

ЛЕКЦИЯ XIII
КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ
В СВЕРХПРОВОДНИКАХ

С о д е р ж а н и е

§ 1. Нестационарный эффект Мейсснера	375
§ 1.1. Пипшардовский случай	381
§ 1.2. Лондоновский случай	385
§ 2. Поглощение ультразвука	387
§ 3. Скорость релаксации ядерных спинов	390
§ 4. Теплопроводность сверхпроводника	394
§ 5. Нестационарные уравнения Гинзбурга	
–Ландау	398
З а д а ч а: Релаксация в неидеальном сверхпроводнике	402
Список литературы	406

В настоящей лекции изучаются неравновесные свойства идеальных сверхпроводников, описываемых в рамках модели БКШ. Вычисления производятся с помощью обобщённой диаграммной техники Келдыша, учитывающей наличие аномальных функций Грина, введённых в рассмотрение Л.П. Горьковым [1].

Этим методом удаётся обнаружить аномальные эффекты пространственной и временной дисперсии, проявляющиеся вблизи точки перехода из сверхпроводящего в нормальное состояние. Температурная зависимость коэффициентов электронной теплопроводности, поглощения ультразвука и скорости релаксации ядерных спинов определяется во всей области существования сверхпроводящего состояния.

Особый интерес представляет возможность вычисления времени релаксации сверхпроводящего параметра порядка и построения нестационарных уравнений Гинзбурга–Ландау. Удаётся показать, что соответствующий коэффициент при первой временной производной существенным образом зависит от параметра распаривания, например, времени релаксации с переворотом спина.

§ 1. Нестационарный эффект Мейсснера

При заданной величине векторного потенциала $\vec{A}(\vec{r}, t)$ оператор плотности тока содержит два слагаемых, одно из которых пропорционально первой степени $\vec{A}(\vec{r}, t)$, а другое выражается через операторы импульса:

$$\hat{j}_\alpha(\vec{r}, t) = \frac{e}{2m} \left\{ \hat{\psi}^+(\vec{r}', t) \hat{p}_\alpha \hat{\psi}(\vec{r}, t) - \hat{p}'_\alpha \hat{\psi}^+(\vec{r}', t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) \right\} \Big|_{\vec{r}' \rightarrow \vec{r}} - \frac{e^2}{mc} (\vec{r}, t) \hat{\psi}^+(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) A_\alpha(\vec{r}, t), \quad (1)$$

где $\hat{p}_\alpha = -i\hbar\nabla_\alpha$, $\hat{\psi}^+(\vec{r}, t)$ и $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$ – ψ -операторы рождения и уничтожения электронов.

Усреднение второго слагаемого производится при нулевом внешнем поле, так что результат имеет простейший вид:

$$\langle \hat{j}_\alpha^{(2)} \rangle_0 = -\frac{e^2}{mc} \langle \psi^+(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) \rangle_0 A_\alpha(\vec{r}, t) = -\frac{e^2 N}{mc} A_\alpha(\vec{r}, t), \quad (2)$$

где N – электронная плотность.

Усреднение второго слагаемого в нулевом приближении даёт нуль, так что в первом приближении по величине внешнего потенциала необходимо использовать общую формулу усреднения, записанную в первом порядке по величине внешнего поля:

$$\langle \hat{j}_\alpha^{(1)} \rangle_1 = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \hat{T} (\hat{j}_\alpha^{(1)}(t) \hat{V}(t')) \rangle_0 dt' + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle (\hat{V}(t') \hat{j}_\alpha^{(1)}(t)) \rangle_0 dt'. \quad (3)$$

В первом слагаемом правой части символ \hat{T} означает T -упорядочение, а интегрирование ведётся на нижней части контура Келдыша; во втором слагаемом интегрирование ведётся вдоль верхней части контура Келдыша [2].

Оператор $\hat{V}(t')$ есть оператор взаимодействия электронной системы с внешним электромагнитным полем. Записанный в

линейном приближении по величине векторного потенциала, этот оператор выражается в виде произведения $A_\alpha(\vec{r}, t)$ на $\hat{j}_\alpha^{(1)}(\vec{r}, t)$:

$$\hat{V}(t) = -\frac{1}{c} \int \hat{j}_\alpha^{(1)}(\vec{r}, t) A_\alpha(\vec{r}, t) d\vec{r}. \quad (4)$$

Результат усреднения произведения четырёх ψ -операторов произведём с помощью теоремы Вика для ферми-операторов. С учётом возможности появления аномальных функций Грина находим [1]:

$$\begin{aligned} & \langle \psi_\alpha^+(\vec{r}, t_-) \psi_\alpha(\vec{r}, t_-) \psi_\beta^+(\vec{r}', t'_-) \psi_\beta(\vec{r}', t'_-) \rangle_0 - \\ & - \langle \psi_\alpha^+(\vec{r}, t_-) \psi_\alpha(\vec{r}, t_-) \psi_\beta^+(\vec{r}', t'_+) \psi_\beta(\vec{r}', t'_+) \rangle_0 = \\ & = G_{\alpha,\beta}(\vec{r} - \vec{r}', t - t'_-) G_{\beta,\alpha}(\vec{r}' - \vec{r}, t'_- - t) - \\ & - F_{\alpha,\beta}^+(\vec{r} - \vec{r}', t - t'_-) F_{\beta,\alpha}(\vec{r}' - \vec{r}, t'_- - t) - \\ & - G_{\alpha,\beta}(\vec{r} - \vec{r}', t - t'_+) G_{\beta,\alpha}(\vec{r}' - \vec{r}, t'_+ - t) + \\ & + F_{\alpha,\beta}^+(\vec{r} - \vec{r}', t - t'_+) F_{\beta,\alpha}(\vec{r}' - \vec{r}, t'_+ - t). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь t_\mp – время, взятое на нижней или на верхней части контура Келдыша:

$$\begin{aligned} G_{\alpha,\beta}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') &= -i \langle \hat{T} \psi_\alpha(\vec{r}, t) \psi_\beta^+(\vec{r}', t') \rangle, \\ F_{\alpha,\beta}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') &= -i \langle \hat{T} \psi_\alpha(\vec{r}, t) \psi_\beta(\vec{r}', t') \rangle, \\ F_{\alpha,\beta}^+(\vec{r} - \vec{r}', t - t') &= -i \langle \hat{T} \psi_\alpha^+(\vec{r}, t) \psi_\beta^+(\vec{r}', t') \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Однако удобно перейти к запаздывающим и опережающим функциям с помощью унитарного преобразования:

$$\hat{G} = \hat{R} \hat{G}' \hat{R}^{-1}, \quad \hat{F} = \hat{R} \hat{F}' \hat{R}^{-1}, \quad \hat{F}^+ = \hat{R} \hat{F}'^+ \hat{R}^{-1}. \quad (7)$$

Нулевая функция Грина

$$\hat{G}_{\alpha,\beta}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') \sim \delta_{\alpha,\beta} \hat{G}, \quad (8)$$

а \hat{G} – матрица 2×2 по временному параметру t_{\pm} :

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} G(t_-, t'_-) & G(t_-, t'_+) \\ G(t_+, t'_-) & G(t_+, t'_+) \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{R}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{G}' = \begin{pmatrix} 0 & G^A \\ G^R & G(t_+, t'_+) + G(t_-, t'_-) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где $G^{R,A}$ – запаздывающая и опережающая функция Грина:

$$G^R(t - t') = -i\theta(t - t') \langle (\psi(\vec{r}, t)\psi^+(\vec{r}', t') + \psi^+(\vec{r}', t')\psi(\vec{r}, t)) \rangle,$$

$$G^A(t - t') = i\theta(t' - t) \langle (\psi(\vec{r}, t)\psi^+(\vec{r}', t') + \psi^+(\vec{r}', t')\psi(\vec{r}, t)) \rangle. \quad (10)$$

Поскольку аргумент t принадлежит к нижней части контура Келдыша, правая часть выражения (5), относящаяся к нормальным функциям Грина, может быть записана в форме

$$G(t_-, t'_\nu) (\tau^z)_\mu^\nu G(t'_\mu, t_-) =$$

$$= R_{1,\lambda} G'(t_\lambda, t'_\nu) R_{\nu,\gamma}^{-1} (\tau^z)_\mu^\gamma R_{\mu,\chi} G'(t'_\chi, t_\varphi) R_{\varphi,1}^{-1}.$$

Непосредственное перемножение матриц \hat{R} , \hat{R}^{-1} , а также матрицы Паули $\hat{\tau}^z$ приводит к следующему выражению:

$$\frac{1}{2} \sum_\lambda G'_{\lambda,\gamma}(t - t') (\tau^x)_\mu^\gamma \sum_\varphi G'_{\mu,\varphi}(t' - t).$$

Это выражение упрощается, если учесть, что функция $G'_{1,1} = 0$:

$$\frac{1}{2} \left\{ G'_{2,1}(t - t') \sum_\varphi G'_{2,\varphi}(t' - t) + \sum_\lambda G'_{\lambda,2}(t - t') G'_{1,2}(t' - t) \right\}.$$

Для монохроматической плоской волны это выражение следует умножить на $\exp(-i\omega t')$ и проинтегрировать в бесконечных пределах. После перехода к компонентам Фурье для функций Грина $G'_{\alpha,\beta}$ возникает свободный множитель $\exp(-i\omega t)$, перед которым

фигурирует однократный интеграл от произведения Фурье компонент соответствующих функций Грина. Замечая, что интеграл от произведения двух запаздывающих или двух опережающих функций Грина даёт нуль, находим

$$\exp(-i\omega t) \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ G_{\omega'+\omega}^R G_{\omega'}^{2,2} + G_{\omega'}^{2,2} G_{\omega'-\omega}^A \right\} d\omega', \quad (11)$$

где

$$G_{\omega}^{22} = i \left\{ G_{\omega}^R - G_{\omega}^A \right\} \operatorname{th} \frac{\omega}{2T}.$$

В результате выражение (11) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \exp(-i\omega t) \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} \left\{ G_{\omega'-\omega}^A \left[G_{\omega'}^R - G_{\omega'}^A \right] + \right. \\ \left. + \left[G_{\omega'}^R - G_{\omega'}^A \right] G_{\omega'+\omega}^R \right\} d\omega'. \end{aligned} \quad (12)$$

Аналогичные рассуждения приводят к формуле для произведения аномальных функций Грина F_{ω} и F_{ω}^+ :

$$\begin{aligned} \exp(-i\omega t) \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} \left\{ F_{\omega'-\omega}^A \left[F_{\omega'}^R - F_{\omega'}^A \right] + \right. \\ \left. + \left[F_{\omega'}^R - F_{\omega'}^A \right] F_{\omega'+\omega}^R \right\} d\omega'. \end{aligned} \quad (13)$$

Запаздывающие функции Грина определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} G_{\omega}^R &= \frac{u_p^2}{\omega - E_p + i\delta} + \frac{v_p^2}{\omega + E_p + i\delta}, \\ F_{\omega}^R &= \frac{\Delta}{2E_p} \left[\frac{1}{\omega + E_p + i\delta} - \frac{1}{\omega - E_p + i\delta} \right], \quad E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_p}{E_p} \right), \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_p}{E_p} \right), \quad \xi_p = \frac{p^2}{2m} - \mu.$$

Опережающие функции G^A и F^A отличаются от G^R и F^R заменой бесконечно малого положительного затухания $i\delta$ на $-i\delta$.

