ЛЕКЦИЯ IV

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Содержание

В данной лекции рассматриваются кинетические уравнения в частном случае, когда при рассеянии происходит малая передача импульса или энергии. В этих случаях интеграл столкновений приобретает вид полной производной по импульсу или энергии. Доказательство этого утверждения проводится для слабонеидеального ферми-газа. Основная идея рассмотрения заимствована из классической работы Л.Д. Ландау [1], относящейся к системе частиц, взаимодействующих по закону Кулона. При этом уравнения Фоккера–Планка возникают как непосредственное следствие кинетических уравнений, записанных в дифференциальной форме с коэффициентами, выражающимися через транспортное сечение рассеивающихся частиц.

§ 1. Случай малой передачи импульса

Пусть $f(p_i)$ – функция распределения в импульсном пространстве ($i = x, y, z$). Предположим, что изменение импульса Δ_i при столкновении мало по сравнению с начальными импульсами сталкивающихся частиц $\Delta_i \ll p_i$. Пусть далее dW – вероятность (в единицу) времени столкновения частицы с импульсом p_i с частицей с импульсом $p_i^{'}$, причём p_i переходит в $p_i + \Delta_i$, а $p_i^{'}$ в $p_i^{'} + \Delta_i^{'}$. В силу закона сохранения импульса $\Delta_i = -\Delta_i^{'}$. Однако эту подстановку мы сделаем только в конечном результате.

Запишем вероятность dW как функцию от полусуммы импульсов в конечном и начальном состояниях $\vec{p}+\vec{\Delta}/2$ и $\vec{p}^{\,\prime}+\vec{\Delta}^{\prime}/2$, а также от их разностей $\vec{\Delta}/2$ и $\vec{\Delta}^{\prime}/2$. Тогда вероятность прямого перехода есть

$$dW\left(\vec{p}+\frac{\vec{\Delta}}{2}, \vec{p}^{\,\prime}+\frac{\vec{\Delta}^{\prime}}{2}, \Delta, \Delta^{'}\right) = w\left(\vec{p}+\frac{\vec{\Delta}}{2}, \vec{p}^{\,\prime}+\frac{\vec{\Delta}^{\prime}}{2}, \Delta, \Delta^{'}\right) d\vec{p}^{\,\prime} d\tau_{\Delta}, \tag{1a}$$

а вероятность обратного:

$$dW\left(\vec{p}+\frac{\vec{\Delta}}{2}, \vec{p}^{\,\prime}+\frac{\vec{\Delta}^{\prime}}{2}, -\vec{\Delta}, -\vec{\Delta}^{\prime}\right) = \\ = w\left(\vec{p}+\frac{\vec{\Delta}}{2}, \vec{p}^{\,\prime}+\frac{\vec{\Delta}^{\prime}}{2}, -\vec{\Delta}, -\vec{\Delta}^{\prime}\right) d\vec{p}^{\,\prime} d\tau_{\Delta}. \tag{1b}$$

Здесь и ниже $d = \tau_{\Delta}$ – произведение дифференциалов, определяющих столкновение, $d\vec{p}^{\,\prime} = dp_x^{'} dp_y^{'} dp_z^{'}/(2\pi\hbar)^3$.

Согласно принципу детального равновесия квантово-механические вероятности прямого и обратного переходов равны. В соответствии с этим, приравняв (1a) и (1b), находим, что функция $dW\left(\vec{s}, \vec{s}^{\,\prime}, \vec{\Delta}, \vec{\Delta}^{\prime}\right)$ есть чётная функция от Δ_i и $\Delta_i^{'}$.

Число частиц с импульсом p_i изменяется благодаря столкновениям за единицу времени:

$$-\int d\vec{p}^{\,\prime} d\tau_{\Delta} w\left(\vec{p}+\frac{\vec{\Delta}}{2}, \vec{p}^{\,\prime}+\frac{\vec{\Delta}^{\prime}}{2}, \Delta, \Delta^{'}\right) \times$$

$$\times \left\{ f(\vec{p}) f(\vec{p}^{\,\prime}) - f(\vec{p} + \vec{\Delta}) f(\vec{p}^{\,\prime} + \vec{\Delta}^{\prime}) \right\}. \qquad (2)$$

Выражение (2) есть интеграл парных столкновений Больцмана.

В силу малости передаваемого импульса подынтегральное выражение может быть разложено по степеням Δ_i и Δ'_i для всех таких аргументов, где передаваемые импульсы стоят рядом с начальными импульсами p_i и p'_i.

Члены нулевого порядка сокращаются. Члены первого порядка имеют следующий вид:

$$\int d\vec{p}^{\,\prime} d\tau_\Delta w\left(\vec{p}, \vec{p}^{\,\prime}, \Delta, \Delta^{\prime}\right) \left\{ f(\vec{p}^{\,\prime}) \Delta_k \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_k} + f(\vec{p}) \Delta_k^{\prime} \frac{\partial f(\vec{p}^{\,\prime})}{\partial p_k^{\prime}} \right\}. \qquad (3)$$

Под интегралом находится произведение чётной функции w на первую степень передаваемых импульсов. По этой причине интегрирование по параметрам τ_Δ даёт нуль.

Для нахождения всех членов второго порядка выделим сначала слагаемые, которые содержат первые производные по $p_i^{\prime}$ от функции w, которые затем следует проинтегрировать по частям:

$$\frac{1}{2} \int d\vec{p}^{\,\prime} d\tau_\Delta \Delta_k^{\prime} \frac{\partial w\left(\vec{p}, \vec{p}^{\,\prime}, \Delta, \Delta^{\prime}\right)}{\partial p_k{}^{\prime}} \left\{ f(\vec{p}) \Delta_i^{\prime} \frac{\partial f(\vec{p}^{\,\prime})}{\partial p_i^{\prime}} + f(\vec{p}^{\,\prime}) \Delta_i \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_i} \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} \int d\vec{p}^{\,\prime} d\tau_\Delta \Delta_k^{\prime} w\left(\vec{p}, \vec{p}^{\,\prime}, \Delta, \Delta^{\prime}\right) \left\{ f(\vec{p}) \Delta_i^{\prime} \frac{\partial^2 f(\vec{p}^{\,\prime})}{\partial p_i^{\prime} \partial p_k^{\prime}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(\vec{p}^{\,\prime})}{\partial p_k^{\prime}} \Delta_i \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_i} \right\}. \qquad (4)$$

