Министерство образования Российской Федерации

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра теоретической физики

УТВЕРЖДАЮ В ПЕЧАТЬ
Проректор по учебной работе
___________ Ю. А. Самарский
"____"______________ 2003 год

Релятивистский формализм углового момента и прецессия Томаса

Учебно-методическое пособие

Заведующий кафедрой теоретической физики — Ю. М. Белоусов

Составители: Н.А. Воронов, С.А. Вагнер

МОСКВА 2003

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра теоретической физики

Релятивистский формализм углового момента и прецессия Томаса

Учебно-методическое пособие

МОСКВА 2003

Составители: Н.А. Воронов, С.А. Вагнер
УДК 530.145

Рецензент
академик РАН Л.Б. Окунь

Релятивистский формализм углового момента и прецессия Томаса:
Учебно-методическое пособие/ Сост. Н.А. Воронов, С.А. Вагнер. – М.: МФТИ, 2003. – 25 с.

В пособии рассмотрено релятивистское обобщение понятия углового момента, а также тетрадный формализм. На основе уравнения движения спина описывается прецессия Томаса.

Пособие предназначено для студентов, изучающих курс “Теория поля”, и аспирантов, специальность которых связана с указанными вопросами теории относительности.

УДК 530.145

1. Тензор энергии-импульса

Основой теоретического описания многих наблюдаемых характеристик физических систем является её тензор энергии-импульса. В последующих разделах мы воспользуемся этим понятием для произвольной системы. Введение этой величины начнём с некоторых предварительных наводящих соображений. Рассмотрим систему точечных частиц с зарядами e_n ($n = 1, 2\dots$ – номер частицы в системе), массой m_n, их положение в пространстве описывается вектором $\vec{r}_n(t)$. При движении частиц происходит перенос в пространстве величин, характеризующих их, т. е. заряда, массы и импульса; при этом процесс переноса не может быть произвольным, он должен удовлетворять соответствующему закону сохранения. Найдём эти уравнения. Начнём с переноса заряда. Плотность заряда и его ток определим следующим образом:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_n e_n \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)), \tag{1.1}$$

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_n e_n \frac{d\vec{r}_n(t)}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)), \tag{1.2}$$

где $\delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t))$ – трёхмерная дельта-функция Дирака. Вывод выражений (1.1) и (1.2) приведён в Приложении I, там же показано, что совокупность четырёх величин $j_0 = \rho$ и $\vec{j}$ образуют четырёхмерный вектор с компонентами

$$j^i = \sum_n e_n \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)), \tag{1.3}$$

где, как обычно, $i = 0, 1, 2, 3$ и $x^i = (t, \vec{r})$.

Вычислим далее $\mathrm{div}\vec{j} = \dfrac{\partial j^\alpha}{\partial x^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, 3\ )$:

$$\mathrm{div}\vec{j}(\vec{r}, t) = \sum_n e_n \frac{dx_n^\alpha(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) =$$

$$= -\sum_n e_n \frac{x_n^\alpha(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) =$$

$$= -\sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t). \tag{1.4}$$

Возвращаясь к четырёхмерной форме, результат вычислений (1.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0. \tag{1.5}$$

Это и есть искомый закон сохранения тока, которому удовлетворяет процесс переноса заряда. Очевидно, что выражение (1.5) лоренц-инвариантно.

Перейдём теперь к рассмотрению вопроса о переносе системой точечных частиц четырёхмерного импульса p_n^i. По аналогии с формулами (1.1) и (1.2) можно определить для данной системы, так сказать, “плотность заряда” четырёхмерного импульса T^{0i} и вектор тока для него $T^{\alpha i}$:

$$T^{0i}(\vec{r}, t) = \sum_n p_n^i(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)), \tag{1.6}$$

$$T^{\alpha i}(\vec{r}, t) = \sum_n p_n^i(t) \frac{dx_n^\alpha(t)}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)), \tag{1.7}$$

которые можно объединить в одно выражение (аналогичное уравнению (1.3) для переноса заряда):

$$T^{ij} = \sum_n p_n^i(t) \frac{dx_n^j(t)}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)). \tag{1.8}$$

Поскольку

$$p_n^i = E_n \frac{dx_n^i(t)}{dt}, \tag{1.9}$$

то формулу (1.8) можно переписать в виде

$$T^{ij} = \sum_n \frac{p_n^i(t) p_n^j(t)}{E_n} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)), \tag{1.10}$$

откуда следует симметрия функций T^{ij}. Используя методы Приложения I, можно показать, что T^{ij} является четырёхмерным тензором второго ранга.