Отсюда сразу обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} G_\omega^R - G_\omega^A &= -2i\pi \left\{ u_p^2 \delta(\omega - E_p) + v_p^2 \delta(\omega + E_p) \right\}, \\ F_\omega^R - F_\omega^A &= i\pi \frac{\Delta}{E_p} \left\{ \delta(\omega - E_p) - \delta(\omega + E_p) \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, благодаря наличию δ -функций интегрирование по ω' приводит к замене $\omega' \rightarrow \pm E_p$.

В каждой электромагнитной вершине, где происходит изменение электронного импульса от \vec{p}_1 к вектору \vec{p}_2 имеется множитель $\exp(i\vec{q}\vec{r})(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)e/2m$, где передаваемый импульс \vec{q} связан с векторами $\vec{p}_{1,2}$ с помощью закона сохранения импульса $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + \vec{q}$. По этой причине вместо $\vec{p}_{1,2}$ удобно произвести замену $\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p} + \vec{q}/2$, $\vec{p}_2 \rightarrow \vec{p} - \vec{q}/2$. В результате каждая электромагнитная вершина будет зависеть от комбинации $e\vec{p}/m$, в то время как зависящий от передаваемого импульса множитель $\exp(i\vec{q}\vec{r})$ выходит из-под знака суммирования по виртуальному импульсу \vec{p} и может быть опущен вместе со множителем $\exp(-i\omega t)$. В соответствии с этим мы получаем линейную связь между компонентами Фурье плотности тока и векторного потенциала:

$$\vec{j}_{\omega, \vec{q}} = -Q(\omega, \vec{q}) \vec{A}_{\omega, \vec{q}}. \quad (16)$$

Будем считать, что длина волны c/ω велика по сравнению с размерами сверхпроводника. При выполнении этого условия в уравнениях Максвелла можно пренебречь током смещения и написать $\text{rot} \vec{h} = 4\pi \vec{j}/c$. Откуда следует, что $\text{div} \vec{j} = 0$, так что токовые компоненты Фурье удовлетворяют условию поперечности $(\vec{q} \vec{j}_{\omega, \vec{q}}) = 0$. Применяя это условие к соотношению (16), обнаруживаем, что компоненты Фурье векторного потенциала также перпендикулярны к вектору \vec{q} : $(\vec{q} \vec{A}_{\omega, \vec{q}}) = 0$.

Учитывая эти соображения, произведём частичное интегрирование под знаком интеграла по направлению виртуального

вектора \vec{p} . Поскольку функции Грина зависят только от скалярного произведения между \vec{q} и \vec{p} , можно произвести интегрирование в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{q} .

При нашем выборе электронных импульсов в виде $\vec{p} \pm \vec{q}/2$ токовые вершинные части определяют угловую зависимость в виде $\vec{p}(\vec{p}\vec{A})$. Учитывая поперечность вектора A по отношению к вектору \vec{q} , направим вектор \vec{q} вдоль полярной z , а вектор \vec{A} направим вдоль оси x . Тогда интересующая нас комбинация приобретает вид $p_x^2 A = p^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$, где θ – угол между \vec{p} и \vec{q} . Производя усреднение по углу φ , получим выражение $\overline{A p^2 (\sin^2 \theta)} / 2$.

Таким образом, общее выражение для ток-токовой поправки приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 Q(\omega, \vec{q}) = & \frac{Ne^2}{mc} - \\
 & - \frac{e^2}{m^2c} \int \left\{ \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{th} \frac{\omega'}{2T} \left[G_{\omega'-\omega}^A(\vec{p}_-) \left[G_{\omega'}^R(\vec{p}_+) - G_{\omega'}^A(\vec{p}_+) \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left[G_{\omega'}^R(\vec{p}_-) - G_{\omega'}^A(\vec{p}_-) \right] G_{\omega'+\omega}^R(\vec{p}_+) \right] d\omega' \right\} \frac{p^2 \sin^2 \theta d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} + \\
 & + \frac{e^2}{m^2c} \int \left\{ \frac{i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{th} \frac{\omega'}{2T} \left[F_{\omega'-\omega}^A(\vec{p}_-) \left[F_{\omega'}^R(\vec{p}_+) - F_{\omega'}^A(\vec{p}_+) \right] + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \left[F_{\omega'}^R(\vec{p}_-) - F_{\omega'}^A(\vec{p}_-) \right] F_{\omega'+\omega}^R(\vec{p}_+) \right] d\omega' \right\} \frac{p^2 \sin^2 \theta d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Далее необходимо проинтегрировать по частотной переменной ω' , а затем произвести преобразование $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$, что приводит к замене:

$$E_{\pm} \rightarrow E_{\mp}, \quad G^{R,A}(\vec{p}_{\pm}) \rightarrow G^{R,A}(\vec{p}_{\mp}), \quad F^{R,A}(\vec{p}_{\pm}) \rightarrow F^{R,A}(\vec{p}_{\mp}). \quad (18)$$

В результате перегруппировки множителей при четырёх полюсных слагаемых получим

$$Q(\omega, \vec{q}) = \frac{Ne^2}{mc} - \frac{e^2}{4m^2c} \int \text{th} \frac{E_+}{2T} (p^2 \sin^2 \theta) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \left[1 + \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta^2}{E_+ E_-} \right] \left[\frac{1}{E_+ - E_- - \omega - i\delta} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{E_+ - E_- + \omega + i\delta} \right] + \left[1 - \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta^2}{E_+ E_-} \right] \times \right. \\
& \left. \times \left[\frac{1}{E_+ + E_- - \omega - i\delta} + \frac{1}{E_+ + E_- + \omega + i\delta} \right] \right\} \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\xi_{\pm} = \frac{(\vec{p} \pm \vec{q}/2)^2}{2m} - \mu, \quad E_{\pm} = \sqrt{\xi_{\pm}^2 + \Delta^2}.$$

§ 1.1. Пиппардовский случай

В чистом сверхпроводящем металле глубина проникновения δ всегда оказывается не только меньше длины свободного пробега, но также меньше размера куперовской пары $\hbar v_F / \max \{ \Delta_0, T_c \}$ [3], [4]. Поскольку обратная глубина проникновения имеет порядок характерного волнового вектора q , то этому условию соответствует неравенство $q\hbar v_F \gg \max \{ \Delta_0, T_c \}$. При наличии переменного электромагнитного поля с частотой ω к этому условию необходимо добавить также требование: $q\hbar v_F \gg \omega$.

Поскольку нас будет интересовать поглощение электромагнитных волн, то с самого начала удобно произвести вычисление разности $Q(\omega, q) - Q(0, q)$. При вычислении этой разности переходим от угловых и импульсных переменных к энергетическим переменным $\xi_+ + \xi_- = 2\xi$, $\xi_+ - \xi_- = 2qv_F \cos\theta$:

$$d\vec{p} = 2\pi p^2 dp d\cos\theta \approx 2\pi m p_0 d\xi d\cos\theta = 2\pi m p_0 d\xi_+ d\xi_- / \hbar q v_F.$$

Интегрирование по переменной $\cos\theta$ быстро сходится и фактически производится по области малых значений, не превышающих ω/qv_F , где v_F — скорость нормальных электронов на поверхности Ферми. По этой причине величину $\sin^2\theta$ заменяем на еди-

ницу, после чего интегрирование по переменной $\cos\theta$ производим в бесконечных пределах от $-\infty$ до ∞ . В соответствии с этим интегрирование по новым переменным $d\xi_+$ и $d\xi_-$ также производим в бесконечных пределах. В результате из интегралов выпадают слагаемые, пропорциональные произведению $\xi_+\xi_-$.

Далее от переменных ξ_+ и ξ_- переходим к интегрированию по переменным $x_1 = E_+/\Delta$ и $x_2 = E_-/\Delta$:

$$\frac{d\xi_+d\xi_-}{\hbar qv_F} \rightarrow 4dE_+dE_- \frac{E_+E_-}{\hbar qv_F\xi_+\xi_-} = \frac{4\Delta^2 x_1 x_2 dx_1 dx_2}{\hbar qv_F \sqrt{[(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)]^{1/2}}}.$$

При этом интегрирование по переменным $x_{1,2}$ производится в пределах от 1 до ∞ .

В результате получаем выражение, пропорциональное $1/q$:

$$Q(\omega, q) - Q(0, q) = -\frac{c}{4\pi q} \frac{3\pi N e^2}{m c^2} \frac{\Delta}{\hbar v_F} J, \quad (20)$$

где безразмерный интеграл J имеет вид

$$\begin{aligned} J = & \int_1^\infty \int_1^\infty \frac{dx_1 dx_2}{[(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)]^{1/2}} \operatorname{th} \frac{x_1 \Delta}{2T} \{ (x_1 x_2 + 1) \times \\ & \times \left[\frac{1}{x_1 - x_2 - \tilde{\omega} - i\delta} + \frac{1}{x_1 - x_2 + \tilde{\omega} + i\delta} - \text{V.P.} \frac{2}{x_1 - x_2} \right] + \\ & + (x_1 x_2 - 1) \times \\ & \times \left[\frac{1}{x_1 + x_2 - \tilde{\omega} - i\delta} + \frac{1}{x_1 + x_2 + \tilde{\omega} + i\delta} - \frac{2}{x_1 + x_2} \right] \}, \quad (21) \end{aligned}$$

где $\tilde{\omega} = \hbar\omega/\Delta$.