Остальные коэффициенты вычисляются непосредственным разложением в ряд. Так, коэффициент при первой производной от плотности вероятности w по первому аргументу имеет вид

$$\frac{1}{2} \int d\vec{p}^{\,\prime} d\tau_\Delta \Delta_k \frac{\partial w\left(\vec{p}, \vec{p}^{\,\prime}, \Delta, \Delta^{\prime}\right)}{\partial p_k} \left\{ f(\vec{p}) \Delta_i^{\prime} \frac{\partial f(\vec{p}^{\,\prime})}{\partial p_i^{\prime}} + f(\vec{p}^{\,\prime}) \Delta_i \frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_i} \right\}. \qquad (5)$$

Кроме этих слагаемых, имеются члены со вторыми производными:

$$\frac{1}{2}\int d\vec{p}\,' d\tau_\Delta \Delta_k^{'}\Delta_i^{'} w\left(\vec{p},\vec{p}\,',\Delta,\Delta^{'}\right) f(\vec{p})\frac{\partial^2 f(\vec{p}\,')}{\partial p_i^{'}\partial p_k^{'}} +$$

$$+\frac{1}{2}\int d\vec{p}\,' d\tau_\Delta \Delta_k\Delta_i w\left(\vec{p},\vec{p}\,',\Delta,\Delta^{'}\right) f(\vec{p}\,')\frac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial p_i\partial p_k}, \qquad (6)$$

а также слагаемые с произведениями первых производных:

$$-\int d\vec{p}\,' d\tau_\Delta \Delta_k\Delta_i^{'} w\left(\vec{p},\vec{p}\,',\Delta,\Delta^{'}\right) \frac{\partial f(\vec{p}\,')}{\partial p_i^{'}}\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_k}. \qquad (7)$$

Можно видеть, что интеграл столкновений выражается в виде дивергенции $\partial j_i/\partial p_i$ в импульсном пространстве от вектора j_i потока в импульсном пространстве, взятого со знаком минус:

$$j_i = \frac{1}{2}\int d\vec{p}\,' d\tau_\Delta \Delta_k\Delta_i^{'} w\left(\vec{p},\vec{p}\,',\Delta,\Delta^{'}\right)\left\{f(\vec{p}\,')\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_k} -\right.$$

$$\left. - f(\vec{p})\frac{\partial f(\vec{p}\,')}{\partial p_k^{'}}\right\}. \qquad (8)$$

В этом выражении следует положить $\Delta_i^{'} = -\Delta_i$, поэтому окончательное выражение для потока имеет следующий вид:

$$j_i(\vec{p}) = \int d\vec{p}\,'\left\{\left[n(\vec{p})\frac{\partial f(\vec{p}\,')}{\partial p_k^{'}} -\right.\right.$$

$$\left.\left. - f(\vec{p}\,')\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_k}\right]\int \frac{\Delta_i\Delta_k}{2} w(\vec{p},\vec{p}\,',\Delta,\Delta^{'})d\tau_\Delta\right\}. \qquad (9)$$

Само кинетическое уравнение приобретает следующую форму:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = -\operatorname{div}_{\vec{p}}\vec{j},$$

где $\vec{F} = -\partial H/\partial\vec{r}$ – обобщённая сила, действующая на частицу.

§ 2. Интеграл столкновений в форме Ландау

Таким образом, выражение для потока в импульсном пространстве приобретает вид [1]: $j_i(\vec{p}) =$

$$= \int d\vec{p}' \left\{ \left[n(\vec{p}) \frac{\partial n(\vec{p}')}{\partial p_k'} - n(\vec{p}') \frac{\partial n(\vec{p})}{\partial p_k} \right] \int \frac{\Delta_i \Delta_k}{2} w(\vec{p}, \vec{p}', \Delta, \Delta') d\tau_\Delta \right\}. \tag{10}$$

В силу уравнения траектории величина передаваемого импульса связана со значением силы взаимодействия между частицами:

$$\Delta_k = - \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{\partial V(\vec{R}(t) - \vec{R}_1(t))}{\partial R_k}. \tag{11}$$

Здесь и ниже мы используем приближение, соответствующее малой передаче импульса. Величина $\vec{\Delta}$ пропорциональна действующей силе, так что величины, стоящие в интеграле столкновений (в первом приближении), можно вычислить в предположении о прямолинейном движении сталкивающихся частиц. В соответствии с этим разность координат налетающей и рассеивающейся частицы выражается через постоянный вектор $\vec{b}$, по модулю равный прицельному параметру, а также вектору $\vec{g} = (\vec{p}_1 - \vec{p})/m$ – их относительной скорости:

$$\Delta \vec{R} = \vec{R}(t) - \vec{R}_1(t) \approx \vec{b} + \vec{g}t. \tag{12}$$

В этом же приближении плотность вероятности столкновения есть произведение относительной скорости $|\vec{g}| = g$ на кольцевой элемент, соответствующий прицельному расстоянию b:

$$\int d\tau_\Delta w\left(\vec{p}, \vec{p}', \Delta, \Delta'\right) \approx 2\pi b db g. \tag{13}$$

Два последних соотношения позволяют выразить весь интеграл столкновений через произведение компонент Фурье парного потенциала:

$$\varphi_{\vec{q}} = \int V(\vec{r}) e^{-i\vec{q}\vec{r}} d\vec{r}, \quad \text{или} \quad V(\vec{r}) = \int \varphi_{\vec{q}} e^{i\vec{q}\vec{r}} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}. \tag{14}$$

Таким образом, передаваемый импульс выражается только через компоненты Фурье: $\Delta_k =$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial V(\vec{r})}{\partial r_k}\Big|_{\vec{r}=\Delta\vec{R}(t)}\, dt = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \int q_k \varphi_{\vec{q}} e^{i\vec{q}(\vec{b}+\vec{g}t)} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3}.$$

Аналогичным образом:

$$L_{k,m} = \frac{1}{2}\int d\tau_\Delta \Delta_k \Delta'_m w\left(\vec{p}, \vec{p}^{\,\prime}, \Delta, \Delta'\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\infty} bdb \int\limits_0^{2\pi} gd\psi \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_2\, \times$$

$$\times \int q_k \varphi_{\vec{q}} e^{i\vec{q}(\vec{b}+\vec{g}t_1))} \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} \int n_m \varphi_{\vec{n}} e^{i\vec{n}(\vec{b}+\vec{g}t_2))} \frac{d\vec{n}}{(2\pi)^3}. \qquad (15)$$

Поскольку векторы $\vec{b}$ и $\vec{g}$ взаимно перпендикулярны, то можно ввести цилиндрические координаты $(|b|, \Psi, gt_1)$, для вектора $\vec{r}_1 = \vec{b} + \vec{g}t_1$, так что

$$\int\limits_0^{\infty} bdb \int\limits_0^{2\pi} gd\psi \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt_1 = \int d\vec{r}_1.$$