Для того чтобы получить закон сохранения для тензора энергии-импульса T^{ij}, вычислим производную $\dfrac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha}$ (используя приёмы, аналогичные тем, которые мы применяли при выводе формулы (1.4)):

$$\frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = -\sum_n p_n^i(t) \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} T^{i0} + \sum_n \frac{dp_n^i(t)}{dt} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)).$$

Это уравнение можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = f^i, \tag{1.11}$$

где

$$f^i = \sum_n \frac{dp_n^i(t)}{dt}\delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t))$$

есть плотность силы, действующей на частицы системы, поскольку, по определению, $\frac{dp_n^i(t)}{d\tau}$ – четырёхмерная сила, действующая на n-ю частицу (τ – собственное время частицы). Если рассматриваемая нами система является изолированной и частицы, входящие в неё, не взаимодействуют друг с другом, то эта сила равна нулю и тензор-энергии импульса (1.10) будет сохраняться, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x^k}T^{ik} = 0. \tag{1.12}$$

Пусть система частиц по-прежнему остаётся изолированной, но частицы, входящие в неё, начинают взаимодействовать друг с другом. Для определённости рассмотрим систему точечных заряженных частиц (см. уравнения (1.1) – (1.3)). В этом случае

$$\frac{dp_n^i(t)}{dt} = e_n F^{ik}(x)\frac{dx_n^k(t)}{dt}, \tag{1.13}$$

причём тензор электромагнитного поля F_{ik} можно найти при помощи уравнений Максвелла:

$$\varepsilon^{ijkl}\frac{\partial}{\partial x^j}F_{kl} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^i}F^{ik} = -j^k \cdot 4\pi, \tag{1.14}$$

где j^i задаётся выражением (1.3) (см. [2, § 8, гл. 2]; предполагается, что наличие самодействия в (1.13) и кулоновских особенностей в F_{ik} несущественно для дальнейшего). Для данной системы тензор (1.10) уже не сохраняется

$$\frac{\partial}{\partial x^k}T^{ik} = F^{il}j_l, \tag{1.15}$$

однако можно построить новый сохраняющийся тензор, добавив к выражению (1.10) чисто электромагнитную часть, которая имеет вид

$$T_F^{ik} = F^i_{.l} F^k l - \frac{1}{4}\eta^{ik} F_{mn} F^{mn}. \tag{1.16}$$

Используя уравнения Максвелла (1.14), можно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T_F^{ik} = -F^{il} j_l$$

и, таким образом, сохраняется величина

$$T^{ij} = \sum_n \frac{p_n^i(t) p_n^j(t)}{E_n} \delta(\vec{r} - \vec{r}_n(t)) + T_F^{ik}, \tag{1.17}$$

т. е. она снова удовлетворяет уравнению сохранения (1.12).

Поместим, наконец, рассматриваемую нами систему во внешнее электромагнитное поле. В этом случае суммарный тензор энергии-импульса частиц и внутреннего электромагнитного поля перестаёт сохраняться, вместо него получается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = \mathcal{F}^i, \tag{1.18}$$

которое совпадает по виду с формулой (1.11), но в правой части которой стоит $\mathcal{F}^i$ – плотность внешней силы. Закон сохранения тензора T^{ik} в виде (1.18) и будет использоваться нами в дальнейшем.

Систему взаимодействующих частиц во внешнем поле можно расширить, включив в неё как внешнее электромагнитное поле, так и источники этого поля. Полученная новая система является изолированной, поэтому для неё будет сохраняться и суммарный тензор энергии-импульса всех включенных в эту систему полей.

2. Вектор спина

Тензор энергии-импульса (1.17), введённый в предыдущем разделе, можно использовать для определения момента импульса и спина (внутреннего момента) соответствующей материальной системы. Рассмотрим прежде всего изолированную систему, для которой тензор-энергии импульса T^{ik} сохраняется:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} T^{ik} = 0.$$

Образуем с помощью этого тензора следующее выражение:

$$M^{ijk} = x^i T^{jk} - x^j T^{ik}. \tag{2.1}$$

Из-за симметричности тензора T^{ik} функции M^{ijk} сохраняется:

$$\frac{\partial}{\partial x^k} M^{ijk} = T^{ji} - T^{ij} = 0. \tag{2.2}$$

Проинтегрируем уравнение (2.2) по всему пространству. Тогда

$$\int dV \frac{\partial}{\partial x^\alpha} M^{ij\alpha} = 0,$$

поскольку на пространственной бесконечности поля системы отсутствуют. В результате мы получаем

$$\frac{d}{dt} \int dV M^{ij0} = 0. \tag{2.3}$$

Сохраняющаяся величина $\int dV M^{ij0}$ называется моментом импульса:

$$S^{ij} = \int dV (x^i T^{j0} - x^j T^{i0}), \quad S^{ij} = -S^{ji}. \tag{2.4}$$