Мнимая часть выражения (21), которая определяет поглощение электромагнитных волн, в области $\omega > 0$ легко преобразуется к однократному интегралу: $J'' = \operatorname{Im} J =$

$$= \pi \int_1^\infty \frac{dx [x(x + \tilde{\omega}) + 1]}{\sqrt{(x^2 - 1)[(x + \tilde{\omega})^2 - 1]}} \left[\operatorname{th} \frac{(x + \tilde{\omega})\Delta}{2T} - \operatorname{th} \frac{x\Delta}{2T} \right] +$$

$$+ \pi \Theta(\tilde{\omega} - 2) \int_1^{\tilde{\omega}-1} \frac{dx [x(\tilde{\omega} - x) - 1]}{\sqrt{(x^2 - 1)[(x - \tilde{\omega})^2 - 1]}} \operatorname{th} \frac{x\Delta}{2T}. \quad (22)$$

При $T = 0$ первый интеграл обращается в нуль. Второй интеграл отличен от нуля при $\omega > 2\Delta_0$, т.е. имеется порог поглощения для "энергии" связи куперовских пар. Полная зависимость от частоты при $T = 0$ представляется в виде линейной комбинации полных эллиптических интегралов $K(k)$ и $E(k)$ первого и второго рода (см. рис. 1):

$$J''(\omega, T = 0) = \pi \tilde{\omega} \left[E(k) - \frac{4}{\tilde{\omega}^2} K(k) \right], \quad (23)$$

где $k = \sqrt{1 - 4/\tilde{\omega}^2}$.

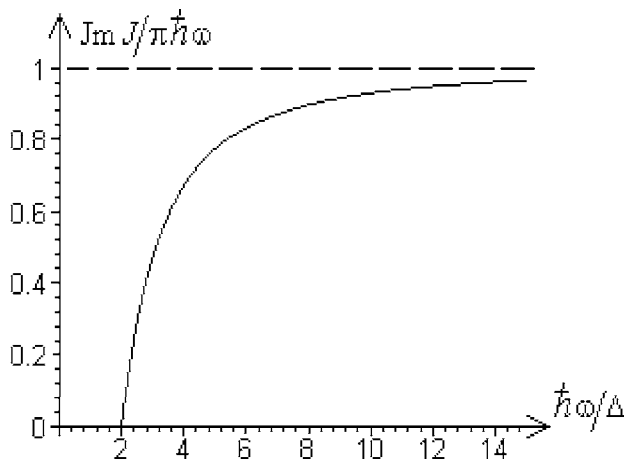


Рис. 1. Зависимость коэффициента поглощения от частоты

Вблизи порога величина $\operatorname{Im}Q$ обращается в нуль по закону:

$$\operatorname{Im}Q = -\frac{3\pi^2 N e^2}{4mc^2} \frac{\Delta_0}{\hbar v_F k} \left(\frac{\hbar\omega}{2\Delta_0} - 1 \right). \quad (24)$$

При конечной температуре в сверхпроводнике имеются квази-частицы, которые могут поглощать электромагнитные волны

любой частоты. Если $T \ll T_c$, то число квазичастиц экспоненциально мало $\sim \exp(-\Delta(0)/T)$. В случае $\omega \ll \Delta(0)$ эта же экспонента содержится и в действительной и в мнимой части коэффициента поглощения, так что в области T/TT_c с понижением температуры коэффициент поглощения экспоненциально убывает с понижением температуры.

С повышением температуры коэффициент поглощения сначала резко возрастает, затем проходит через достаточно широкий максимум, после чего переходит к значению, соответствующему нормальному металлу.

Появление максимума связано с наличием корневых особенностей, одна из которых связана с плотностью состояний возбуждения в начальном состоянии, а другая – с плотностью состояний в конечном состоянии. С понижением частоты поглощаемого кванта электромагнитного поля происходит сближение особенностей, что и приводит к возникновению широкого максимума резонансного типа.

Для того чтобы обнаружить температурный максимум, рассмотрим случай малых частот, $\omega \ll \Delta$, причём будем считать, что отношение Δ/T есть величина порядка единицы. При этом второй интеграл выражения (22) отсутствует по причине предельно малой области интегрирования. В первом интеграле существенна область $x - 1 \sim \tilde{\omega} \ll 1$.

Условие $\omega \ll \delta \sim T$ позволяет разложить разность двух th по степеням $\tilde{\omega}$, после чего выделяем под интегралом сингулярную функцию. Далее после введения переменной $z = x - 1$ получим

$$J'' \approx \frac{\pi \hbar \omega}{2T} \left[\operatorname{ch} \frac{\Delta}{2T} \right]^{-2} \int_0^{\tilde{\omega}} \frac{dz}{\sqrt{z(z + \tilde{\omega})}} = \frac{\pi \hbar \omega}{2T} \left[\operatorname{ch} \frac{\Delta}{2T} \right]^{-2} \ln \frac{\Delta}{\omega}. \quad (25)$$

Можно заметить, что данное выражение как функция переменной Δ имеет широкий максимум. Этим же свойством обладает также функция $-\operatorname{Im}Q/\omega$:

$$-\operatorname{Im}Q/\omega = \frac{3\pi N e^2 \Delta}{8T m v_F q} \left[\operatorname{ch} \frac{\Delta}{2T} \right]^{-2} \ln \frac{\Delta}{\omega}. \quad (26)$$

В силу общего соотношения $\vec{e}_\omega = i\omega\vec{A}/c$ это выражение имеет смысл проводимости.

§ 1.2. Лондоновский случай

Рассмотрим предельный случай, в котором

$$q\hbar v_F \ll \Delta_0, \quad \omega \leq qv_F. \quad (27)$$

При условии $q \rightarrow 0$ можно написать:

$$\left[1 - \frac{\xi_+\xi_- + \Delta^2}{E_+E_-}\right] \approx q^2, \quad \left[1 + \frac{\xi_+\xi_- + \Delta^2}{E_+E_-}\right] \approx 2.$$

В результате, с учётом нечётности выражения во второй квадратной скобке по переменной интегрирования \vec{p} , общее выражение (19) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q(\omega, \vec{q}) &= \frac{Ne^2}{mc} - \frac{e^2}{4m^2c} \int \left[\operatorname{th} \frac{E_+}{2T} - \operatorname{th} \frac{E_-}{2T} \right] (p^2 \sin^2 \theta) \times \\ &\times \left\{ \left[\frac{1}{E_+ - E_- - \omega - i\delta} + \frac{1}{E_+ - E_- + \omega + i\delta} \right] \right\} \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= \frac{Ne^2}{mc} - \frac{e^2}{2m^2c} \int \left\{ \left[\operatorname{th} \frac{E_+}{2T} - \operatorname{th} \frac{E_-}{2T} \right] (p^2 \sin^2 \theta) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{1}{E_+ - E_- - \omega - i\delta} \right] \right\} \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (28) \end{aligned}$$

Дальнейшие упрощения определяются условием (27) малости волнового вектора \vec{q} :

$$\operatorname{th} \frac{E_+}{2T} - \operatorname{th} \frac{E_-}{2T} = 2[n_F(E_+) - n_F(E_-)] \approx 2\hbar\vec{q}\vec{v} \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon},$$

где n_F – распределение Ферми для квазичастиц с нулевым химическим потенциалом и энергией $E_{\vec{p}} = \sqrt{\xi_{\vec{p}}^2 + \Delta^2}$,

$$\vec{v} = \frac{\partial E_{\vec{p}}}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}\xi_{\vec{p}}}{mE_{\vec{p}}}, \quad \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{T}n_F(1 - n_F).$$

В результате получим: $Q(\omega, \vec{q}) =$

$$= \frac{Ne^2}{mc} - \frac{e^2}{m^2c} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \frac{\vec{q}\vec{v}p^2 \sin^2\theta}{\vec{q}\vec{v} - \omega - i\delta} \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{Ne^2}{mc} -$$

$$- \frac{e^2}{m^2c} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} p^2 \sin^2\theta \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} + \frac{e^2}{m^2c} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \frac{\omega p^2 \sin^2\theta}{\vec{q}\vec{v} - \omega - i\delta} \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (29)$$

После интегрирования по углам в первом интеграле два первых слагаемых определяют лондоновское выражение для стационарного сверхпроводящего тока:

$$\frac{N_s e^2}{mc} = \frac{Ne^2}{mc} - \frac{2e^2}{3m^2c} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \frac{p^2 d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (30)$$

так что выражение (29) переписывается следующим образом:

$$Q(\omega, \vec{q}) = \frac{N_s e^2}{mc} + \frac{\omega e^2}{m^2c} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \frac{\sin^2\theta}{\vec{q}\vec{v} - \omega - i\delta} \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (31)$$

Мнимая часть этого выражения определяет нормальный ток, пропорциональный электрическому полю $\vec{j} = \vec{j}_s + \sigma\vec{e}$, где проводимость σ_ω имеет следующий вид:

$$\sigma_\omega = -\text{Im} \left\{ \frac{e^2}{m^2} \int \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \frac{\sin^2\theta}{\vec{q}\vec{v} - \omega - i\delta} \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \right\} =$$

$$= -\frac{\pi e^2}{m^2} \int_0^\infty \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon} \int_{-1}^{+1} \sin^2\theta \delta(qv \cos\theta - \omega) d\cos\theta \frac{p^4 dp}{4\pi^2 \hbar^3}. \quad (32)$$

Интегрирование по углу даёт конечный результат при условии $\cos\theta = \omega/qv < 1$, откуда возникает условие на область интегрирования по переменной ξ :

$$\xi > \xi_0 = \frac{\omega\Delta}{\sqrt{q^2 v_F^2 - \omega^2}}, \quad \omega < qv_F, \quad (33)$$