Производя соответствующую перегруппировку в экспонентах

$$\vec{q}(\vec{b}+\vec{g}t_1) + \vec{n}(\vec{b}+\vec{g}t_2) = (\vec{q}+\vec{n})(\vec{b}+\vec{g}t_1) + \vec{n}\vec{g}(t_2-t_1) =$$

$$= (\vec{q}+\vec{n})(\vec{r}_1) + \vec{n}\vec{g}(t_2-t_1),$$

переходим к интегрированию по параметру $\tau = t_2 - t_1$:

$$L_{k,m} = \frac{1}{2}\int\int d\vec{r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\tau \int\int q_k n_m \varphi_{\vec{q}} e^{i(\vec{q}+\vec{n})\vec{r}} \frac{d\vec{q}d\vec{n}}{(2\pi)^6} \varphi_{\vec{n}} e^{i(\vec{n}\vec{g})\tau}. \quad (16)$$

В результате интегрирования по переменным $\vec{r}$ и τ получаем интеграл по двумерной области, которая перпендикулярна вектору относительной скорости сталкивающихся частиц:

$$L_{k,m} = -\frac{1}{2}\int q_k q_m \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2}\varphi_{\vec{q}}\varphi_{-\vec{q}}\delta(\vec{q}\vec{g}). \tag{17}$$

Важно заметить, что правая часть полученного выражения является поперечной по отношению к вектору g_k, а единственная отличная от нуля поперечная компонента легко вычисляется, если предположить, что произведение компонент Фурье от потенциала зависит только от модуля передаваемого вектора $\vec{q}$:

$$L_{x,x} = L_{y,y} = -\frac{\pi}{g}\int_0^\infty \frac{q^3 dq}{8\pi^2}\varphi_q^2, \quad L_{zz} = 0. \tag{18}$$

Таким образом, сумма диагональных матричных элементов (скалярная величина, не зависящая от ориентации системы координат) есть

$$L_{xx} + L_{yy} = -\frac{1}{g}\int_0^\infty \frac{q^3 dq}{4\pi}\varphi_q^2.$$

Учитывая условие симметрии $L_{ik} = L_{k,i}$ и условие поперечности $L_{i,k}g_k = 0$ или $g_i L_{i,k} = 0$, находим общее выражение для $L_{i,k}$:

$$L_{i,k}^{\alpha,\beta} = -\frac{g^2\delta_{i,k} - g_i g_k}{g^3}\int_0^\infty \frac{q^3 dq}{8\pi}\left(\varphi_q^{\alpha,\beta}\right)^2, \quad \text{где} \quad g_k = v_k - v_k'. \tag{19}$$

Интеграл столкновений, равный $-\operatorname{div}\Big|_p \vec{j}$, где вектор потока $\vec{j}$ записан в форме (10), а компоненты тензора $L_{i,k}^{\alpha,\beta}$ выражены через потенциал, создающий малое возмущение траектории рассеивающейся частицы, называется интегралом столкновений Ландау.

Здесь и ниже индексы α и β обозначают сорта взаимодействующих частиц. Для заряженных частиц:

$$\varphi_q^{\alpha,\beta} = \frac{4\pi q_\alpha q_\beta}{q^2}, \tag{20}$$

так что записанный в таком виде коэффициент $L_{i,k}$ логарифмически расходится как на верхнем, так и на нижнем пределе.

Расходимость на верхнем пределе связана с неприменимостью полученного выражения при больших передаваемых импульсах $q_{\max} \approx \mu|v_{rel}|$, где μ – приведённая масса, $v_{rel} = |\vec{v} - \vec{v}^{'}|$.

Расходимость на нижнем пределе связана с дальнодействующим характером кулоновского взаимодействия. Поскольку фактически оно оказывается заэкранированным на некотором радиусе R, то с помощью принципа неопределённости минимальный передаваемый импульс можно оценить как $\hbar/R$.

Эти оценки необходимо видоизменить для быстрых частиц. В квазиклассическом пределе, когда $|q_1 q_2| \gg \hbar v_{rel}$, большая передача импульса происходит на таких импульсах, когда кинетическая энергия относительного движения становится порядка потенциальной энергии, взятой на расстояниях порядка радиуса экранирования. Отсюда находим минимальный переданный импульс $q \approx |q_1 q_2|/R v_{rel}$ как произведение силы $\sim |q_1 q_2|/R^2$ на время пролёта $\sim R/v_{rel}$.

Таким образом, в квазиклассическом пределе $|q_\alpha q_\beta| \gg \hbar v_{rel}$ с логарифмической точностью имеем: $L_{i,k}^{\alpha,\beta} =$

$$= -\frac{g^2\delta_{i,k} - g_i g_k}{g^3} q_\alpha^2 q_\beta^2 2\pi \ln\left(\frac{R\mu v_{rel}^2}{|q_\alpha||q_\beta|}\right), \quad v_{rel} = g = |\vec{v} - \vec{v}^{'}|. \tag{21a}$$

В обратном пределе, когда $|q_\alpha q_\beta| \ll \hbar v_{rel}$, с логарифмической точностью имеем

$$L_{i,k}^{\alpha,\beta} = -\frac{g^2\delta_{i,k} - g_i g_k}{g^3} q_\alpha^2 q_\beta^2 2\pi \ln\left(\frac{R\mu v_{rel}}{\hbar}\right), \quad g_k = v_k - v_k^{'}. \tag{21b}$$

Соответствующее кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{r}} + q_\alpha\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[vB]\right)\frac{\partial f_\alpha}{\partial \vec{p}} = -\mathrm{div}_{\vec{p}}\vec{s}^{(\alpha)}, \tag{21c}$$

где

$$s_k^{(\alpha)} = \sum_\beta \int \left(f_\alpha \frac{\partial f_\beta^{'}}{\partial p_k^{'}} - f_\beta^{'}\frac{\partial f_\alpha}{\partial p_k}\right) L_{i,k}^{(\alpha,\beta)} \frac{d\vec{p}^{'}}{(2\pi\hbar)^3}. \tag{22}$$

Фигурирующий здесь знак суммы обозначает суммирование по всем сортам частиц, с которыми взаимодействуют частицы данного сорта α.