Для системы невзаимодействующих точечных частиц с тензором энергии-импульса (1.10) выражение (2.4) принимает вид

$$S^{ij} = \sum_n (x_n^i(t) p_n^j(t) - x_n^j(t) p_n^i(t)). \tag{2.5}$$

Момент импульса является тензором относительно однородных координатных преобразований. При трансляциях $x'^i = x^i + a^i$, где a^i – постоянные, он ведёт себя следующим образом:

$$S'^{ij} = S^{ij} + a^i P^j - a^j P^i, \tag{2.6}$$

где $P^i = \int dV T^{0i}$ – полный импульс системы. Можно избавиться от координатной неоднозначности (2.6), если ввести функции

$$S^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijkl} U_j S_{kl}, \quad U^j = \frac{P^j}{|P|}. \tag{2.7}$$

При преобразованиях трансляции величины (2.7) не меняются, поэтому S^i является четырёхмерным вектором, который не зависит от выбора начала системы координат и характеризует внутренние свойства материальной системы. В связи с этим его обычно называют вектором спина (вектором внутреннего момента) системы.

Перейдём к описанию поведения вектора спина для системы, движущейся во внешнем поле. Сделаем ряд упрощающих предположений относительно рассматриваемой системы. Будем считать, что параметры системы, характеризующие её (например, размеры системы, её масса, заряд и т. д.), малы по сравнению с соответствующими параметрами внешнего поля и источников его генерирующих. В этом случае мы можем пренебречь влиянием нашей системы на источники внешнего поля и само поле, так что рассматриваемая нами система будет двигаться во внешнем поле, которое не зависит от её состояния. Такие малые системы называют пробными частицами. В дальнейшем и мы будем называть нашу систему пробной частицей.

Движение пробной частицы в пространстве-времени описывается тонкой трубкой, внутри которой отличен от нуля тензор энергии-импульса T^{ik}, и размеры которой R малы по сравнению с характерной длиной, на которой меняется внешнее поле. Выберем внутри этой трубки некоторую линию L, при помощи которой можно будет представлять движение частицы в пространстве (например, в качестве L можно выбрать линию, по которой движется центр масс системы и т.д.); координаты линии обозначим $X^i(t)$, $X^0 = t$. Мы используем далее неопределённость в выборе L при проведении вычислений.

3. Прецессия Томаса

В этом разделе мы выведем уравнения, описывающие поведение вектора спина пробной частицы во внешнем поле. Рассмотрим выражение $x^i T^{jk}$, где T^{jk} – тензор энергии-импульса пробной частицы. Из уравнения (1.18) следует, что

$$(x^i T^{jk})_{,k} = T^{ji} + x^i \mathcal{F}^j, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{F}^j$ – плотность внешней силы, действующей на частицу. Проинтегрируем равенство (3.1) по всему пространству, в результате получим

$$\frac{d}{dt}\int dV x^i T^{j0} = -\frac{dX^i}{dt}P^j + \int dV T^{ij} + \int dV \delta x^i \mathcal{F}^j, \tag{3.2}$$

где $\delta x^i = x^i - X^i(t)$ и $P^j = \int dV T^{j0}$ – полный импульс системы.

Заметим, что вектор P^i удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}P^i = \int dV \delta \mathfrak{F}^i$$

– полной внешней силе, действующей на частицу; это равенство можно получить, проинтегрировав уравнение (1.18) по пространству.

Введём спин-тензор S^{ij} частицы относительно линии L согласно выражению

$$S^{ij} = \int dV(\delta x^i T^{0j} - \delta x^j T^{i0}), \tag{3.3}$$

которое аналогично (2.4). Тогда из равенства (3.2) следует, что

$$\frac{d}{dt}S^{ij} = \frac{dX^j}{dt}P^i - \frac{dX^i}{dt}P^j + \int dV(\delta x^i \mathfrak{F}^j - \delta x^j \mathfrak{F}^i). \tag{3.4}$$

Предположим, что момент внешних сил

$$\int dV(\delta x^i \mathfrak{F}^j - \delta x^j \mathfrak{F}^i) = 0,$$

так что уравнение (3.4) приобретает вид (Френкель Я.И., 1926 г.):

$$\frac{d}{dt}S^{ij} = \frac{dX^j}{dt}P^i - \frac{dX^i}{dt}P^j. \tag{3.5}$$

Свойство момента импульса (2.6) и неопределённость в выборе линии $X^i(t)$ позволяют нам наложить на спин-тензор (3.3) дополнительное условие, которое необходимо для однозначного определения S^{ij}. Потребуем, чтобы спин-тензор (3.3) удовлетворял условию

$$S^{ik}P_k = 0. \tag{3.6}$$

С помощью этого равенства мы можем обратить формулу (2.7) для вектора спина и выразить спин-тензор через вектор спина: умножив уравнение (2.7) на $\varepsilon_{imnf}U^f$ и используя условие (3.6), мы имеем

$$S^{mn} = \varepsilon^{mnkl} U_k S_l. \tag{3.7}$$

Получим теперь уравнение, которое описывает поведение вектора спина во внешнем поле. Для этого продифференцируем равенство (2.7) по времени:

$$\frac{dS^i}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}\frac{dU_j}{dt}S^{kl} + \frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}U_j\frac{dS_{kl}}{dt}. \tag{3.8}$$