и в результате при $\omega \ll qv_F$ имеем логарифмический интеграл:

$$\sigma_\omega = \frac{3\pi Ne^2}{qT\rho_0} \int_{\xi_0}^\infty \frac{d\xi E_\xi}{8\xi \text{ch}^2(E_\xi/2T)}, \quad \text{где } E_\xi = \sqrt{\xi^2 + \Delta^2}. \quad (34)$$

В области $\xi \gg \Delta$, когда величиной Δ можно пренебречь, интеграл (32) переходит в известную формулу аномального скин-эффекта:

$$\sigma_{\omega} = \frac{3\pi N e^2}{4p_0 q}. \quad (35)$$

Отсюда можно заключить, что логарифмический интеграл (34) происходит от области $x_0 < \xi < \Delta$. По этой причине низкочастотное поглощение в области $\omega \ll qv_F$ определяется следующим соотношением:

$$\sigma_{\omega} = \frac{3\pi N e^2}{8qT p_0} \frac{\Delta}{\text{ch}^2(\Delta/2T)} \int_{\xi_0}^{\Delta} \frac{d\xi}{\xi} = \frac{3\pi N e^2}{8qT p_0} \frac{\Delta}{\text{ch}^2(\Delta/2T)} \ln \frac{\hbar q v_F}{\omega}. \quad (36)$$

Сравнение с формулой (26) позволяет получить общее выражение для низкочастотной проводимости сверхпроводника:

$$\sigma_{\omega} = \frac{3\pi N e^2}{8qT p_0} \frac{\Delta}{\text{ch}^2(\Delta/2T)} \ln \left\{ \frac{\min(\hbar q v_F, \Delta)}{\omega} \right\}. \quad (37)$$

§ 2. Поглощение ультразвука

Предположим, что сверхпроводящий металл является настолько чистым, что частота звуковых колебаний ω велика по сравнению с обратным временем релаксации по импульсу $\omega \gg 1/\tau_{tr}$. Это означает, что процесс поглощения звука можно представить как результат столкновений квантов звука с квазичастичными возбуждениями сверхпроводника.

Максимально возможные частоты, которые можно генерировать, не превышают 10^9 Гц, в то время как $\Delta/(2\pi\hbar) \sim 10^{11}$ Гц, так что следует считать, что $\hbar\omega \ll \Delta$. Ввиду этого при записи гамильтониана электрон-фононного взаимодействия следует отбросить слагаемые, соответствующие рождению или уничтожению двух квазичастиц. Оставшиеся слагаемые, соответствующие

шие рождению и уничтожению одного фонона, имеют вид: $\hat{V} =$

$$= \sum_{\vec{p}, \vec{p}', \vec{q}, \sigma} G_q \hat{b}_{\vec{q}} \left(\hat{\alpha}_{\vec{p}, \sigma}^+ u_p \hat{\alpha}_{\vec{p}', \sigma} u_{p'} + \hat{\alpha}_{-\vec{p}, -\sigma} v_p \hat{\alpha}_{-\vec{p}', -\sigma}^+ v_{p'} \right) \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{p}') +$$

$$+ \sum_{\vec{p}, \vec{p}', \vec{q}, \sigma} G_q \hat{b}_{\vec{q}}^+ \left(\hat{\alpha}_{\vec{p}, \sigma}^+ u_p \hat{\alpha}_{\vec{p}', \sigma} u_{p'} + \hat{\alpha}_{-\vec{p}, -\sigma} v_p \hat{\alpha}_{-\vec{p}', -\sigma}^+ v_{p'} \right) \delta(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}'). \quad (38)$$

Здесь G_q – деформационный потенциал, который в длинноволновом пределе пропорционален квадратному корню из волнового вектора ($\sim q/\sqrt{\hbar\omega_q}$) для продольных фононов. Отсюда можно заключить, что слагаемое с $q = 0$ отсутствует, и поэтому выражение (38) переписывается в следующем виде:

$$\hat{V} = \sum_{\vec{p}, \vec{p}', \vec{q}, \sigma} G_q \hat{\alpha}_{\vec{p}, \sigma}^+ \hat{\alpha}_{\vec{p}', \sigma} \left(u_p u_{p'} \hat{b}_{\vec{q}} - v_p v_{p'} \hat{b}_{-\vec{q}} \right) \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{p}') +$$

$$+ \sum_{\vec{p}, \vec{p}', \vec{q}, \sigma} G_q \hat{\alpha}_{\vec{p}, \sigma}^+ \hat{\alpha}_{\vec{p}', \sigma} \left(u_p u_{p'} \hat{b}_{\vec{q}}^+ - v_p v_{p'} \hat{b}_{-\vec{q}}^+ \right) \delta(\vec{p} + \vec{q} - \vec{p}'). \quad (39)$$

Здесь и ниже коэффициенты $(u - v)$ -преобразования считаются действительными и определяются обычным образом:

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_p}{E_p} \right), \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_p}{E_p} \right), \quad E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}. \quad (40)$$

Для нахождения коэффициента затухания ультразвука достаточно вычислить вероятность перехода в единицу времени, отнесённую к одному звуковому кванту. Это означает, что при вычислении амплитуды вероятности перехода операторы рождения и уничтожения фононов заменяем числами $\sqrt{1 + N_q} \approx \sqrt{N_q}$ и $\sqrt{N_q}$, а затем средние числа заполнения N_q заменяем на единицу. В результате получим коэффициент затухания: $\gamma = (2\pi/\hbar) G_q^2 \times$

$$\times \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} [n_F(E_p) - n_F(E_{p'})] w_{p, p'} \delta(E_{p'} - E_p - \hbar\omega_q) \delta(\vec{p}' - \vec{p} - \vec{q}), \quad (41)$$

где

$$w_{p, p'} = (u_p u_{p'}' - v_p v_{p'}')^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\xi_p \xi_{p'} - \Delta^2}{E_p E_{p'}} \right].$$

Дальнейшие преобразования связаны малостью энергии $\hbar\omega$ по сравнению с Δ , а также импульса $\hbar q$ по сравнению с импульсом Ферми p_0 :

$$\gamma = -\frac{2\pi}{\hbar^2} G_q^2 \hbar\omega \int \frac{\partial n_F(E_p)}{\partial E_p} \tilde{w}_{p,p'} \delta(\vec{q}\vec{v} - \hbar\omega_q) \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3},$$

где после интегрирования по положительным и отрицательным значениям переменной ξ_p :

$$\tilde{w}_{p,p'} = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\Delta^2}{E_p E_{p'}} \right], \quad \vec{v} = \frac{\partial E_p}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p} \xi}{m E_p}.$$

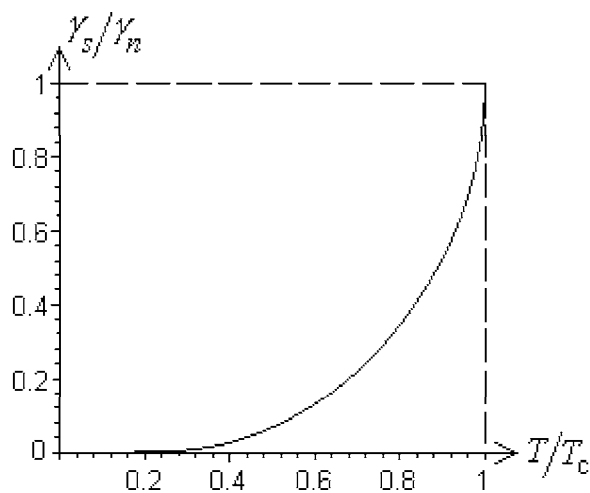


Рис. 2. Температурная зависимость коэффициента поглощения ультразвука в сверхпроводнике

После перехода от переменных $\cos\theta$ и ξ_p к переменным $E_p = E_1$ и $E_2 = E_1 + \hbar\omega = E_1 + qv\cos\theta$:

$$\frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{mp_0}{4\pi^2\hbar^3} d\xi_1 d\cos\theta = \frac{mp_0}{4\pi^2\hbar^3} \frac{E_1 E_2}{qv_F \xi_1 \xi_2} dE_1 dE_2,$$

находим

$$\gamma = -\frac{\pi}{qv_F\hbar^2} G_q^2 \hbar\omega \frac{mp_0}{\pi^2\hbar^3} \int_{\Delta}^{\infty} \frac{\partial n_F(E)}{\partial E} dE \times \\ \times \left[\frac{E(E + \hbar\omega) - \Delta^2}{\sqrt{(E^2 - \Delta^2)((E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2)}} \right]. \quad (42)$$

Поскольку $\hbar\omega \ll \Delta$, то выражение в квадратных скобках слабо отличается от единицы. В результате удаётся вычислить интеграл и определить температурную зависимость отношения коэффициентов поглощения:

$$\frac{\gamma_s}{\gamma_n} = -2 \int_{\Delta}^{\infty} \frac{\partial n_F(E)}{\partial E} dE = \frac{2}{\exp(\Delta/T) + 1}. \quad (43)$$

При $T \rightarrow T_c$ это отношение стремится к единице, при $T \ll T_c$ оно спадает по экспоненциальному закону (рис. 2).

§ 3. Скорость релаксации ядерных спинов

При вычислении статической проводимости мы до сих пор не учитывали влияния спина. В случае бесспиновых примесных центров это выглядит естественно.

В случае парамагнитных центров с заданным спином S простейшая форма гамильтониана имеет δ -образный характер:

$$\hat{H} = J \sum_k \int \hat{\psi}_{\alpha}^{+}(\vec{r}) \hat{\psi}_{\beta}(\vec{r}) \hat{\sigma}_{\alpha,\beta} \hat{S}_k \delta(\vec{r} - \vec{R}_k) d\vec{r}. \quad (44)$$

Как показано в работе Корринги [5], скорость релаксации определяется вторым порядком теории возмущений при заданной временной зависимости спиновых операторов примеси $\vec{S}(t)$. При этом частотная зависимость определяется зеемановским расщеплением ядерных уровней. Соответствующее обратное время релаксации определяется теми же формулами, что и для поглощения электромагнитных волн, но с учётом спиновой структуры:

$$-\frac{i}{\hbar} J^2 \int_{\Gamma} \langle \hat{a}_{\alpha}^{+}(t) \hat{\sigma}_{\alpha,\beta}^{(k)} \hat{S}_k(t) \hat{a}_{\beta}(t) \hat{a}_{\mu}^{+}(t') \hat{\sigma}_{\mu,\nu}^{(n)} \hat{S}_n(t') \hat{a}_{\nu}(t') \rangle_0 dt', \quad (45)$$

где интегрирование ведётся по контуру Келдыша Г.