В общем случае произвольного закона парного взаимодействия величина $L_{i,k}$ по-прежнему выражается в виде поперечного тензора:

$$L_{i,k} = \frac{1}{2} B \left(\delta_{ik} - \frac{g_i g_k}{g^2} \right),$$

где $\vec{g} = \vec{v} - \vec{v}'$, а скалярная величина $B = L_{ss}$ выражается через дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$:

$$B = \frac{1}{2} \int \Delta^2 |\vec{v} - \vec{v}'| d\sigma. \tag{23}$$

Поскольку в системе центра инерции абсолютное значение относительного импульса μg не меняется, то квадрат передаваемого импульса выражается через угол рассеяния χ:
$\Delta^2 = 2\mu^2 g^2 (1 - \cos\chi)$. Поэтому

$$B = \mu^2 |\vec{v} - \vec{v}'|^3 \int (1 - \cos\chi)\, d\sigma = \mu^2 |\vec{v} - \vec{v}'|^3 \sigma_t, \tag{24}$$

где μ – приведённая масса, σ_t – транспортное сечение рассеяния:

$$\sigma_t = \int (1 - \cos\chi)\, d\sigma \approx \frac{1}{2} \int \chi^2 d\sigma.$$

Задача № 1. Кинетические коэффициенты в τ-приближении

Определить температурную зависимость кинетических коэффициентов в τ-приближении [2].

Р е ш е н и е.

Заметим, что в кинетическое уравнение (10) входит транспортное сечение рассеяния, которое определяем с помощью интегрирования дифференциального сечения рассеяния на малые углы. Используя известную формулу Резерфорда, напишем

$$\sigma_t \approx \int \frac{4(ee')^2(1-\cos\chi)d\Omega}{\mu^2 g^4 \chi^4} \approx \int \frac{4\pi(ee')^2 d\chi}{\mu^2 g^4 \chi} = \frac{4\pi(ee')^2}{\mu^2 g^4} L, \quad (25)$$

где e, e' – заряды сталкивающихся частиц, $L = \int d\chi/\chi$ – соответствующий логарифмический интеграл.

Учитывая, что при заданной температуре средняя тепловая скорость электронов значительно превышает скорость ионов, обнаруживаем, что частота электрон-электронных столкновений имеет тот же порядок, что и для электрон-ионных столкновений:

$$\begin{gathered}\nu_{ee} = \frac{1}{\tau_{ee}} = n_e \sigma_{ee} \sim \frac{4\pi e^4 n_e L_e}{\mu^2 |\vec{v}_e|^3} \approx \frac{16\pi e^4 n_e L_e}{m_e^2 |\vec{v}_e|^3}, \\ \nu_{ei} = \frac{1}{\tau_{ei}} = n_e \sigma_{ei} \sim \frac{4\pi z^2 e^4 n_e L_e}{\mu^2 |\vec{v}_e|^3} \approx \frac{4\pi z^2 e^4 n_e L_e}{m_e^2 |\vec{v}_e|^3}. \quad (26)\end{gathered}$$

В силу условия электронейтральности ($n_e \approx n_i$, $z \sim 1$) эти выражения совпадают.

Частота ион-ионных столкновений записывается аналогично:

$$\nu_{ii} = \frac{1}{\tau_{ii}} = n_i \sigma_{ii} \sim \frac{16\pi z^4 e^4 n_i L_i}{M^2 |\vec{v}_i|^3}. \quad (27)$$

Проводимость определяется в основном электрон-ионным временем передачи импульса от электронов к ионам (26). В соответствии с этим при заданном постоянном и однородном внешнем электрическом поле $\vec{e}$ можно записать выражение для первой поправки к электронной функции распределения:

$$f^{(1)} = -\frac{\tau_{ei} e}{m} \left(\vec{e} \frac{\partial f_e^{(0)}(\vec{v})}{\partial \vec{v}} \right) = \tau_{ei} e \left(\vec{e}\vec{v} \right) \frac{f_e^{(0)}}{T}, \quad (28)$$

где $f_e^{(0)}$ – равновесная максвелловская функция распределения.

Далее запишем выражение для плотности электрического тока:

$$\vec{j} = e\int \vec{v} f^{(1)}(\vec{v}) d\vec{v} = \frac{e^2\vec{e}}{3T}\int \tau_{ei} v^2 f_e^{(0)} d\vec{v}. \tag{29}$$

Отсюда, с учётом скоростной зависимости электрон-ионного времени релаксации (26), находим температурную зависимость проводимости:

$$\sigma = \frac{e^2}{3T}\int \tau_{ei} v^2 f_e^{(0)} d\vec{v} \sim \frac{T_e^{3/2}}{e^2 L_e \sqrt{m}}. \tag{30}$$

При наличии градиента температуры первая поправка обусловлена наличием координатной зависимости температуры $T(\vec{r})$, входящей в определение локально-равновесной функции распределения:

$$f^{(1)} = -\tau_{ei}\left(\vec{v}\frac{\partial f_e^{(0)}}{\partial \vec{r}}\right), \quad \text{где} \quad f_e^{(0)} = \frac{P}{T}\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right).$$

Здесь плотность выражена через давление, которое следует считать не зависящим от координат, в то время как вся координатная зависимость определяется через температуру:

$$f^{(1)} = -\frac{\tau_{ei}}{T}\left(\nabla T\vec{v}\right)\left(-\frac{5}{2} + \frac{mv^2}{2T}\right) f_e^{(0)}. \tag{31}$$

Эта поправка определяет средний тепловой поток:

$$\vec{Q} = \int \vec{v}\frac{mv^2}{2T} f^{(1)}(\vec{v}) d\vec{v} = -\int \vec{v}\frac{mv^2\tau_{ei}}{2T^2}\left(\nabla T\vec{v}\right)\left(-\frac{5}{2} + \frac{mv^2}{2T}\right) f_e^{(0)}.$$

Отсюда находим коэффициент теплопроводности:

$$\kappa = \frac{1}{3}\int \vec{v}^2 \frac{mv^2\tau_{ei}}{2T^2}\left(-\frac{5}{2} + \frac{mv^2}{2T}\right) f_e^{(0)} \sim \frac{T_e^{5/2}}{e^4 L_e \sqrt{m}}. \tag{32}$$

Отношение $\kappa/\sigma \sim T/e^2$, так что оказывается справедливым аналог закона Видемана–Франца.

В противоположность электро- и теплопроводности вязкость плазмы связана в основном с движением ионов. Дело в том, что тензор плотности потока импульса выражается через количество импульса, направленного вдоль градиента скорости, а при заданной температуре $< p_i^2 > / < p_e^2 >\sim M/m$. Кроме того, импульс иона мало меняется при столкновении с электронами; по этой причине достаточно рассмотреть ион-ионные столкновения.

