

ЛЕКЦИЯ XIV

КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

С о д е р ж а н и е

§ 1. Определение диэлектрической проницаемости	408
§ 2. Однопетлевое приближение	410
§ 3. Лестничное уравнение для Π -оператора	415
§ 4. Влияние теплопроводности на $\epsilon^{\alpha,\beta}(\omega, \vec{q})$	420
З а д а ч а. Адиабатическая и изотермическая поляризуемость	423
§ 5. Второй звук	425
§ 6. Влияние теплопроводности на звук	426
§ 7. Затухание критических колебаний	428
§ 7.1. Трёхфононные процессы	428
§ 7.2. Четырёхфононные процессы	431
§ 8. Затухание звука в сегнетоэлектриках	433
Список литературы	435

Изучаются нестационарные явления в диэлектрических кристаллах кубической симметрии. В рамках простейшего лестничного приближения рассмотрено влияние теплопроводностных и гидродинамических колебаний на действительную и мнимую часть диэлектрической проницаемости. Рассмотрены условия возникновения второго звука.

Обсуждается влияние тройного стрикционного и четырёхфононного взаимодействия на затухание критических колебаний в сегнетоэлектриках типа смещения. В области частот порядка критической обнаружено аномальное затухание критических и акустических колебаний вблизи точки перехода из параэлектрической в сегнетоэлектрическую фазу.

§ 1. Определение диэлектрической проницаемости

Вычисление диэлектрической поляризации основано на определении вектора поляризации \vec{P} как дипольного момента единицы объёма, который, в свою очередь, выражается в виде линейной функции смещений ионов $\vec{u}_{\vec{r}}^k$:

$$\vec{P} = \frac{1}{v_0} \sum_{k=1} e_k \vec{u}_{\vec{r}}^k. \quad (1)$$

Здесь e_k – эффективный заряд k -го иона, v_0 – объём ячейки, $\vec{r} = n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3$ – координаты центра ячейки.

Взаимодействие диполей с электрическим полем $V = - \sum_{\vec{r}} \vec{d}_{\vec{r}} \vec{E}$

также выражается через дипольный момент \vec{d} , поэтому средний вектор поляризации определяется через запаздывающий коррелятор операторов смещения $\hat{u}_{\vec{r}}^{\alpha,n}(t)$:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{d}_{\vec{r}}^{\alpha}(t) \rangle &= \frac{i}{\hbar} \sum_{\vec{r}'} \int_{-\infty}^t \langle [d_{\vec{r}}^{\alpha}(t), d_{\vec{r}'}^{\beta}(t')] \rangle_0 E_{\vec{r}'}^{\beta}(t') dt' = \\ &= \frac{i}{\hbar} \sum_{k,n,\vec{r}'} e_k e_n \int_{-\infty}^t \langle [\hat{u}_{\vec{r}}^{\alpha,k}(t), \hat{u}_{\vec{r}'}^{\beta,n}(t')] \rangle_0 E_{\vec{r}'}^{\beta}(t') dt'. \end{aligned} \quad (2)$$

В правой части соотношения (2) усреднение производится при нулевом внешнем поле, так что результат усреднения зависит от разности временных и пространственных координат.

По этой причине удобно перейти к фурье-представлению:

$$\begin{aligned} D^{\alpha k; \beta n}(\vec{r} - \vec{r}'; t - t') &= -i\theta(t - t') \langle [\hat{u}_{\vec{r}}^{\alpha,k}(t), \hat{u}_{\vec{r}'}^{\beta,n}(t')] \rangle_0 = \\ &= \frac{1}{N_{\text{я}}} \sum_{\vec{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\vec{q}(\vec{r} - \vec{r}') - i\omega(t - t')) D_{\omega}^{\alpha k; \beta n}(\vec{q}) \frac{d\omega}{2\pi}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $N_{\text{я}}$ – полное число элементарных ячеек, а компоненты Фурье для запаздывающей функции Грина определяются следующим

образом:

$$D_{\omega}^{\alpha k; \beta n}(\vec{q}) = -i \sum_{\vec{r}} \int_0^{+\infty} \langle [\hat{u}_{\vec{r}}^{\alpha, k}(t), \hat{u}_0^{\beta, n}(0)] \rangle_0 \exp(-i\vec{q}\vec{r} - i\omega t) dt. \quad (4)$$

Предположим, что внешнее поле разложено в ряд и интеграл Фурье по пространственным и временным переменным \vec{r} и t и выделим соответствующую компоненту $E_{\vec{r}}^{\beta}(t') = E_{\omega, \vec{k}}^{\beta} \exp(i\vec{k}\vec{r}' - i\omega t')$. Подставляя её вместе с разложением (3) в исходное выражение (2), после простых преобразований получим компоненту Фурье вектора поляризации:

$$P_{\vec{r}}^{\alpha}(t) = \frac{1}{v_0 \hbar} \exp(i\vec{k}\vec{r} - i\omega t) \sum_{k, n} e_k e_n D_{\omega}^{\alpha k; \beta n}(\vec{k}) E_{\omega, \vec{k}}^{\beta}. \quad (5)$$