Если предположить, что усреднение спиновых операторов \vec{S} производится независимо от усреднения электронных операторов рождения и уничтожения, тогда задача о нахождении скорости релаксации ядерных спинов вполне эквивалентна задаче о поглощении электромагнитных волн или о поглощении ультразвука. Различие происходит от спиновой структуры исходного гамильтониана.

В соответствии с этим необходимо помнить о спиновой зависимости нормальной и аномальной электронной функции Грина. Нормальная функция Грина $G_{\alpha\beta}$ пропорциональна единичной матрице $\delta_{\alpha\beta}$, в то время как аномальные функции Грина $F_{\alpha\beta}$ и $F_{\alpha\beta}^+$ пропорциональны антисимметричной действительной матрице $i\hat{\sigma}^y$. Приведём явные выражения для запаздывающих функций Грина (см. (14)):

$$G_{\alpha\beta}^R = \delta_{\alpha\beta} \left\{ \frac{u_p^2}{\omega - E_p + i\delta} + \frac{v_p^2}{\omega + E_p + i\delta} \right\},$$

$$F_{\alpha\beta}^R = -F_{\alpha\beta}^{(+),R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\Delta}{2E_p} \left[\frac{1}{\omega + E_p + i\delta} - \frac{1}{\omega - E_p + i\delta} \right],$$

где $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}$,

$$u_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_p}{E_p} \right), \quad v_p^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_p}{E_p} \right), \quad \xi_p = \frac{p^2}{2m} - \mu. \quad (46)$$

Отсюда можно заключить, что спиновая зависимость может быть выделена в виде множителя. При этом температурная зависимость, происходящая от произведения нормальных функций Грина, остаётся неизменной, в то время как результат усреднения аномальных функций Грина имеет противоположный знак.

Для того чтобы убедиться в последнем, рассмотрим произведение спиновых множителей, соответствующих усреднению аномальных множителей:

$$-\langle \hat{a}_\mu^+(t') \hat{a}_\alpha^+(t) \rangle \hat{\sigma}_{\alpha,\beta}^{(k)} \langle \hat{a}_\beta(t) \hat{a}_\nu(t') \rangle \hat{\sigma}_{\mu,\nu}^{(n)} \sim i(\sigma^y)_{\mu,\alpha} \hat{\sigma}_{\alpha,\beta}^{(k)} (-i)(\sigma^y)_{\beta,\nu} \hat{\sigma}_{\mu,\nu}^{(n)}.$$

Далее мы преобразуем произведение двух последних множителей в произведение матриц: $(\sigma^y)_{\beta,\nu} \hat{\sigma}_{\mu,\nu}^{(n)} = (\sigma^y)_{\beta,\nu} \hat{\sigma}_{\nu,\mu}^{(n),T}$, где $\hat{\sigma}_{\nu,\mu}^{(n),T}$ – транспонированная матрица.

Можно заметить, что в случае $n = y$, $\hat{\sigma}_{\nu,\mu}^{(y),T} = -\hat{\sigma}_{\nu,\mu}^{(y)}$, так что $(\sigma^y)_{\beta,\nu} \hat{\sigma}_{\mu,\nu}^{(n)} = -\delta_{\beta,\mu}$

Если же $n = x$ или $n = z$, тогда $\hat{\sigma}_{\nu,\mu}^{(n),T} = \hat{\sigma}_{\nu,\mu}^{(n)}$, эти матрицы антикоммутируют, и поэтому $(\sigma^y)_{\beta,\nu} \hat{\sigma}_{\mu,\nu}^{(n)} = -\hat{\sigma}_{\beta,\nu}^{(n)} (\sigma^y)_{\nu,\mu}$. Отсюда следует, что для всех трёх значений n можно написать:

$$(\sigma^y)_{\beta,\nu} \hat{\sigma}_{\mu,\nu}^{(n)} = -\hat{\sigma}_{\beta,\nu}^{(n)} (\sigma^y)_{\nu,\mu}.$$

Подставляя это в исходное выражение, получим

$$-\langle \hat{a}_\mu^+(t') \hat{a}_\alpha^+(t) \rangle \hat{\sigma}_{\alpha,\beta}^{(k)} \langle \hat{a}_\beta(t) \hat{a}_\nu(t') \rangle \hat{\sigma}_{\mu,\nu}^{(n)} \sim -\hat{\sigma}_{\nu,\beta}^{(k)} \hat{\sigma}_{\beta,\nu}^{(n)} = -2\delta_{k,n}. \quad (47)$$

Можно заметить, что для скалярного взаимодействия, когда вместо матриц Паули $\hat{\sigma}_{\alpha,\beta}^{(k)}$ и $\hat{\sigma}_{\beta,\nu}^{(n)}$ стоят единицы, мы получим тот же результат, но без знака "минус".

Таким образом, в качестве обратного времени релаксации можно написать те же общие формулы (19), что и для поглощения ультразвука, но с заменой знака перед Δ^2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_y} \sim & - \int \text{th} \frac{E_+}{2T} \text{Im} \left\{ \left[1 + \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta^2}{E_+ E_-} \right] \left[\frac{1}{E_+ - E_- - \omega - i\delta} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{E_+ - E_- + \omega + i\delta} \right] + \left[1 - \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta^2}{E_+ E_-} \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[\frac{1}{E_+ + E_- - \omega - i\delta} + \frac{1}{E_+ + E_- + \omega + i\delta} \right] \right\} \frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{d\vec{q}}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \quad (48)$$

Здесь введены обозначения: ω – зеемановское расщепление ядерных уровней,

$$\xi_{\pm} = \frac{(\vec{p} \pm \vec{q}/2)^2}{2m} - \mu, \quad E_{\pm} = \sqrt{\xi_{\pm}^2 + \Delta^2}.$$

Окончательное выражение следует проинтегрировать по передаваемому импульсу \vec{q} , предварительно умножив выражение (48) на соответствующий форм-фактор [5].

Предположим, что этот множитель постоянен (контактное взаимодействие), тогда окончательное выражение интегрируем по импульсам начального и конечного состояния \vec{p}_{\pm} . После перехода к интегрированию по переменным ξ_{\pm} имеем

$$\frac{1}{\tau_{\text{я}}} \sim - \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_- \left[1 + \frac{\xi_+ \xi_- + \Delta^2}{E_+ E_-} \right] \times \\ \times \left[\text{th} \frac{E_+}{2T} - \text{th} \frac{E_-}{2T} \right] \delta(E_+ - E_- - \omega) d\xi_+ d\xi_-.$$

Интеграл от произведения $\xi_+ \xi_-$ обращается в нуль, после чего удобно перейти к интегрированию по энергиям E_{\pm} :

$$\frac{1}{\tau_{\text{я}}} \sim \int_{\Delta}^{+\infty} dE_+ \int_{\Delta}^{+\infty} dE_- \left\{ \frac{E_+ E_- + \Delta^2}{\sqrt{(E_+^2 - \Delta^2)(E_-^2 - \Delta^2)}} \times \right. \\ \left. \times \left[\text{th} \frac{E_+}{2T} - \text{th} \frac{E_-}{2T} \right] \delta(E_+ - E_- - \omega) \right\}. \quad (49)$$

Если предположить, что $\omega \ll \Delta$, тогда вместо (49) получим

$$\frac{1}{\tau_{\text{я}}} \sim \frac{\hbar\omega}{2T} \int_{\Delta}^{+\infty} dE \left\{ \frac{E(E + \hbar\omega) + \Delta^2}{\sqrt{(E^2 - \Delta^2)((E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2)}} \left(\text{ch} \frac{E}{2T} \right)^{-2} \right\}. \quad (50)$$

Удобно рассмотреть относительную скорость релаксации:

$$\frac{R_s}{R_n} = \frac{1}{2T} \int_{\Delta}^{+\infty} dE \left\{ \frac{E(E + \hbar\omega) + \Delta^2}{\sqrt{(E^2 - \Delta^2)((E + \hbar\omega)^2 - \Delta^2)}} \left(\text{ch} \frac{E}{2T} \right)^{-2} \right\}. \quad (51)$$

В отличие от коэффициента затухания ультразвука, в области малых частот эта величина не является аналитической, зависит от отношения Δ/ω и как функция этого параметра имеет

логарифмическую особенность. Так, в области $\omega \ll \Delta$ с логарифмической точностью имеем

$$\frac{R_s}{R_n} \sim \frac{\Delta}{4T} \left(\operatorname{ch} \frac{\Delta}{2T} \right)^{-2} \ln \frac{\Delta}{\omega}. \quad (52)$$

При этом вблизи от точки перехода соответствующая кривая имеет температурный максимум (рис. 3).

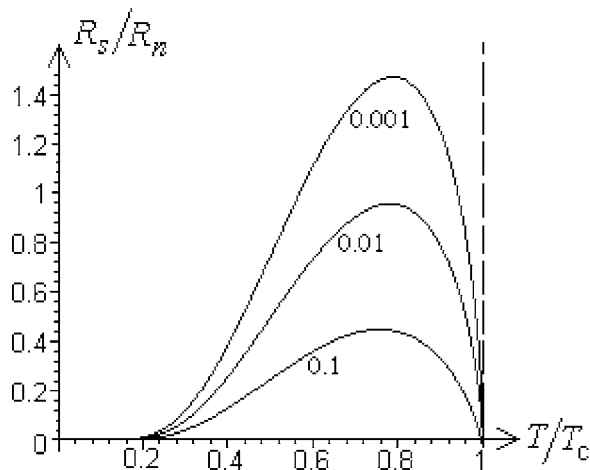


Рис. 3. Аномальная часть относительной скорости релаксации при различных значениях $\hbar\omega/\Delta_0$

Существование этого максимума было доказано экспериментально в работах Хебеля–Шлихтера [6], [7].