Подставляя в это выражение уравнение (3.5), мы видим, что второе слагаемое в (3.8) равно нулю. Оставшееся первое слагаемое преобразуем с помощью равенства (3.7). Результат вычисления выглядит следующим образом:

$$\frac{dS^i}{dt} = -U^i\frac{dU_k}{dt}S_k.$$

Чтобы придать этой формуле явный ковариантный вид, перейдём от дифференцирования по t к дифференцированию по инвариантному времени s вдоль линии L, имея

$$\frac{dS^i}{ds} = -U^i\frac{dU_k}{ds}S_k \tag{3.9}$$

или, в эквивалентной форме,

$$(\eta_{ij} - U_i U_j)\frac{dS^j}{ds} = 0.$$

Это уравнение называют переносом Ферми.

Перенос Ферми обладает следующими свойствами:

1.

$$\frac{d(S^iS_i)}{ds} = 0 \tag{3.10}$$

– при переносе сохраняется норма вектора. Чтобы доказать это утверждение, умножим уравнение (3.9) на S_i и используем определение (2.7) вектора спина S^i, из которого следует

$$S^iU_i = 0. \tag{3.11}$$

Это и приводит к указанному нам свойству (3.10).

2.

$$\frac{d(S^iU_i)}{ds} = 0 \tag{3.12}$$

– перенос Ферми сохраняет ортогональность векторов S^i и U^k. Мы получим свойство (3.12), если умножим уравнение (3.9) на U_i и учтём, что вектор U^k является времениподобным и единичным.

Из равенств (3.11) и (3.12) следует, что вектор спина будет трёхмерным пространственным вектором в системе покоя пробной частицы. Поскольку в этой системе его трёхмерная длина остаётся неизменной согласно свойству (3.10), то это означает, что трёхмерный вектор в ней прецессирует. Для того чтобы найти частоту этой прецессии, построим в каждой точке траектории частицы (т. е. на линии L) четырёхмерный сопровождающий репер $\lambda^i_{(a)}$ (определение репера и все необходимые для дальнейшего чтения его свойства приведены в Приложении II). Определение "сопровождающий" означает, что репер (или наблюдатель, с которым мы отождествляем этот репер) движется с той же скоростью, что и частица. Для этого необходимо, чтобы $\lambda^i_{(0)} = U^i$. Разложим вектор S^i по векторам $\lambda^i_{(a)}$:

$$S^i = S^{(a)}\lambda^i_{(a)}. \tag{3.13}$$

Так как мы выбрали репер сопровождающим и вектор S^i удовлетворяет равенству (3.13), то $S^{(0)}=0$ в формуле (3.13). Подставим теперь разложение (3.13) в уравнение (3.9) и умножим результат на $\lambda_i^{(b)}$:

$$\frac{dS^{(b)}}{ds} = -\lambda_i^{(b)} S^{(a)} \frac{d\lambda^i_{(a)}}{ds} - \lambda_i^{(b)} U^i \frac{dU^j}{ds} \lambda_{j(a)} S^{(a)}. \tag{3.14}$$

В силу условия ортогональности векторов в репере второе слагаемое в правой части уравнения (3.14) при $b = 1,2,3$ отсутствует. Пусть $b=0$, тогда

$$\frac{dS^{(0)}}{ds} = -U_i S^{(\alpha)} \frac{d\lambda^i_{(\alpha)}}{ds} - \frac{dU^j}{ds} \lambda_{j(\alpha)} S^{(\alpha)} =$$

$$= -\frac{d(U_i \lambda^i_{(\alpha)})}{ds} S^{(\alpha)} = 0,$$

т. е. уравнение выполняется тождественно (напоминаем, что $S^{(0)} \equiv 0$). Таким образом, для компонент вектора спина в сопровождающем репере мы имеем уравнение

$$\frac{dS^{(\beta)}}{ds} = -\lambda_i^{(\beta)} \frac{d\lambda^i_{(\alpha)}}{ds} S^{(\alpha)}. \tag{3.15}$$

Сопровождающий репер определён с точностью до произвольного пространственного вращения. Для того чтобы исключить эту неопределённость, потребуем, чтобы после преобразования Лоренца со скоростью $v^\alpha = P^\alpha/P^0$ в новой системе координат сопровождающий репер имел бы те же компоненты $\lambda^{l'}_{(a)} = \delta^{i'}_a$, что и лабораторный репер с компонентами $(\lambda^l)^i_{(a)} = \delta^i_a$ в лабораторной системе координат. Такой репер построен в Приложении II, окончательное выражение для компонент этого репера приведено в формулах (ПII.11) и (ПII.14). Также в Приложении II разъяснено, что представляет из себя преобразование

Лоренца, если скорость новой системы координат непараллельна одной из осей лабораторной системы.