Отсюда с помощью общего определения диэлектрической проницаемости $\epsilon_{\alpha, \beta}(\omega, \vec{k}) E_{\omega, \vec{k}}^{\beta} = E_{\omega, \vec{k}}^{\alpha} + 4\pi P_{\omega, \vec{k}}^{\alpha}$ получим

$$\epsilon_{\alpha, \beta}(\omega, \vec{k}) = \delta_{\alpha, \beta} + \frac{4\pi}{\hbar v_0} \sum_{k, n} e_k e_n D_{\omega}^{\alpha k; \beta n}(\vec{k}). \quad (6)$$

Удобно перейти к разложению по нормальным координатам, которые диагонализуют нулевой гамильтониан, соответствующий гармоническому приближению:

$$\hat{u}_{\vec{r}}^{\alpha, k}(t) = \sum_{\vec{q}, \lambda} \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho V \omega_{\lambda, \vec{q}}}} \left\{ e_{\lambda, \vec{q}}^{\alpha, k} \exp(i\vec{q}\vec{r} - i\omega_{\lambda, \vec{q}} t) \hat{b}_{\lambda, \vec{q}} + h.c. \right\}. \quad (7)$$

Здесь $e_{\lambda, \vec{q}}^{\alpha, k}$ и $\omega_{\lambda, \vec{q}}$ – векторы поляризации и собственные частоты, отвечающие заданному вектору поляризации λ и волновому вектору \vec{q} . $\hat{b}_{\lambda, \vec{q}}$ – оператор уничтожения фонона с заданной поляризацией и волновым вектором.

При этом запаздывающая функция Грина выражается через произведения векторов поляризации и резонансных слагаемых, соответствующих собственным частотам:

$$D_0^{\alpha k; \beta n}(\omega, \vec{q}) = \sum_{\vec{q}, \lambda} \frac{\hbar}{\rho V} \frac{e_{\lambda, \vec{q}}^{\alpha, k} e_{\lambda, -\vec{q}}^{\beta, n}}{(\omega + i\delta)^2 - \omega_{\lambda, \vec{q}}^2}. \quad (8)$$

В соответствии с этим диэлектрическая проницаемость приобретает классическую форму:

$$\epsilon_0^{\alpha,\beta}(\omega, \vec{q}) = \delta_{\alpha,\beta} + \frac{4\pi}{\rho v_0 V} \sum_{k,n,\lambda,\vec{q}} \frac{e_k e_{\lambda,\vec{k}}^{\alpha,k} e_n e_{\lambda,-\vec{q}}^{\beta,n}}{(\omega + i\delta)^2 - \omega_{\lambda,\vec{q}}^2}. \quad (9)$$

Для учёта влияния поляризуемости ионов вместо единичной матрицы следует написать $\epsilon_{\alpha,\beta}^{\infty}$. Влияние ангармонизма и тепловой релаксации определяется через поляризационный оператор $\Pi_{\omega}(\vec{q})$ и уравнение Дайсона:

$$\left(D_{\omega}^{\lambda,\nu}(\vec{q})\right)^{-1} = \delta_{\lambda,\nu} \left(D_0^R(\omega, \vec{q}, \lambda)\right)^{-1} - \Pi_{\omega}^{\lambda,\nu}(\vec{q}). \quad (10)$$

При этом в качестве нулевых функций Грина мы выбираем совокупность трёх гриновских функций: запаздывающую и опережающую функции Грина $D_{\omega}^{R,A}(q)$, а также корреляционную функцию $F_{\omega}(q)$, которые записываются в виде матрицы 2×2 :

$$\hat{D}_{\omega}(\vec{q}, \lambda) = \begin{pmatrix} G^{aa} = 0, & G_Q^{a,b}(\omega) = D_{\omega}^A(q, \lambda) \\ G_Q^{b,a}(\omega) = D_{\omega}^R(\vec{q}, \lambda), & G_Q^{b,b}(\omega) = F_{\omega}(\vec{q}, \lambda) \end{pmatrix},$$

где используются обозначения $Q = (\vec{q}, \lambda)$,

$$\begin{aligned} D_{\omega}^{R,A}(\vec{q}, \lambda) &= \frac{1}{\omega \pm i\delta - \omega_Q} - \frac{1}{\omega \pm i\delta + \omega_Q}, \\ G_Q^{b,b}(\omega) = F_{\omega}(\vec{q}, \lambda) &= 2i \text{cth} \frac{\omega}{2T} \text{Im} D_{\omega}^R(\vec{q}, \lambda). \end{aligned} \quad (11)$$

§ 2. Однопетлевое приближение

Запишем в качестве гамильтониана взаимодействия первое не исчезающее ангармоническое слагаемое (см. лекцию X):

$$\hat{U}_3 = \frac{\rho V}{6} \sum_{Q_1 Q_2 Q_3} \left\{ A(Q_1 Q_2 Q_3) \left(\frac{\hbar^3}{8V^3 \omega_{Q_1} \omega_{Q_2} \omega_{Q_3}} \right)^{1/2} \times \right.$$

$$\times \left(\hat{b}_{Q_1}^+ + \hat{b}_{Q_1} \right) \left(\hat{b}_{Q_2}^+ + \hat{b}_{Q_2} \right) \left(\hat{b}_{Q_3}^+ + \hat{b}_{Q_3} \right) \}. \quad (12)$$