Вычисления в τ-приближении производятся так же, как и для идеального газа (см. лекцию I). Выражение для коэффициента вязкости имеет следующий вид:

$$\eta = \frac{M^2}{T}\int \tau_{ii} f_i^{(0)} v_x^2 v_y^2 d\vec{v} \sim \frac{T^{5/2}\sqrt{M}}{e^4 L_i}. \tag{33}$$

При этом отношение коэффициента вязкости к коэффициенту теплопроводности $\eta/\kappa \sim \sqrt{Mm}$.

З а д а ч а № 2. Скорость остывания горячих электронов

Определить скорость передачи энергии между электронами и ионами.

Р е ш е н и е.

Предположим, что электронная и ионная компоненты имеют равновесные функции распределения, каждое из которых обладает собственной температурой T_e и T_i $(T_e > T_i)$. При наличии разности температур возникает передача энергии от электронной компоненты к ионной.

Изменение энергии ионов (в единицу времени и в единице объёма) выражается только через ион-электронный интеграл столкновений:

$$\frac{dE_i}{dt} = \int \epsilon_i St(f_i) d\vec{p} = -\int \epsilon_i \mathrm{div}_{\vec{p}} \vec{j} d\vec{p}.$$

В результате интегрирования по частям

$$\frac{dE_i}{dt} = \int \vec{j} \frac{\partial \epsilon_i}{\partial \vec{p}} d\vec{p} = \int \left(\vec{j}_{ie}\vec{v}\right) d\vec{p}. \tag{34}$$

Здесь $\vec{j}_{ie}$ – выражение для потока (22), куда в качестве функций распределения подставлены максвелловские функции распределения с соответствующими температурами T_i и T_e:

$$j_k^{(i)} = \int f_i f_e' \left\{ \frac{v_s}{T_i} - \frac{v_s'}{T_e} \right\} L_{k,s}^{(i,e)} d\vec{p}' . \qquad (35)$$

Здесь и ниже переменные со штрихом относятся к электронам, а переменные без штриха относятся и ионам.

В силу условия $L_{k,s}^{(i,e)}(v_s - v_s') = 0$ скорость передачи энергии (34) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{dE_i}{dt} = \left\{ \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_e} \right\} \int f_i f_e' v_k v_s L_{k,s}^{(i,e)} d\vec{p}' d\vec{p}. \qquad (36)$$

В силу малости массы электронов в аргументе $L_{k,s}^{(i,e)}(\vec{v}_e' - \vec{v}_i)$ можно пренебречь скоростью ионов $\vec{v}_i$ по сравнению со скоростями электронов $\vec{v}_e'$. После этого величины $L_{k,s}^{(i,e)}$ уже не будут зависеть от скорости ионов, так что в (36) можно произвести интегрирование по $d\vec{p}$:

$$\int f_i v_k v_s d\vec{p} = \frac{1}{3} \delta_{ks} \frac{N_i}{V} < v^2 > = \ \delta_{k,s} \frac{T_i N_i}{MV},$$

где N_i/V – плотность ионов.

Таким образом,

$$\frac{dE_i}{dt} = \frac{T_i N_i}{MV} \left\{ \frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_e} \right\} \int f_e' L_{ss}^{(i,e)} d\vec{p}' . \qquad (37)$$

Подставляя сюда $L_{ss}^{(i,e)} = 4\pi e^4 z^2 L / v_e'$, где z – заряд ионов, получим

$$\frac{dE_i}{dt} = -\frac{dE_e}{dt} = \frac{4 N_e N_i z^2 e^4 \sqrt{2\pi m} L_e}{M V^2 T_e^{3/2}} (T_e - T_i). \qquad (38a)$$

Выразим энергию электронов E_e, отнесённую к единице объёма, через их температуру $E_e = 3 N_e T_e / 2V$, после чего находим скорость изменения электронной температуры:

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{(T_e - T_i)}{\tau_{ei}^{\epsilon}} = -\frac{8 N_i z^2 e^4 \sqrt{2\pi m} L_e}{3 M V T_e^{3/2}} (T_e - T_i). \qquad (38b)$$

Здесь величина τ_{ei}^{ϵ} представляет собой время релаксации для установления электрон-ионного равновесия. Оно значительно превышает время релаксации для установления локального теплового равновесия ионной системы, которое в свою очередь превышает время релаксации для установления локального теплового равновесия электронной системы:

$$\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei}^{\epsilon} \sim 1 : \sqrt{\frac{M}{m}} : \frac{M}{m}. \tag{39}$$

§ 3. H-теорема для интеграла столкновений Ландау

Определим неравновесную плотность энтропии и вычислим её производную:

$$s(t) = -\int n(\vec{p},t)\ln\left(\frac{f(\vec{p},t)}{e}\right)d\vec{p},$$

$$\frac{\partial s(t)}{\partial t} = -\int \ln f(\vec{p},t)\frac{\partial f(\vec{p},t)}{\partial t}d\vec{p}. \tag{40}$$

Для того чтобы установить характер изменения энтропии, выразим производную по времени через дивергенцию потока:

$$\frac{\partial s(t)}{\partial t} = \int \ln f(\vec{p},t)\frac{\partial j_k(\vec{p},t)}{\partial p_k}d\vec{p}. \tag{41}$$

Запишем правую часть этого уравнения через интеграл столкновений в форме (10):

$$\frac{\partial s(t)}{\partial t} = \int \ln f(\vec{p},t)\frac{\partial}{\partial p_i}\int d\vec{p}' \left\{\left[f(\vec{p})\frac{\partial f(\vec{p}')}{\partial p_k'} - f(\vec{p}')\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_k}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\int \frac{\Delta_i\Delta_k}{2}w(\vec{p},\vec{p}',\Delta,\Delta')d\tau_{\Delta}\right\}d\vec{p}. \tag{42}$$

Производя замену переменных $\vec{p} \leftrightarrow \vec{p}'$ и используя симметрию плотности вероятности $w(\vec{p},\vec{p}',\Delta,\Delta')$ относительно этой замены, можно записать правую часть в виде полусуммы двух слагаемых:

$$\frac{\partial s(t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int \ln f(\vec{p},t)\frac{\partial}{\partial p_i}\int d\vec{p}^{\,\prime}\left\{\left[f(\vec{p})\frac{\partial f(\vec{p}^{\,\prime})}{\partial p_k^{\prime}} - f(\vec{p}^{\,\prime})\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_k}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\int\frac{\Delta_i\Delta_k}{2}w(\vec{p},\vec{p}^{\,\prime},\Delta,\Delta^{\prime})d\tau_\Delta\right\}\frac{d\vec{p}}{(2\pi\hbar)^3} +$$
$$+\frac{1}{2}\int \ln f(\vec{p}^{\,\prime},t)\frac{\partial}{\partial p_i^{\prime}}\int d\vec{p}\left\{\left[f(\vec{p}^{\,\prime})\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_k} - f(\vec{p})\frac{\partial f(\vec{p}^{\,\prime})}{\partial p_k^{\prime}}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\int\frac{\Delta_i\Delta_k}{2}w(\vec{p},\vec{p}^{\,\prime},\Delta,\Delta^{\prime})d\tau_\Delta\right\}d\vec{p}^{\,\prime}. \qquad (43)$$