Подставляя соответствующее выражение в уравнение (3.15), получим для лабораторного времени

$$\frac{dS^{(\beta)}}{dt} = -\Omega^{(\beta)}_{(\alpha)} S^{(\alpha)},$$

где

$$\Omega^{(\beta)}_{(\alpha)} = \lambda^{(\beta)}_i \frac{d\lambda^i_{(\alpha)}}{dt} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} - 1\right) \frac{v^\alpha \dot{v}^\beta - v^\beta \dot{v}^\alpha}{v^2}. \tag{3.16}$$

Таким образом, вектор спина в лоренцевом репере (ПІІ.14) прецессирует с частотой (3.16). Компоненты вектора S^i в лабораторной системе можно найти с помощью (3.13).

В заключение обсудим связь формулы (3.16) для скорости прецессии спина с другими методами введения прецессии Томаса. Для начала заметим, что

$$\lambda^{(\alpha)}_i d\lambda^i_{(\beta)} = -\lambda^i_{(\beta)} d\lambda^{(\alpha)}_i$$

из-за ортонормируемости векторов в репере. Мы имеем

$$\Omega^{(\alpha)}_{(\beta)} dt = \lambda^{(\alpha)}_i d\lambda^i_{(\beta)} = -\lambda^i_{(\beta)} d\lambda^{(\alpha)}_i =$$

$$= -\lambda^i_{(\beta)}(t) \left[\lambda^{(\alpha)}_i(t+dt) - \lambda^{(\alpha)}_i(t)\right]. \tag{3.17}$$

Поскольку согласно (ПІІ.14)

$$\lambda^i_{(\beta)}(t) = L^i_\beta(-\vec{v}) \quad \text{и} \quad \lambda^{(\alpha)}_i(t+dt) = L^\alpha_i(\vec{v}+d\vec{v}),$$

где $L^i_j(\vec{v})$ – матрица координатных преобразований Лоренца, то уравнение (3.17) можно переписать в виде

$$\Omega^{(\beta)}_{(\alpha)} dt = \delta^\beta_\alpha - L^i_\alpha(-\vec{v}) L^\beta_i(\vec{v}+d\vec{v}). \tag{3.18}$$

Последнее соотношение и используется в основном при рассмотрении прецессии Томаса. Однако эти методы имеют несколько формальный и феноменологический характер в отличие от способа, изложенного в данном разделе, при котором уравнение движения спина получается из закона сохранения для тензора энергии-импульса.

Приложения

Приложение I

В этом приложении мы вычислим формулы (1.1) и (1.2) и докажем релятивистскую ковариантность выражения для тока (1.3). Для начала рассмотрим вопрос, как построить в пространстве Минковского (или в любом n-мерном плоском пространстве) вектор. Для этого в некоторой фиксированной системе координат необходимо выбрать четыре произвольных величины, пронумеровать их и назвать соответствующими компонентами вектора. В других системах координат компоненты вектора определяются согласно векторному закону преобразования

$$A'^i(x') = \Lambda^i_k A^k(x), \tag{П.1}$$

где

$$x'^i = \Lambda^i_k x^k. \tag{П.2}$$

Таким образом, мы будем знать компоненты выбранного нами вектора в произвольной системе координат.

Перейдём к формулам (1.1) и (1.2). Для упрощения изложения получим выражения (1.1) и (1.2) для равномерно движущегося заряда. Предположим, что заряд движется вдоль оси x в положительном направлении. Перейдём в систему покоя заряда, и пусть заряд находится в начале координат этой системы, тогда

$$\rho'(\vec{r}') = e\delta(\vec{r}'), \tag{П.3}$$

$$\vec{j}'(\vec{r}') = 0. \tag{П.4}$$

Вернёмся в лабораторную систему координат. Согласно формуле (ПI.1) мы будем иметь

$$\rho(\vec{r}) = j_0(\vec{r}) = \gamma\rho'(\vec{r}') = \gamma e\delta\left(\gamma(x-vt)\right)\delta(y)\delta(z), \tag{ПI.5}$$
$$j_x(\vec{r}) = \gamma v\rho'(\vec{r}') = \gamma ve\delta\left(\gamma(x-vt)\right)\delta(y)\delta(z), \tag{ПI.6}$$
$$j_y(\vec{r}) = j'_{y'}(\vec{r}') = 0, \tag{ПI.7}$$
$$j_z(\vec{r}) = j'_{z'}(\vec{r}') = 0, \tag{ПI.8}$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$. Используя свойство δ-функции:

$$\delta(\alpha x) = \frac{1}{\alpha}\delta(x)$$

для постоянной α, преобразуем уравнения (ПI.5) – (ПI.8):

$$j_0(\vec{r}) = e\delta(x-vt)\delta(y)\delta(z) \tag{ПI.9}$$
$$j_x(\vec{r}) = ve\delta(x-vt)\delta(y)\delta(z) \tag{ПI.10}$$
$$j_y(\vec{r}) = 0 \tag{ПI.11}$$
$$j_z(\vec{r}) = 0 \tag{ПI.12}$$

которые совпадают с формулами (1.1) и (1.2), если мы учтём, что уравнение движения заряда в лабораторной системе координат есть $x = vt, y = 0, z = 0$.

Если в момент времени t начало координат системы покоя заряда находилось в точке $x = x_0, y = 0, z = 0$, то x в правой части выражений (ПI.9) – (ПI.12) заменится на $x - x_0$:

$$j_0(\vec{r}) = e\delta(x-x_0-vt)\delta(y)\delta(z), \tag{ПI.13}$$
$$j_x(\vec{r}) = ve\delta(x-x_0-vt)\delta(y)\delta(z), \tag{ПI.14}$$
$$j_y(\vec{r}) = 0, \tag{ПI.15}$$
$$j_z(\vec{r}) = 0, \tag{ПI.16}$$

что можно получить, применяя векторный закон преобразования (П.1) при сдвиге координат в лабораторной системе:

$$x \to x + x_0.$$

Мы продемонстрировали релятивистскую ковариантность выражения (1.3) для одной равномерно движущейся частицы. Можно показать (см., например, [2, § 6, гл. 2]), что это верно и для нескольких произвольно движущихся частиц.

Приложение II

Рассмотрим в пространстве Минковского четыре взаимно ортогональных единичных вектора $\lambda^i_{(a)}$, где $i = 0, 1, 2, 3$ – номер компоненты вектора, а $a = 0, 1, 2, 3$ – номер самого вектора. Из этой четвёрки один вектор обязательно времениподобен, т. е. его длина равна $+1$, а три остальные – пространственноподобные, их длины равны -1. Все сказанное выше о векторах $\lambda^i_{(a)}$ можно записать в компактной форме следующим образом:

$$\eta_{ij}\lambda^i_{(a)}\lambda^j_{(b)} = \eta_{(ab)}, \tag{ПII.1}$$

где η_{ij} – метрический тензор пространства Минковского, $\eta_{(ab)}$ – числовая скалярная матрица, совпадающая с метрикой пространства Минковского, записанной в декартовой системе координат:

$$\eta_{(ab)} = \mathrm{diag}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}. \tag{ПII.2}$$

Приведём простой пример

$$\left.\begin{aligned}\lambda^i_{(0)} &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ \lambda^i_{(1)} &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\\ \lambda^i_{(2)} &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ \lambda^i_{(3)} &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}. \tag{ПII.3}$$

Векторы, приведённые в (ПІІ.3), линейно независимы и удовлетворяют уравнению (ПІІ.1). Совокупность четырёх векторов, для которых выполняется равенство (ПІІ.1), называют репером или тетрадой. Естественно, название "тетрада" применимо только для четырёхмерного пространства. Введём для матрицы $\eta_{(ab)}$ обратную $\eta^{(ab)}$ согласно уравнению

$$\eta_{(ab)}\eta^{(bc)} = \delta_a^c, \qquad \text{(ПІІ.4)}$$

где δ_b^a – обычный символ Кронекера. Очевидно, что

$$\eta^{(ab)} = \operatorname{diag}\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Умножим выражение (ПІІ.1) на $\eta^{(bc)}$ и просуммируем по (b). В результате это равенство приобретёт вид

$$\eta_{ij}\lambda^i_{(a)}\lambda^{(c)j} = \delta_a^c, \qquad \text{(ПІІ.5)}$$

где мы ввели обозначение $\lambda^{(c)j} = \eta^{(bc)}\lambda^j_{(b)}$. Ясно, что

$$\lambda^i_{(a)} = \eta_{(ab)}\lambda^{(b)i}$$

в соответствии с определением $\lambda^{(b)i}$ и равенством (ПІІ.4). Таким образом, поднимание и опускание реперных индексов осуществляется матрицами $\eta^{(ab)}$ и $\eta_{(ab)}$. Умножим теперь уравнение (ПІІ.5) на вектор $\lambda^{(a)k}$ и просуммируем по (a). Тогда

$$\left(\eta_{ij}\lambda^i_{(a)}\lambda^{(a)k}\right)\lambda^{(c)j} = \lambda^{(c)k}.$$