§ 4. Теплопроводность сверхпроводника

Перенос тепла в сверхпроводниках осуществляется элементарными возбуждениями. По этой причине для нахождения коэффициента теплопереноса запишем кинетическое уравнение для функции распределения квазичастиц. При наличии стаци-

онарного распределения температуры имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \vec{v} - \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \frac{\partial E}{\partial \vec{r}} = \hat{S}t(f).$$

Будем искать решение кинетического уравнения в виде суммы $f = f_0 + f_1$. При этом в левую сторону кинетического уравнения следует подставить локально-равновесную функцию распределения $f_0 = n_F(E_p)$, где энергия возбуждений $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + \Delta^2}$ имеет координатную зависимость в силу того, что энергетическая щель $\Delta(T)$ зависит от температуры, которая является заданной функцией от координат. В результате левая часть кинетического уравнения представляется в следующем виде:

$$\left\{ \frac{\partial n_F}{\partial T} + \frac{\partial n_F}{\partial E_p} \frac{\partial E_p}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial T} \right\} \nabla T \vec{v} - \frac{\partial n_F}{\partial E_p} \frac{\partial E_p}{\partial \vec{p}} \frac{\partial E_p}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial T} \nabla T.$$

Второе и третье слагаемые взаимно сокращаются, если использовать определение скорости возбуждений $\vec{v} = \partial E_p / \partial \vec{p}$, после чего остаётся

$$\frac{\partial n_F}{\partial T} \vec{v} \nabla T = \frac{\vec{v} \nabla T}{T^2} E_p n_F(E_p) (1 - n_F(E_p)). \quad (53)$$

Если предположить, что основным механизмом рассеяния квазичастиц является упругое рассеяние на неподвижных примесях, тогда после подстановки первой поправки в интеграл столкновений получим

$$\hat{S}t(n_F + f_1) \approx -\frac{1}{\tau_{tr}} f_1, \quad (54)$$

где $1/\tau_{tr} = v n_{пр} \sigma_t$ — эффективная частота столкновений, $n_{пр}$ — количество примесных центров в единице объёма, σ_t — транспортное сечение рассеяния частицы на атоме примеси.

Таким образом, кинетическое уравнение приобретает вид, предложенный впервые в работе [8]:

$$\frac{\vec{v} \nabla T}{v} \frac{E_p}{T^2} n_F(E_p) (1 - n_F(E_p)) = -\frac{f_1}{l}, \quad (55)$$

где $l = 1/(n_{\text{пр}}\sigma_l)$ – длина пробега, которая ниже считается не зависящей от импульса.

Подставляя решение уравнения (55) в выражение для теплового потока \vec{Q} , получим после усреднения по направлениям импульса \vec{p} : $\vec{Q} =$

$$\begin{aligned} &= \int E_p \vec{v} f_1 \frac{2d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} = -\frac{l}{T^2} \int \frac{\vec{v}\nabla T}{v} \vec{v} n_F(E_p) (1 - n_F(E_p)) \frac{2E_p^2 d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} = \\ &= -\frac{l\nabla T}{3T^2} \int v n_F(E_p) (1 - n_F(E_p)) \frac{2E_p^2 d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \quad (56)$$

В результате после интегрирования по углам и замены $v dp = dE$, $p^2 \approx p_0^2$ получим явное выражение для коэффициента теплопроводности сверхпроводника κ_s [8]:

$$\begin{aligned} \kappa_s &= \frac{l}{3T^2} \int_0^\infty v n_F(E_p) (1 - n_F(E_p)) \frac{E_p^2 p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3} = \\ &= \frac{lp_0^2}{6\pi^2 \hbar^3 T^2} \int_{\Delta}^\infty \left(\text{ch} \frac{E}{2T}\right)^{-2} E^2 dE = \frac{lp_0^2 T}{6\pi^2 \hbar^3} \int_{\Delta/T}^\infty \left(\text{ch} \frac{x}{2}\right)^{-2} x^2 dx. \end{aligned} \quad (57)$$

В области низких температур, когда $T \ll \Delta$, коэффициент теплопроводности стремится к нулю по экспоненциальному закону:

$$\kappa_s = \frac{2lp_0^2 \Delta_0^2}{3\pi^2 \hbar^3 T} \exp\left(-\frac{\Delta_0}{T}\right). \quad (58)$$

Если же $T \rightarrow T_c$, тогда $\Delta \rightarrow 0$, а коэффициент теплопроводности $\kappa \rightarrow \kappa_n$ – коэффициенту теплопроводности нормального металла:

$$\kappa_n = \frac{lp_0^2 T}{6\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \left(\text{ch} \frac{x}{2}\right)^{-2} x^2 dx = \frac{lp_0^2 T}{9\hbar^3}. \quad (59)$$

Во всей промежуточной области температур κ_s/κ_n зависит только от отношения Δ/T :

$$\frac{\kappa_s}{\kappa_n} = \frac{3}{2\pi^2} \int_{\Delta/T}^\infty \left(\text{ch} \frac{x}{2}\right)^{-2} x^2 dx. \quad (60)$$

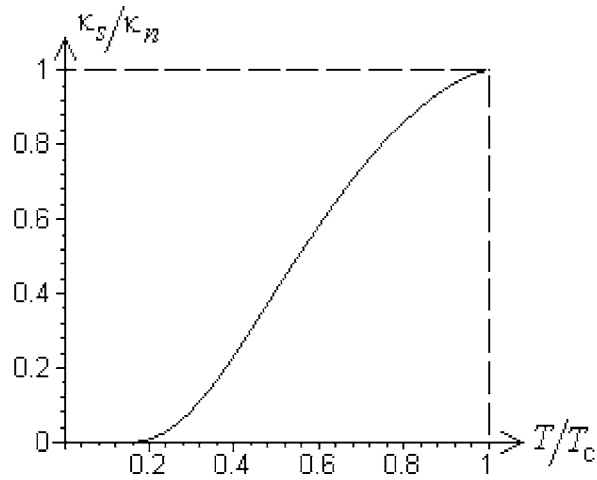


Рис. 4. Температурная зависимость относительного коэффициента теплопроводности

Соответствующая кривая представлена на рис. 4.

В отличие от коэффициента поглощения электромагнитных волн и от скорости релаксации ядерных спинов, эта функция является монотонно возрастающей функцией температуры, а вблизи от точки перехода её вторая производная по температуре имеет корневую особенность. В этом нетрудно убедиться, если произвести разложение выражений (57) или (60) по степеням Δ/T :

$$\frac{\kappa_s}{\kappa_n} \approx 1 - \frac{\Delta^3}{2\pi^2 T^3} = 1 - \frac{\pi}{2} \left(\frac{8}{7\zeta(3)} \right)^{3/2} \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right)^{3/2}. \quad (61)$$

§ 5. Нестационарные уравнения Гинзбурга–Ландау

Согласно теории Л.П. Горькова [1] микроскопическая теория сверхпроводимости может быть рассмотрена методом самосогласованного поля, и в соответствии с этим операторная часть гамильтониана БКШ может быть записана в следующей упрощённой форме:

$$\hat{V} = -\frac{1}{2} \left\{ \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p},\alpha}^+ \hat{a}_{-\vec{p},\beta}^+ \Delta_{\beta,\alpha} + \Delta_{\alpha,\beta}^+ \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p},\beta} \hat{a}_{\vec{p},\alpha} \right\}, \quad (62)$$

где α, β – спиновые индексы, $\Delta_{\alpha,\beta}^+$ и $\Delta_{\beta,\alpha}$ – аномальные средние:

$$\Delta_{\alpha,\beta}^+ = \frac{g}{V} \sum_{\vec{p}} \langle \hat{a}_{\vec{p},\alpha}^+ \hat{a}_{-\vec{p},\beta}^+ \rangle, \quad \Delta_{\beta,\alpha} = \frac{g}{V} \sum_{\vec{p}} \langle \hat{a}_{-\vec{p},\beta} \hat{a}_{\vec{p},\alpha} \rangle. \quad (63)$$

После перехода к представлению Гейзенберга операторы вторичного квантования начинают зависеть от времени, так что и аномальные средние зависят от времени:

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha,\beta}^+(t) &= \frac{g}{V} \sum_{\vec{p}} \langle \tilde{a}_{\vec{p},\alpha}^+(t) \tilde{a}_{-\vec{p},\beta}^+(t) \rangle = i\sigma_{\alpha,\beta}^y \Delta^*(t), \\ \Delta_{\beta,\alpha}(t) &= \frac{g}{V} \sum_{\vec{p}} \langle \tilde{a}_{-\vec{p},\beta}(t) \tilde{a}_{\vec{p},\alpha}(t) \rangle = -i\sigma_{\beta,\alpha}^y \Delta(t). \end{aligned} \quad (64)$$

После перехода к представлению взаимодействия гамильтониан $\hat{V}(t)$ приобретает следующий вид:

$$\hat{V}(t) = - \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{\vec{p},\uparrow}^+(t) \hat{a}_{-\vec{p},\downarrow}^+(t) \Delta(t) - \sum_{\vec{p}} \hat{a}_{-\vec{p},\downarrow}(t) \hat{a}_{\vec{p},\uparrow}(t) \Delta^*(t). \quad (65)$$

Для написания нестационарных уравнений Гинзбурга–Ландау необходимо переписать условия самосогласования (64) через операторы в представлении взаимодействия и от усреднения по полному гамильтониану перейти к усреднению по состояниям без взаимодействия (65):

$$\Delta(t) = \frac{g}{V} \sum_{\vec{p}} \langle \tilde{a}_{-\vec{p},\downarrow}(t) \tilde{a}_{\vec{p},\uparrow}(t) \rangle = \frac{g}{V} \sum_{\vec{p}} \langle \hat{T} \left(\hat{a}_{-\vec{p},\downarrow}(t) \hat{a}_{\vec{p},\uparrow}(t) \hat{S}_\Gamma \right) \rangle_0. \quad (66)$$