Выражение в квадратных скобках антисимметрично относительно замены $\vec{p}\leftrightarrow\vec{p}^{\,\prime}$, так что после интегрирования по частям правая часть уравнения (43) преобразуется к следующему виду:

$$-\frac{1}{2}\int\left[\frac{\partial \ln f(\vec{p})}{\partial p_i} - \frac{\partial \ln f(\vec{p}^{\,\prime})}{\partial p_i^{\prime}}\right]\left\{\left[f(\vec{p})\frac{\partial f(\vec{p}^{\,\prime})}{\partial p_k^{\prime}} - f(\vec{p}^{\,\prime})\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_k}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\int\frac{\Delta_i\Delta_k}{2}w(\vec{p},\vec{p}^{\,\prime},\Delta,\Delta^{\prime})d\tau_\Delta\right\}d\vec{p}d\vec{p}^{\,\prime}. \qquad (44)$$

Далее в результате дифференцирования и выделения общего знаменателя удаётся получить произведение двух одинаковых векторных множителей:

$$\frac{\partial s(t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{f(\vec{p})f(\vec{p}^{\,\prime})}\left[f(\vec{p})\frac{\partial f(\vec{p}^{\,\prime})}{\partial p_i^{\prime}} - f(\vec{p}^{\,\prime})\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_i}\right]\times$$
$$\times\left[f(\vec{p})\frac{\partial f(\vec{p}^{\,\prime})}{\partial p_k^{\prime}} - f(\vec{p}^{\,\prime})\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_k}\right]\times$$
$$\times\int\frac{\Delta_i\Delta_k}{2}w(\vec{p},\vec{p}^{\,\prime},\Delta,\Delta^{\prime})d\tau_\Delta d\vec{p}d\vec{p}^{\,\prime} =$$
$$= \frac{1}{4}\int\frac{1}{f(\vec{p})f(\vec{p}^{\,\prime})}\int w(\vec{p},\vec{p}^{\,\prime},\Delta,\Delta^{\prime})d\tau_\Delta\left[W(\vec{p},\vec{p}^{\,\prime},\Delta)\right]^2 d\vec{p}d\vec{p}^{\,\prime}, \qquad (45)$$

где

$$W(\vec{p},\vec{p}^{\,\prime},\vec{\Delta}) = \Delta_k\left[f(\vec{p})\frac{\partial f(\vec{p}^{\,\prime})}{\partial p_k^{\prime}} - f(\vec{p}^{\,\prime})\frac{\partial f(\vec{p})}{\partial p_k}\right].$$

Подынтегральное выражение (45) есть знакоположительная величина, так что определённая выше плотность энтропии есть неубывающая функция времени:

$$\frac{\partial s(t)}{\partial t} \geq 0. \tag{46}$$

В этом и состоит H-теорема Больцмана, доказанная для интеграла столкновений Ландау.

§ 4. **Интеграл столкновений в форме Фоккера–Планка**

Перепишем интеграл столкновений Ландау в форме уравнения диффузии с трением:

$$\frac{df_\alpha(\vec{p})}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_i}\left\{A_i^\alpha f_\alpha(\vec{p}) + \frac{\partial}{\partial p_j}\left(B_{ij}^\alpha f_\alpha(\vec{p})\right)\right\}. \tag{47}$$

Коэффициент $A_i^{(\alpha)}$ имеет смысл вектора трения:

$$A_i^{(\alpha)} = -\sum_\beta \int \frac{\partial f'_\beta(\vec{p'})}{\partial p'_k} L_{i,k}^{(\alpha,\beta)} d\vec{p}' - \sum_\beta \int f'_\beta(\vec{p}') \frac{\partial L_{i,k}^{(\alpha,\beta)}}{\partial p_k} d\vec{p}'. \tag{48}$$

Коэффициенты B_{ij}^α имеют смысл тензора диффузии в пространстве импульсов:

$$B_{ij}^\alpha = \sum_\beta \int f'_\beta(\vec{p}') L_{i,k}^{(\alpha,\beta)} d\vec{p}'. \tag{49}$$

Для того чтобы получить уравнение Фоккера–Планка, необходимо сделать два допущения:

1. Система α является настолько разреженной, что будем учитывать только столкновения с частицами другого сорта.

2. Частицы другого сорта находятся в термодинамическом равновесии. По этой причине в определение коэффициентов (48) и (49) необходимо подставить $f_0(\vec{p})$ равновесную функцию распределения β-частиц.

В результате получим

$$A_i^{(\alpha)} = -\int \frac{\partial f_0'(\vec{p\prime})}{\partial p_k'} L_{i,k}^{(\alpha,\beta)} d\vec{p'} - \int f_0'(\vec{p'}) \frac{\partial L_{i,k}^{(\alpha,\beta)}}{\partial p_k} d\vec{p'}, \tag{50}$$

$$B_{ik}^{\alpha,\beta} = \sum_{\beta} \int f_0'(\vec{p'}) L_{i,k}^{(\alpha,\beta)} d\vec{p'}. \tag{51}$$

Поскольку величина $L_{i,k}^{(\alpha,\beta)}$ зависит от разности скоростей, то после перехода к скоростным переменным во втором слагаемом правой части можно произвести интегрирование по частям.
В результате оказывается, что интегралы поддаются вычислению через функцию ошибок и гауссову функцию от безразмерной скорости $\vec{u} = \vec{v}\sqrt{m/2T}$.

Важно заметить, что коэффициенты, входящие в уравнение Фоккера–Планка, не являются независимыми.