Отсюда следует, что

$$\eta_{ij}\lambda^i_{(a)}\lambda^{(a)k} = \delta_j^k. \qquad \text{(ПІІ.6)}$$

Поскольку в пространстве Минковского любая система из четырёх линейно независимых векторов является полной, то полной будет и любой репер. Следовательно, произвольный вектор S^i может быть разложен по реперным векторам:

$$S^i = S^{(a)}\lambda^i_{(a)}. \qquad \text{(ПІІ.7)}$$

Если умножить это равенство скалярно на $\eta_{ij}\lambda^{j(b)}$, то, используя уравнение (ПІІ.5), получим

$$S^{(b)} = S^i\lambda^{j(b)}\eta_{ij}. \qquad \text{(ПІІ.8)}$$

Рассмотрим теперь другой репер $\mu^j_{(b)}$, отличный от репера $\lambda^i_{(a)}$. Каждый вектор, входящий в тетраду $\mu^j_{(b)}$, совершенно аналогично предыдущему может быть разложен по реперу $\lambda^i_{(a)}$. Результат этого действия может быть записан в следующем виде:

$$\mu^j_{(b)} = \Lambda^{(a)}_{(b)}\lambda^i_{(a)}, \qquad \text{(ПІІ.9)}$$

где $\Lambda^{(a)}_{(b)}$ – некоторые скалярные функции. Для $\Lambda^{(a)}_{(b)}$ можно получить формулу, которая является обобщением выражения (ПІІ.8):

$$\Lambda^{(b)}_{(a)} = \eta_{ij}\mu^i_{(a)}\lambda^{j(b)} \qquad \text{(ПІІ.10)}$$

Вычислим функции $\Lambda^{(b)}_{(a)}$, связывающие реперы $\lambda^i_{(a)}$ и $\mu^j_{(b)}$ для двух конкретных тетрад. В качестве первого мы выберем репер (ПІІ.3), который имеет компоненты $\lambda^i_{(a)} = \delta^i_a$ в данной системе координат. Этот репер называют лабораторным, поскольку он, очевидным образом, покоится относительно начала выбранной системы координат и не вращается относительно её пространственных осей. Репер $\mu^j_{(b)}$ определим следующим образом: он покоится относительно системы координат, получающейся преобразованием Лоренца со скоростью $\vec{v}$ из выбранной, и не вращается относительно пространственных осей этой новой системы координат. Этих свойств вполне достаточно для определения функций $\Lambda^{(a)}_{(b)}$ и, следовательно, репера $\mu^j_{(b)}$. В самом деле, данные свойства означают, что репер $\mu^j_{(b)}$ в новой системе координат может иметь вид $\mu^{i'}_{(b)} = \delta^{i'}_b$. Репер $\lambda^i_{(a)}$ в той же системе определится согласно векторному преобразования (ПI.1):

$$\lambda^{i'}_{(a)} = \frac{\partial x'^{i'}}{\partial x^i}\lambda^i_{(a)} = L^{i'}_i(\vec{v})\lambda^i_{(a)}.$$

Матрица преобразования Лоренца $L^{i'}_i(\vec{v})$ хорошо известна и её элементы имеет вид (см., например, [4, § 10, гл. 1]):

$$L^0_0 = \gamma, \quad L^0_\alpha = L^\alpha_0 = -\gamma v^\alpha, \quad L^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + (\gamma - 1)\frac{v^\alpha v^\beta}{v^2}, \quad \text{(ПIII.11)}$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$.

Так как функции (ПIII.10) являются скалярами, то мы можем их вычислить в любой системе координат, в том числе движущейся, в которой уже были известны компоненты векторов сопровождающего репера, а теперь установлены компоненты векторов лабораторного репера. Таким образом, можно получить

$$L^{(c)}_{(a)} = \eta_{(a)j'}\eta^{(c)j}L^{j'}_j$$

или, разделяя пространственные и временные компоненты,

$$\left.\begin{array}{ll} L^{(0)}_{(0)} = L^0_0; & L^{(0)}_{(\alpha)} = -L^\alpha_0; \\ L^{(\alpha)}_{(0)} = -L^0_\alpha; & L^{(\alpha)}_{(\beta)} = L^\beta_\alpha; \end{array}\right\}. \quad \text{(ПIII.12)}$$