Здесь символ \hat{T} обозначает временное упорядочение на контуре Келдыша Γ , а S -матрица выражается через интеграл по контуру Γ :

$$\hat{S}_\Gamma = \hat{T} \exp \left(\frac{-i}{\hbar} \int_\Gamma \hat{V}(t) dt \right). \quad (67)$$

Разлагая S -матрицу до первого порядка по $\hat{V}(t)$, получим линеаризованное уравнение на $\Delta(t)$: $\Delta(t_-) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{ig}{V\hbar} \sum_{\bar{p}, \bar{p}'} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \hat{T} (\hat{a}_{-\bar{p}, \downarrow}(t_-) \hat{a}_{\bar{p}, \uparrow}(t_-) \hat{a}_{\bar{p}, \uparrow}^+(t'_-) \hat{a}_{-\bar{p}, \downarrow}^+(t'_-)) \rangle_0 \Delta(t'_-) dt'_- - \\ &- \frac{ig}{V\hbar} \sum_{\bar{p}, \bar{p}'} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \hat{a}_{\bar{p}, \uparrow}^+(t'_+) \hat{a}_{-\bar{p}, \downarrow}^+(t'_+) \hat{a}_{-\bar{p}, \downarrow}(t_-) \hat{a}_{\bar{p}, \uparrow}(t_-) \rangle_0 \Delta(t'_+) dt'_+. \quad (68) \end{aligned}$$

Вычисляя средние по теореме Вика, получим следующее интегральное уравнение:

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= -\frac{ig}{V\hbar} \sum_{\bar{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\bar{p}, \uparrow}^c(t-t') G_{-\bar{p}, \downarrow}^c(t-t') \Delta(t') dt' + \\ &+ \frac{ig}{V\hbar} \sum_{\bar{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\bar{p}, \uparrow}^{(-,+)}(t-t') G_{-\bar{p}, \downarrow}^{(-,+)}(t-t') \Delta(t') dt'. \quad (69) \end{aligned}$$

Здесь $G_{\bar{p}, \uparrow}^c(t-t') = G_{-\bar{p}, \downarrow}^c(t-t') = G^c(t-t')$ – причинная функция Грина: $G^c(t-t') =$

$$\begin{aligned} &= \{ -i [1 - n_F(\xi_p)] \theta(t-t') + i n_F(\xi_p) \theta(t'-t) \} \exp \left[-i \frac{\xi(t-t')}{\hbar} \right]; \\ G_{\bar{p}, \uparrow}^{(-,+)}(t-t') &= G_{-\bar{p}, \downarrow}^{(-,+)}(t-t') = \\ &= G^{(-,+)}(t-t') = i n_F(\xi_p) \exp \left[-i \frac{\xi(t-t')}{\hbar} \right]. \quad (70) \end{aligned}$$

После перехода к компонентам Фурье:

$$\Delta(t) = \Delta_\Omega \exp(-i\Omega t), \quad G(t-t') = \int G_\omega \exp(-i\omega(t-t')) \frac{d\omega}{2\pi}$$

получим алгебраическое уравнение: $\Delta_\Omega =$

$$= -\frac{ig}{V\hbar} \sum_{\vec{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\vec{p},\omega_1}^c G_{\vec{p},\omega_2}^c \delta(\omega_1 + \omega_2 - \Omega) \frac{d\omega_1 d\omega_2}{2\pi} \Delta_\Omega +$$

$$+ \frac{ig}{V\hbar} \sum_{\vec{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{\vec{p},\omega_1}^{(-,+)} G_{\vec{p},\omega_2}^{(-,+)} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \Omega) \frac{d\omega_1 d\omega_2}{2\pi} \Delta_\Omega. \quad (71)$$

Компоненты Фурье от функций Грина находим с помощью определений (70):

$$G_{\vec{p},\omega}^c = \hbar \left\{ \frac{n_F(\xi_p)}{\hbar\omega - \xi_p - i\delta} + \frac{1 - n_F(\xi_p)}{\hbar\omega - \xi_p + i\delta} \right\},$$

$$G_{\vec{p},\omega}^{(-,+)} = \hbar 2\pi i n_F(\xi_p) \delta(\hbar\omega - \xi_p).$$

Для дальнейших вычислений эти функции удобно выразить через запаздывающую (G^R) и опережающую (G^A) функции Грина:

$$G_{\vec{p},\omega}^c = \frac{1}{2} \left\{ G_{\omega,p}^R \left(1 + \text{th} \frac{\hbar\omega}{2T} \right) + G_{\omega,p}^A \left(1 - \text{th} \frac{\hbar\omega}{2T} \right) \right\},$$

$$G_{\vec{p},\omega}^{(-,+)} = -\frac{1}{2} (G_{\omega,p}^R - G_{\omega,p}^A) \left(1 - \text{th} \frac{\hbar\omega}{2T} \right), \quad G^{R,A} = \frac{\hbar}{\hbar\omega - \xi_p \pm i\delta}.$$

После подстановки этих выражений в (71) мы получим: $\Delta_\Omega =$

$$= -\frac{ig}{2V\hbar} \sum_{\vec{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \Omega) \frac{d\omega_1 d\omega_2}{2\pi} \Delta_\Omega \times$$

$$\times \left[G_{\vec{p},\omega_1}^R G_{\vec{p},\omega_2}^R \left(\text{th} \frac{\hbar\omega_1}{2T} + \text{th} \frac{\hbar\omega_2}{2T} \right) + \right.$$

$$\left. + G_{\vec{p},\omega_1}^R G_{\vec{p},\omega_2}^A \left(1 - \text{th} \frac{\hbar\omega_2}{2T} \right) + G_{\vec{p},\omega_1}^A G_{\vec{p},\omega_2}^R \left(1 - \text{th} \frac{\hbar\omega_1}{2T} \right) \right]. \quad (72)$$

Далее мы переходим от суммирования по импульсам к интегрированию по ξ (с множителем $\nu_0 = m\rho_0 / (2\pi^2\hbar^3)$):

$$\frac{1}{V\hbar} \sum_{\vec{p}} G_{\vec{p},\omega_1}^R G_{\vec{p},\omega_2}^R = \nu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hbar d\xi}{(\hbar\omega_1 - \xi + i\delta)(\hbar\omega_2 - \xi + i\delta)} = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{V\hbar} \sum_{\vec{p}} G_{\vec{p},\omega_1}^R G_{\vec{p},\omega_2}^A &= \nu_0 \hbar \frac{2\pi i}{(\omega_1 - \omega_2 + i\delta)}, \\ \frac{1}{V\hbar} \sum_{\vec{p}} G_{\vec{p},\omega_1}^A G_{\vec{p},\omega_2}^R &= \nu_0 \hbar \frac{2\pi i}{(\omega_2 - \omega_1 + i\delta)}. \end{aligned} \quad (73)$$

В результате уравнение (72) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta_\Omega &= \frac{g\nu_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \Omega) d\omega_1 d\omega_2 \Delta_\Omega \times \\ &\times \left[\frac{1}{(\omega_1 - \omega_2 + i\delta)} \left(1 - \text{th} \frac{\hbar\omega_2}{2T} \right) + \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1 + i\delta)} \left(1 - \text{th} \frac{\hbar\omega_1}{2T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (74)$$

Далее мы переходим к переменным: $\omega_1 + \omega_2 = \Omega$ и $\omega_1 - \omega_2 = \omega$.

$$\begin{aligned} \Delta_\Omega &= \frac{g\nu_0}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \Delta_\Omega \left\{ \frac{1}{\omega} \left[\text{th} \frac{\hbar\omega + \Omega}{4T} + \text{th} \frac{\hbar\omega - \Omega}{4T} \right] + \right. \\ &\left. + i\pi\delta(\omega) \left[\text{th} \frac{\hbar\omega + \Omega}{4T} - \text{th} \frac{\hbar\omega - \Omega}{4T} \right] \right\} d\omega. \end{aligned} \quad (75)$$

Предположим, что $\Omega \ll T \approx T_c$, тогда в первом интеграле можно пренебречь Ω по сравнению с ω . В результате находим линейную поправку по Ω/T :

$$\begin{aligned} \Delta_\Omega &= \frac{g\nu_0}{2} \Delta_\Omega \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\omega} \text{th} \frac{\hbar\omega}{4T} + i\pi \text{th} \frac{\Omega}{4T} \right\} \approx \\ &\approx g\nu_0 \Delta_\Omega \left\{ \int_0^{\tilde{\epsilon}} \frac{d\omega}{\omega} \text{th} \frac{\hbar\omega}{4T} + i\pi \frac{\Omega}{8T} \right\}, \end{aligned} \quad (76)$$

где $\tilde{\epsilon}$ – верхний предел обрезания.

Поскольку температура перехода определяется из условия

$$1 = g\nu_0 \int_0^{\tilde{\epsilon}} \frac{d\omega}{\omega} \text{th} \frac{\hbar\omega}{4T_c},$$

то линеаризованная часть уравнения ГЛАГ приобретает вид

$$\ln \frac{T_c}{T} \Delta(t) \approx \frac{T_c - T}{T_c} \Delta(t) = \frac{\pi \hbar}{8T_c} \frac{\partial \Delta}{\partial t}. \quad (77)$$

Отсюда можно заключить, что волновая функция куперовской пары $\psi(\vec{r}, t)$, пропорциональная $\Delta(t)$, удовлетворяет уравнению с первой производной по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} - \frac{2ie\vec{A}}{\hbar c} \right)^2 \psi(\vec{r}, t) + \frac{1}{\eta} \left[\frac{T_c - T}{T_c} - \frac{1}{N_e} |\psi(\vec{r}, t)|^2 \right] \psi(\vec{r}, t) = \\ = \frac{\pi \hbar}{8T_c \eta} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2ie\varphi}{\hbar} \right) \psi(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (78)$$

Коэффициенты η и N_e , входящие в это уравнение, — те же, что и в стационарной теории Л.П. Горькова [1]:

$$\eta = \frac{7\zeta(3)}{6(\pi T_c)^2} \epsilon_F; \quad N_e = \frac{p_0^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad \psi(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{7\zeta(3)N_e}{8(\pi T_c)^2}} \Delta(\vec{r}, t).$$

Скалярный и векторный потенциалы φ и \vec{A} появляются в этом уравнении из соображений градиентной инвариантности.