Можно сразу заметить, что второе слагаемое правой части (50) с точностью до знака совпадает с производной по импульсу неравновесных частиц от тензора диффузии (51):

$$\frac{\partial B_{ik}^{\alpha,\beta}}{\partial p_k} = \int f_0'(\vec{p'}) \frac{\partial L_{i,k}^{(\alpha,\beta)}}{\partial p_k} d\vec{p'}. \tag{52}$$

Что же касается первого слагаемого, то его тоже удаётся выразить через векторную величину $B_{ik}^{\alpha,\beta} p_k$. Для того чтобы в этом убедиться, подставим в первое слагаемое производную от равновесной функции распределения:

$$\frac{\partial f_0'(\vec{p\prime})}{\partial p_k'} L_{i,k}^{(\alpha,\beta)} = -\frac{p_k'}{mT} f_0'(\vec{p\prime}) L_{i,k}^{(\alpha,\beta)} = -\frac{v_k'}{T} f_0'(\vec{p\prime}) L_{i,k}^{(\alpha,\beta)}.$$

Следующее преобразование связано с поперечностью тензора $L_{i,k}^{(\alpha,\beta)}$ по отношению к вектору относительной скорости:

$$-\frac{v_k'}{T} f_0'(\vec{p\prime}) L_{i,k}^{(\alpha,\beta)} = -\frac{v_k}{T} f_0'(\vec{p\prime}) L_{i,k}^{(\alpha,\beta)} = -\frac{p_k}{MT} f_0'(\vec{p\prime}) L_{i,k}^{(\alpha,\beta)}, \tag{53}$$

где M – масса неравновесных частиц.

Таким образом, коэффициент $A_i^{(\alpha)}$ выражается через $B_{ik}^{\alpha,\beta}$ и его производную:

$$A_i^{(\alpha)} = \frac{1}{MT} B_{ik}^{\alpha,\beta} p_k - \frac{\partial B_{ik}^{\alpha,\beta}}{\partial p_k}.$$

Подстановка этого соотношения в уравнение (47) даёт следующее:

$$\frac{df_\alpha(\vec{p})}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left\{ B_{ij}^\alpha \left[\frac{p_j}{MT} f_\alpha(\vec{p}) + \frac{\partial f_\alpha(\vec{p})}{\partial p_j} \right] \right\}. \tag{54}$$

Таким образом, уравнение Фоккера–Планка является линейным и определяется только через один тензорный коэффициент диффузии (51).

§ 4.1. **Уравнение Фоккера–Планка для заряженной частицы**

При заданном парном потенциале коэффициент диффузии выражается только через скалярную величину:

$$B_{ij}^\alpha = \frac{1}{3} \delta_{i,j} B_{kk}^\alpha. \tag{55}$$

Используя определение коэффициента диффузии через парный потенциал, а также переходя к интегрированию по скоростям, находим

$$B_{kk} = A \int \exp\left(-\frac{m(v')^2}{T}\right) L_{k,k}(\vec{v} - \vec{v}')d\vec{v}'. \tag{56}$$

Здесь использована максвелловская функция распределения с нормировочным коэффициентом $A = n(m/2\pi T)^{3/2}$ и определение функции $L_{k,k}(\vec{v} - \vec{v}')$:

$$L_{k,k}^{\alpha,\beta} = -\frac{2}{|\vec{v} - \vec{v}'|} \int\limits_0^\infty \frac{q^3 dq}{8\pi} \left(\varphi_q^{\alpha,\beta}\right)^2.$$

Таким образом, наша задача сводится к вычислению интеграла

$$B_{kk} = C \int \exp\left(-\frac{m(\vec{u}-\vec{v})^2}{2T}\right)\frac{1}{|\vec{u}|}d\vec{u} =$$

$$= -C\exp\left(-\frac{m\vec{v}^2}{2T}\right)\int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{mu^2}{2T}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{muv}{T}\right)\frac{4\pi T}{mv}du, \qquad (57)$$

где постоянная величина C имеет следующий вид:

$$C = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2}\int\limits_0^\infty \frac{q^3dq}{8\pi}\left(\varphi_q^{\alpha,\beta}\right)^2.$$

Вычисление интеграла приводит к следующему выражению:

$$B_{kk}(v=p/M) = -\frac{\sqrt{2}n}{v}\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{m}v}{\sqrt{2T}}\right)\int\limits_0^\infty \frac{q^3dq}{8\pi}\left(\varphi_q^{\alpha,\beta}\right)^2. \qquad (58)$$

Здесь $\operatorname{erf}(x)$ – известная функция ошибок, n – плотность равновесных частиц (рис. 1).

Если скорости неравновесных частиц $v = p/M$ в среднем малы по сравнению со скоростями равновесных частиц, тогда можно воспользоваться разложением выражения (35) по степеням малого параметра m/M, т.е. фактически считать неравновесные частицы неподвижными:

$$B_{i,k} \approx -\delta_{i,k}\frac{2\sqrt{m}n}{\sqrt{\pi T}}\int\limits_0^\infty \frac{q^3dq}{8\pi}\left(\varphi_q^{\alpha,\beta}\right)^2. \qquad (59)$$

Таким образом, в этом пределе тензор B_{ik} сводится к постоянному скаляру, а уравнение Фоккера–Планка принимает чисто диффузионный вид [3]:

$$\frac{df_\alpha(\vec{p})}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_k}\left\{B\left[\frac{p_k}{MT}f_\alpha(\vec{p}) + \frac{\partial}{\partial p_k}f_\alpha(\vec{p})\right]\right\}. \qquad (60)$$

Как следует из общего выражения для тензорного коэффициента B_{ij}, его зависимость от импульса возникает только тогда,

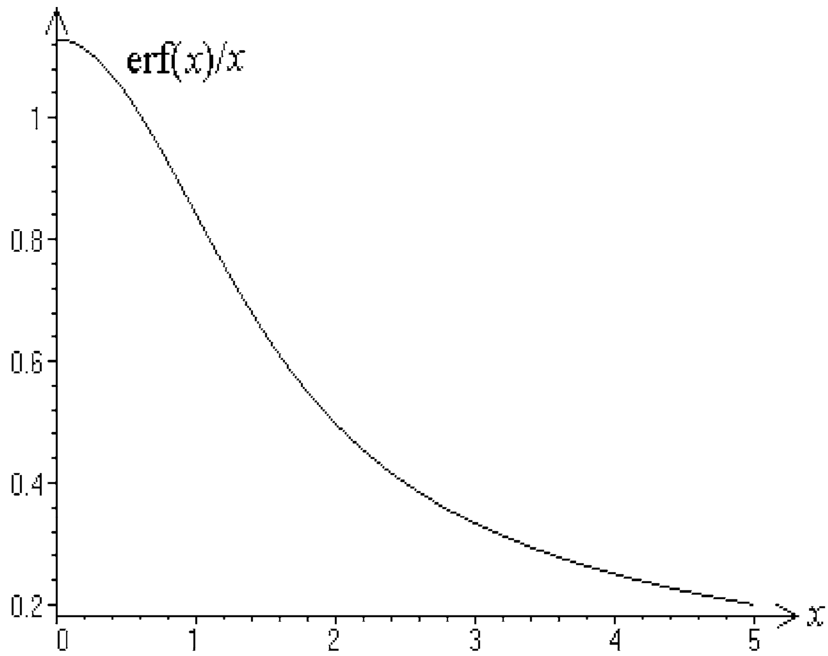

Рис. 1. Зависимость коэффициента диффузии от скорости заряженной частицы

когда скорость неравновесных частиц приближается к средней тепловой скорости равновесных частиц. Начиная с этих скоростей, значение коэффициента диффузии в импульсном пространстве начинает быстро уменьшаться (рис. 1).