С учётом (ПIII.11) эти соотношения можно записать и в виде

$$L^{(i)}_{(j)} = L^i_j(-\vec{v}). \quad \text{(ПIII.13)}$$

Таким образом, сопровождающий репер, который можно также назвать лоренцевым, имеет согласно (ПII.9) и (ПII.13) следующие компоненты:

$$\mu^i_{(a)} = L^i_a(-\vec{v}). \qquad \text{(ПII.14)}$$

В заключение отметим, что ряд свойств преобразования Лоренца позволяют интерпретировать его как не содержащее пространственных вращений и, соответственно, сопровождающий лоренцев репер как невращающийся. Именно, можно показать (см., например, [5, § 2.4] и [6, § 7]), что каждое преобразование L, которое представляет матрица (ПII.11), может быть разложено в произведение $L = g^{-1}L_0g$, где g есть элемент группы пространственных вращений, которые так поворачивают исходную систему координат, чтобы скорость движущейся относительно неё системы координат оказалась направлена вдоль одной из осей повёрнутой системы, а L_0 соответствует обычному преобразованию Лоренца, когда указанная скорость уже направлена вдоль оси исходной системы. При этом g^{-1} описывает поворот осей движущейся системы так, чтобы в ней компоненты скорости лабораторной системы стали равны $-v^\alpha$. На основе этого преобразование Лоренца L позволяет частично распространить понятие отношения ориентации двух взаимно неподвижных пространственных объектов и на те из них, которые совершают относительное движение. Можно проверить, что каждое обычное преобразование Лоренца со скоростью $v = \operatorname{th}\alpha$ разлагается в произведение

$$L_0(\alpha) = \prod_s L_0(\delta\alpha_s), \qquad \sum_s \delta\alpha_s = \alpha.$$

При этом $\delta\alpha_s$ могут быть сделаны сколь угодно малыми, так что с заданной точностью при каждом из преобразований $L_0(\delta\alpha_s)$

отношение ориентации осей разных систем координат, параллельных скорости, оказывается то же, что и между неподвижными осями. Другой способ отождествления ориентации таких осей сводится к отождествлению их пространственных проекций в одной из систем координат независимо от величины относительной скорости. Отношение ориентации осей, перпендикулярных скорости, очевидно, вообще не зависит от скорости. Нетрудно видеть, что в силу равенства

$$L(\alpha_1 + \alpha_2) \equiv g^{-1} L_0(\alpha_1 + \alpha_2) g = \\ = g^{-1} L_0(\alpha_1) g g^{-1} L_0(\alpha_2) g \equiv L(\alpha_1) L(\alpha_2)$$

преобразование Лоренца с произвольной взаимной ориентаций скорости и осей исходной системы координат допускает аналогичное разложение в произведение преобразований с достаточно малыми скоростями. Следовательно, с помощью преобразования Лоренца можно произвести расширение отношения пространственной ориентации и на некоторые пространственно-подобные направления, которые не обязаны быть одновременно наблюдаемы как чисто пространственные. Однако это расширение ограничено, поскольку зависит от направления относительной скорости. В результате, если имеются три системы координат A, B и C с произвольной ориентацией взаимных скоростей, то указанное сопоставление ориентаций в последовательности A $\to$ B $\to$ C $\to$ A в общем случае не приведёт к исходному направлению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика: Учеб. пособие. В 10 т. Т. II. Теория поля. — 7-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 521 с.
2. *Вейнберг С.* Гравитация и космология. — М.: Мир, 1975. — 696 с.
3. *Синг Дж.* Общая теория относительности. — М.: ИЛ, 1963. — 432 с.
4. *Фок В.А.* Теория пространства, времени и тяготения. — М.: ГИТТЛ, 1955. — 504 с.
5. *Мёллер К.* Теория относительности. — М.: Атомиздат, 1975. — 400 с.
6. *Наймарк М.А.* Линейные представления группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958. — 376 с.
7. *Лайтман А., Пресс В., Прайс Р., Тюкольски С.* Сборник задач по теории относительности и гравитации. — М.: Мир, 1979. — 536 с.
8. *Логунов А.А.* Лекции по теории относительности. — М.: Наука, 2002. — 176 с.
9. *Хриплович И.Б.* Общая теория относительности. — Ижевск: РХД, 2001. — 120 с.
10. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965. — 704 с.
11. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Современная электродинамика, ч. 1. Микроскопическая теория: Учеб. пособие. — Москва-Ижевск: Инст. комп. иссл., 2003. — 736 с.
12. *Papapetrou A.* Spin motion in relativity//Proc. R. Soc. London. — 1951. — V. 209, N.3. — P. 249-262.
13. *Померанский А.А., Сеньков Р.А., Хриплович И.Б.* Релятивистские частицы с внутренним моментом во внешних полях//УФН — 2000. — Т.170, вып. 10. — С. 1129–1141.
14. *Воронов Н.А.* Прецессия спина в гравитационном поле//ЖЭТФ — 1988. — Т. 94, вып. 12. С. 1-14.