knm} \hat{S}^m$ , получим явный вид оператора скорости изменения спина:

$$\frac{\partial \hat{S}^n}{\partial t} = \frac{J}{\hbar V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p}, \alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}', \beta} e_{nk m} \hat{\sigma}_{\alpha, \beta}^k \hat{S}^m(t). \quad (106)$$

Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы усреднить уравнение (106) по состояниям с полным гамильтонианом  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ , где  $\hat{H}_0 = \sum_{\vec{p}, \sigma} \hat{a}_{\vec{p}, \sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}, \sigma} \xi_p$  – гамильтониан идеального электронного газа.

После перехода к представлению взаимодействия произведём усреднение правой части:

$$\left\langle \frac{\partial \hat{S}^n}{\partial t} \right\rangle = \frac{J}{\hbar V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} e_{nk m} \hat{\sigma}_{\alpha, \beta}^k \langle \hat{T}_{\Gamma}(\hat{S}^m(t_-) \hat{a}_{\vec{p}, \alpha}^{\dagger}(t_-) \hat{a}_{\vec{p}', \beta}(t_-) \hat{S}_{\Gamma}) \rangle_0, \quad (107)$$

где  $\hat{T}_{\Gamma}$  – символ  $T$ -упорядочения на контуре  $\Gamma$ , вдоль которого производится интегрирование в  $S$ -матрице:

$$\hat{S}_{\Gamma} = \exp \left( \frac{-i}{\hbar} \int_{\Gamma} \hat{V}(t) dt \right). \quad (108)$$

Время  $t_-$  берётся на нижней (нормальной) части контура  $\Gamma$ , а усреднение в правой части (107) производится по состояниям невзаимодействующих частиц.

Если заменить  $S$ -матрицу на единицу, тогда получим нулевой результат, поскольку

$$\langle (\hat{S}^m(t_-) \hat{a}_{\vec{p}, \alpha}^{\dagger}(t_-) \hat{a}_{\vec{p}', \beta}(t_-)) \rangle_0 \hat{\sigma}_{\alpha, \beta}^k \sim \delta_{\alpha, \beta} \hat{\sigma}_{\alpha, \beta}^k = \hat{\sigma}_{\alpha, \alpha}^k = 0.$$

В следующем приближении получим разность произведений двух функций Грина, каждая из которых пропорциональна единичной спиновой матрице  $\delta_{\alpha,\beta}$ . В соответствии с этим можно выделить спиновую зависимость матричных элементов. На нижней части контура Келдыша, когда  $t' < t$ , имеем

$$e_{nkm} \hat{\sigma}_{\alpha,\beta}^k \hat{S}^m(t_-) \hat{\sigma}_{\beta,\alpha}^p \hat{S}^p(t'_-) = -2e_{nmk} \hat{S}^m(t_-) \hat{S}^k(t'_-). \quad (109a)$$

Если же переменная интегрирования  $t'$  относится к верхней части контура, тогда все операторы, зависящие от  $t'$ , расположены левее операторов, зависящих от  $t$ , и мы получим

$$\hat{\sigma}_{\beta,\alpha}^p \hat{S}^p(t'_+) e_{nkm} \hat{\sigma}_{\alpha,\beta}^k \hat{S}^m(t_-) = 2e_{nkm} \hat{S}^k(t'_+) \hat{S}^m(t_-). \quad (109b)$$

Соотношения (109) допускают дальнейшее упрощение, если пренебречь временной зависимостью спиновых операторов, что соответствует пренебрежению зеемановским расщеплением ядерных мультиплетов:

$$-2e_{nmk} \hat{S}^m(t_-) \hat{S}^k(t'_-) = -2i \hat{S}^n; \quad (110a)$$

$$2e_{nkm} \hat{S}^k(t'_+) \hat{S}^m(t_-) = 2i \hat{S}^n. \quad (110b)$$

Усреднение и интегрирование четырёх электронных операторов, относящихся к нижней части контура Келдыша, приводит к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} & \frac{-i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \langle \hat{a}_{\vec{p},\alpha}^+(t) \hat{a}_{\vec{p}',\beta}(t) \sum_{\vec{q},\vec{q}'} \hat{a}_{\vec{q},\alpha'}^+(t') \hat{a}_{\vec{q}',\beta'}(t') \rangle_0 dt' = \\ & = -\delta_{\alpha,\beta'} \delta_{\beta,\alpha'} \frac{n_F(\xi_p)(1 - n_F(\xi'_p))}{\xi_p - \xi'_p - i\delta}. \end{aligned} \quad (111a)$$

Если же гамильтониан взаимодействия интегрируется вдоль верхней части контура Келдыша, тогда получим

$$\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \langle \sum_{\vec{q},\vec{q}'} \hat{a}_{\vec{q},\alpha'}^+(t') \hat{a}_{\vec{q}',\beta'}(t') \hat{a}_{\vec{p},\alpha}^+(t) \hat{a}_{\vec{p}',\beta}(t) \rangle_0 dt' =$$

$$= \delta_{\alpha,\beta'} \delta_{\beta,\alpha'} \frac{(1 - n_F(\xi_p)) n_F(\xi'_p)}{\xi_p - \xi'_p - i\delta}. \quad (111b)$$

Обратное время релаксации определяется через вероятность перехода, что в свою очередь выражается через мнимую часть (111).

Собирая все множители, происходящие от (110) и (111), получим формулу спиновой релаксации:

$$\left\langle \frac{\partial \hat{S}^n}{\partial t} \right\rangle = -\frac{1}{\tau_{\text{я}}} \langle \hat{S}^n \rangle, \quad (112)$$

где скорость релаксации ядерных спинов  $1/\tau_{\text{я}} =$

$$= \frac{2\pi J^2}{\hbar V^2} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} \left[ (1 - n_F(\xi_p)) n_F(\xi'_p) + (1 - n_F(\xi'_p)) n_F(\xi_p) \right] \delta(\xi_p - \xi'_p).$$

В результате перехода к интегрированию по импульсам  $\vec{p}, \vec{p}'$  получим:  $1/\tau_{\text{я}} =$

$$= \frac{4\pi J^2 \nu_0^2}{\hbar} \int_0^\infty (1 - n_F(\xi)) n_F(\xi) d\xi = \frac{\pi J^2 \nu_0^2}{\hbar} \int_0^\infty \left( \text{ch} \frac{\xi}{2T} \right)^{-2} d\xi,$$

где  $\nu_0 = mp_0/(2\pi^2 \hbar^3)$ .

После перехода к безразмерной переменной  $\xi/2T$  получаем закон Корринги [5]: скорость релаксации ядерных спинов пропорциональна первой степени температуры:

$$\frac{1}{\tau_{\text{я}}} = \frac{2\pi T J^2 \nu_0^2}{\hbar}.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Schwinger J.*// J. Math. Phys.1961. **2**, 407.
2. *Келдыш Л.В.*// ЖЭТФ. 1964. **47**, 1515.
3. *Кадамов Л., Бейм Г.* Квантовая статистическая механика. – М.: Мир, 1964. – 255 с.
4. *Климонтович Ю.Л., Силин В.П.*// ЖЭТФ. 1952. **23**, 151.
5. *Korringa J.*// Physica. 1950. **16**, 601.