З а д а ч а

Определить скорость релаксации в сверхпроводнике с парамагнитными примесями.

Р е ш е н и е.

Предположим, что сверхпроводник находится в поле случайно расположенных неподвижных примесей со спином S . Будем также считать, что потенциал взаимодействия с примесными центрами имеет δ -образный характер, так что соответствующий гамильтониан имеет вид

$$\hat{W} = \frac{1}{V} \sum_k \hat{a}_{\vec{p}, \alpha}^+ \hat{a}_{\vec{p}', \beta} \left\{ v \delta_{\alpha, \beta} + J \vec{\sigma}_{\alpha, \beta} \vec{S}_k \right\} \exp(-i(\vec{p} - \vec{p}') \vec{r}_k), \quad (79)$$

где \vec{r}_k – координата примесного центра с номером k , J – обменное взаимодействие, \vec{S}_k – оператор спина примеси.

Наша задача состоит в том, чтобы усреднить произведения электронных функций Грина, входящих в уравнение (72), по случайному расположению атомов примеси.

В результате усреднения энергия квазичастиц приобретает конечную мнимую часть, так что запаздывающая и опережающая функция Грина определяется следующим образом [1]:

$$\bar{G}_{\omega}^{R,A}(p) = \frac{1}{\omega - \xi_p \pm i/(2\tau)}, \quad \frac{1}{\tau} = n_{\text{пр}} 2\pi\nu_0 (v^2 + J^2 S(S+1)). \quad (80)$$

Здесь $n_{\text{пр}}$ – число примесных центров в единице объёма, $\nu_0 = mp_0/(2\pi^2\hbar^3)$ – плотность электронных состояний, соответствующих уровню Ферми, величина обратного времени релаксации вычислена в борновском приближении.

Усреднение произведения двух запаздывающих или двух опережающих функций Грина даёт произведение средних.

При усреднении произведения запаздывающей и опережающей функций Грина возникает дополнительный множитель $\Gamma_{\alpha,\beta}$, существенно зависящий от спиновых индексов. В нашем случае

$$\overline{G_{\alpha,\alpha'}^R(\omega_1, p) G_{\beta,\beta'}^A(\omega_2, p) i\sigma_{\alpha',\beta'}^y} = \bar{G}^R(\omega_1, p) \bar{G}^A(\omega_2, p) \Gamma_{\alpha,\beta}.$$

Матрица $\Gamma_{\alpha,\beta}$ удовлетворяет лестничному уравнению, изображённому на рис. 5:

$$\Gamma_{\alpha,\beta} = \Gamma_{\alpha,\beta}^0 + n_{\text{пр}} U_{\alpha,\alpha'} U_{\beta,\beta'} W(\omega_1, \omega_2) \Gamma_{\alpha',\beta'}, \quad (81)$$

где введены обозначения: $\Gamma_{\alpha,\beta}^0 = i\sigma_{\alpha,\beta}^y$, $U_{\alpha,\beta} = v\delta_{\alpha,\beta} + J\hat{\sigma}_{\alpha,\beta}^n \hat{S}^n$,

$$W(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{V\hbar} \sum_{\vec{p}} \bar{G}_{\vec{p},\omega_1}^R \bar{G}_{\vec{p},\omega_2}^A = \nu_0 \hbar \frac{2\pi i}{(\omega_1 - \omega_2 + i/\tau)}.$$

Важно заметить, что в силу предположения о случайном расположении примесных центров операторы спина примеси входят в уравнение (81) симметричным образом. С учётом этого

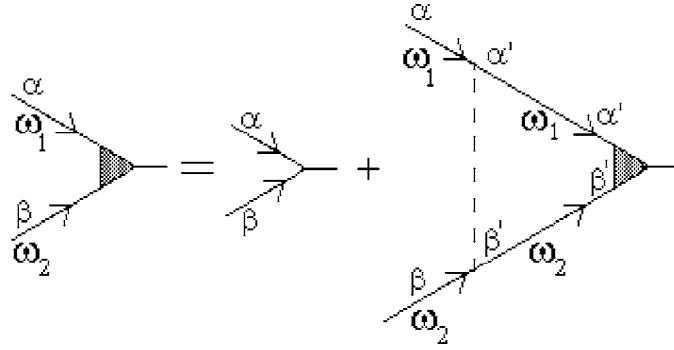


Рис. 5. Графическое изображение лестничного уравнения для угловой вершинной части $\Gamma_{\alpha\beta}$

обстоятельства решение уравнения (81) следует искать в виде произведения спинового и скалярного множителя: $\Gamma_{\alpha,\beta} = i\sigma_{\alpha,\beta}^y \Gamma$. В результате непосредственной подстановки получим

$$U_{\alpha,\alpha'} U_{\beta,\beta'} \sigma_{\alpha',\beta'}^y = U_{\alpha,\alpha'} \sigma_{\alpha',\beta'}^y U_{\beta',\beta}^T = U_{\alpha,\alpha'} U_{\alpha',\beta'}^{(-)} \sigma_{\beta',\beta}^y,$$

где $U_{\alpha',\beta'}^{(-)} = v\delta_{\alpha',\beta'} - J\hat{\sigma}_{\alpha',\beta'}^n \hat{S}^n$.

Далее производим перемножение матриц U $U^{(-)}$ с учётом симметрии в расположении операторов спина: $U_{\alpha,\alpha'} U_{\alpha',\beta'}^{(-)} =$

$$= v^2 \delta_{\alpha,\beta'} - \frac{1}{2} J^2 (\sigma^m \sigma^n)_{\alpha,\beta'} \{ \hat{S}^m, \hat{S}^n \} = (v^2 - J^2 S(S+1)) \delta_{\alpha,\beta'}.$$

В результате находим

$$\Gamma = \frac{(\omega_1 - \omega_2 + i/\tau)}{(\omega_1 - \omega_2 + i/\tau_s)}, \quad (82)$$

где $1/\tau_s = n_{\text{пр}} 4\pi\nu_0 J^2 S(S+1)$ – время релаксации с переворотом спина.

Таким образом, после усреднения "по примесям" мы снова получаем уравнение (74), но с заменой $i\delta$ на i/τ_s :

$$\Delta_\Omega = \frac{g\nu_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega_1 + \omega_2 - \Omega) d\omega_1 d\omega_2 \Delta_\Omega \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\frac{1}{(\omega_1 - \omega_2 + i/\tau_s)} \left(1 - \operatorname{th} \frac{\hbar\omega_2}{2T} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1 + i/\tau_s)} \left(1 - \operatorname{th} \frac{\hbar\omega_1}{2T} \right) \right]. \end{aligned} \quad (83)$$

Этот результат принадлежит Л.П. Горькову и Г.М. Элиашбергу [9].

После интегрирования δ -функции уже нетрудно произвести разложение по параметру Ω/T и выделить слагаемое, пропорциональное Ω :

$$g\nu_0\Delta_\Omega \frac{-i\Omega}{4T\tau_s} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2 + (1/\tau_s)^2} \left(\operatorname{ch} \frac{\hbar\omega}{2T} \right)^{-2}. \quad (84)$$

Вычисление интеграла связано с возможностью разложения гиперболической функции на простые дроби, после чего каждое слагаемое интегрируется, а сумма выражается через вторую производную логарифма Γ -функции:

$$\frac{1}{\tau_s} \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega^2 + (1/\tau_s)^2} \left(\operatorname{ch} \frac{\hbar\omega}{4T} \right)^{-2} = \frac{1}{\pi} \psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{\hbar}{4\pi T\tau_s} \right). \quad (85)$$

Таким образом, можно утверждать, что в уравнении Гинзбурга–Ландау существует релаксационное слагаемое с коэффициентом $R(s)$, который обратно пропорционален температуре и зависит от безразмерной величины $s = T\tau_s/\hbar$:

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar R(s)}{4T} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{2ie\tilde{\varphi}}{\hbar} \right) \Delta(\vec{r}, t) = \frac{(T_c - T)}{T_c} \Delta(\vec{r}, t) + \\ & + C \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} - \frac{2ie\vec{A}}{\hbar c} \right)^2 \Delta(\vec{r}, t) - B \Delta(\vec{r}, t) |\Delta(\vec{r}, t)|^2, \end{aligned} \quad (86)$$

где величины B и C зависят от параметров $T\tau/\hbar$ и $T\tau_s/\hbar$,

$$R(s) = \frac{1}{\pi} \psi' \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4s} \right), \quad s = \frac{T\tau_s}{\hbar}. \quad (87)$$

В предельном случае $T\tau_s \gg \hbar$ имеем результат (77) для чистого сверхпроводника. С возрастанием скорости релаксации с переворотом спина $1/\tau_s$ функция $R(s)$ быстро убывает. Одновременно происходит уменьшение температуры сверхпроводящего перехода (T_c) до тех пор, пока T_c не обратится в нуль. В этом пределе $T\tau_s/\hbar \ll 1$, $R(s) \approx 4T\tau_s/\hbar$, так что время релаксации параметра порядка Δ по порядку величины совпадает с временем переворота электронного спина [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрикосов А.А., Горьков Л.П., Дзялошинский И.Е.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. – М.: Добросвет, 1998. – 513 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Физическая кинетика – М.: Физматлит, 2001. – 494 с.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика. Ч. 2. – М.: Физматлит, 2001. – 494 с.
4. *Pippard A.V.* // Proc. Roy. Soc. 1953. **A 216**, 547.
5. *Korringa J.* // Physica. 1950. **16**, 601.
6. *Hebel L.C., Schlichter C.P.* // Phys. Rev. 1957. **107**, 901.
7. *Hebel L.C.* // Phys. Rev. 1959. **116**, 79.
8. *Гейликман Б.Т.* // ЖЭТФ. 1958. **34**, 1042.
9. *Горьков Л.П., Элиашберг Г.М.* // ЖЭТФ. 1968. **54**, 612.