Возникающее здесь характерное время релаксации оказывается пропорциональным температуре в степени 3/2:

$$\tau_e = B^{-1} m T \sim n_e \sqrt{m} T^{3/2} \left\{ \int\limits_0^\infty \frac{q^3 dq}{8\pi} \left(\varphi_q^{\alpha,\beta}\right)^2 \right\}^{-1}. \tag{61}$$

Можно заметить, что полученная температурная зависимость связана с тем обстоятельством, что мы учитываем вклад, происходящий от малых передаваемых импульсов, которые соответствуют большим прицельным параметрам при рассеянии на дальнодействующей части парного потенциала. При этом дифференциальное сечение рассеяния уменьшается с повышением относительной скорости сталкивающихся частиц. В соответствии с этим более быстрые частицы испытывают меньшее трение, чем частицы с меньшей энергией.

§ 4.2. **Уравнение Фоккера–Планка для тяжёлой частицы**

В случае короткодействующих потенциалов коэффициент диффузии в импульсном пространстве $B_{\alpha,\beta}$ можно вычислить для случая столкновения тяжёлых частиц с лёгкими. При этом удобно перейти в систему координат, связанную с тяжёлой частицей, и пренебречь изменением её энергии при столкновении.

Изменение импульса тяжёлой частицы Δ_α только знаком отличается от изменения импульса лёгкой частицы δp_α. Поэтому с учётом того, что мы пренебрегаем изменением энергии при столкновении, можно написать

$$\frac{<\Delta_\alpha \Delta_\beta>}{2} = \frac{1}{6}\delta_{\alpha,\beta} < (\delta\vec{p})^2 >= \frac{1}{6}\delta_{\alpha,\beta}\langle 2(\vec{p})^2\,(1-\cos\theta)\rangle. \qquad (62)$$

Здесь θ – угол рассеяния, а угловые скобки означают усреднение по всевозможным актам рассеяния на неподвижной тяжёлой частице.

Для того чтобы получить окончательный результат, т.е. определить полное число столкновений за секунду, достаточно умножить выражение в фигурных скобках на относительную скорость p/m и дифференциальное сечение, а затем проинтегрировать по равновесной функции распределения частиц легкого газа:

$$B = \frac{n}{3m} << p^3 d\sigma\,(1-\cos\theta) >>,$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{n}{m} << p d\sigma\,(1-\cos\theta) >> . \qquad (63)$$

Здесь n – плотность частиц лёгкого газа, а двойные угловые скобки означают усреднение по функции распределения, нормированной на одну частицу.

В случае изотропного рассеяния находим, что коэффициент диффузии B пропорционален первой степени плотности и возрастает с температурой как $T^{3/2}$, а время релаксации убывает с температурой как $T^{1/2}$.

Этот результат связан с предположением о короткодействующем характере взаимодействия, когда быстрые частицы испытывают в среднем большее число столкновений, чем медленные.

Задача № 3. Подвижность тяжёлой частицы

Определить подвижность тяжёлой частицы в лёгком газе.

Решение.

При наличии внешнего поля в кинетическом уравнении появляется слагаемое $\vec{F}\partial f/\partial\vec{p}$, где $\vec{F}$ – сила, действующая на частицу. Рассмотрим сразу линеаризованное уравнение Фоккера–Планка, относящееся к стационарному случаю:

$$B\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\vec{p}}+\frac{\vec{p}}{MT}f_1\right\}=\vec{F}\frac{\partial f_0}{\partial\vec{p}}. \tag{64}$$

Здесь f_1 – первая поправка к равновесной функции распределения f_0.

Решение уравнения (64) имеет простой вид: $f_1=f_0(\vec{F}\vec{p})/B$, что соответствует средней скорости:

$$\vec{u}=\int f_1\vec{v}d\vec{p}=\vec{F}\frac{M}{3B}\int v^2 f_0 d\vec{p}=\vec{F}\frac{TN}{BV}. \tag{65}$$

Подвижность b определяется как коэффициент между средней скоростью и приложенной силой $\vec{u}=b\vec{F}$. В нашем случае имеем

$$b=\frac{TN}{BV}=\frac{3MT}{<p^3\sigma_t>}. \tag{66}$$

§ 4.3. Заключение

Важно заметить, что из уравнения Фоккера–Планка сразу можно получить уравнение непрерывности, из которого следует закон сохранения числа частиц. Однако при написании уравнения для среднего импульса после усреднения по импульсу в правой части мы получаем дополнительную силу, пропорциональную скорости, отнесённую к единице объёма:

$$\frac{\partial\left(\rho V_\alpha\right)}{\partial t}+\frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial r_\beta}=-B<n>\frac{V_\alpha}{T}. \tag{67}$$

При написании уравнения для средней энергии в правой части мы получаем первое слагаемое, соответствующее работе против сил трения, производимых за единицу времени и отнесённых к единице объёма. Второе слагаемое имеет чисто диффузионное происхождение и не имеет простой физической интерпретации:

$$\frac{\partial\left(<n><\epsilon>\right)}{\partial t}+\frac{\partial q_\alpha}{\partial r_\alpha}=-\frac{2B<n>}{MT}\left\{<\epsilon>-\frac{T}{2}\right\}. \tag{68}$$

Что же касается H-теоремы, то наряду с заведомо положительным слагаемым в правой части появляется дополнительная отрицательная поправка:

$$\frac{dS}{dt}=-\frac{NB}{MT}+B\int\left\{\frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\right)^2\right\}d\vec{p}dV. \tag{69}$$

Здесь B – коэффициент диффузии в импульсном пространстве, N – полное число тяжёлых частиц.

Можно заметить, что отрицательное слагаемое непосредственно связано с наличием силы трения, пропорционального скорости. Таким образом, его происхождение объясняется тем, что выделенная подсистема тяжёлых частиц может передавать свою энергию термостату из лёгких частиц и по этой причине не является замкнутой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ландау Л.Д.*// ЖЭТФ. 1936. **7**, 203.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Физическая кинетика. – М.: Физматлит, 2001. – 535 с.
3. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 2. – М.: Мир, 1978. – 400 с.