Здесь и ниже используется обозначение $\tilde{Q} = (j, -\vec{q})$,

$$A(Q_1 Q_2 Q_3) = \frac{1}{\rho V} \sum_{r_1, r_2, r_3} \left\{ V^{\alpha k, \beta m, \gamma n}(r_1, r_2, r_3) e_{Q_1}^{\alpha k} \times \right. \\ \left. \times e_{Q_2}^{\beta m} e_{Q_3}^{\gamma n} \exp [i(\vec{q}_1 \vec{r}_1) + i(\vec{q}_2 \vec{r}_2) + i(\vec{q}_3 \vec{r}_3)] \right\}. \quad (13)$$

Как было отмечено в предыдущей лекции, тройные вершины с нечётным числом первых индексов a равны между собой: $g_{aaa} = g_{abb} = g_{bba} = g_{bab} = 1/\sqrt{2}$, в то время как остальные вершины с нечётным числом вторых индексов b равны нулю: $g_{aab} = g_{aba} = g_{baa} = g_{bbb} = 0$.

С учётом того, что одна из диагональных компонент функции Грина $G_{aa} = 0$, во втором порядке теории возмущений имеем только две отличные от нуля диаграммы (см. рис. 1).

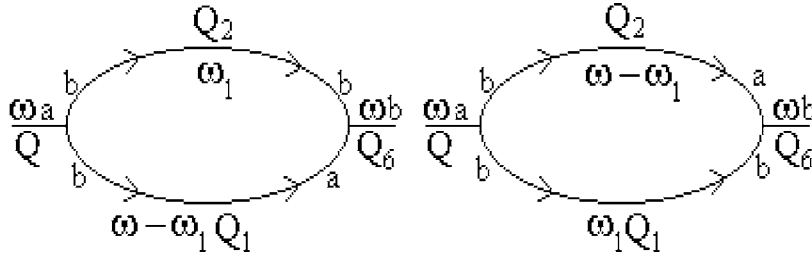


Рис. 1. Ненулевые однопетлевые поправки к поляризованному оператору

В аналитической форме имеем

$$\Pi_{Q, Q_6}^{(2)}(\omega) = \frac{i}{8} \sum_{Q_1, Q_2} V(\tilde{Q} Q_1 Q_2) V(\tilde{Q}_1 \tilde{Q}_2 Q_6) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ G_{Q_1}^{ba}(\omega - \omega_1) G_{Q_2}^{bb}(\omega_1) + G_{Q_1}^{bb}(\omega_1) G_{Q_2}^{ba}(\omega - \omega_1) \right\} \frac{d\omega_1}{2\pi}. \quad (14)$$

Здесь и ниже $V(Q_1 Q_2 Q_3) =$

$$= A(Q_1 Q_2 Q_3) \frac{\hbar^{3/2}}{\sqrt{(2\rho)^3 V \omega_{Q_1} \omega_{Q_2} \omega_{Q_3}}} \frac{\Delta(\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3)}{v_0}.$$

Эта функция симметрична относительно перестановки любой пары переменных.

Второе подынтегральное слагаемое в (14) отличается от первого заменой $Q_{1,2} \rightarrow Q_{2,1}$.

Таким образом, наша задача сводится к вычислению интеграла от произведения двух функций Грина:

$$i \int_{-\infty}^{\infty} G_{Q_1}^{bb}(\omega_1) G_{Q_2}^{ba}(\omega - \omega_1) \frac{d\omega_1}{2\pi} = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{cth} \left[\frac{\omega_1}{2T} \right] \rho_{Q_1}(\omega_1) \times \\ \times \left[\frac{1}{\omega - \omega_1 - \omega_{Q_2} + i\delta} - \frac{1}{\omega - \omega_1 + \omega_{Q_2} + i\delta} \right] \frac{d\omega_1}{2\pi}, \quad (15)$$

где $\rho_{Q_1}(\omega_1) = -\delta(\omega_1 + \omega_{Q_1}) - \delta(\omega_1 - \omega_{Q_1})$ – спектральная плотность гармонической фоновой функции Грина. Это выражение имеет резонансный характер, когда частоты $\omega_{Q_{1,2}}$ относятся к одной и той же ветви и имеют почти противоположные импульсы:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda', \quad \vec{q}_1 = \frac{\vec{s}}{2} + \vec{q}', \quad \vec{q}_2 = \frac{\vec{s}}{2} - \vec{q}'; \quad |\vec{s}| \ll |\vec{q}'|. \quad (16)$$

Если к тому же предположить, что нас интересует низкочастотная динамика: $|\omega| \ll \max \{\omega_{Q'}\}$, тогда резонансная часть выражения (15) представляется в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_{Q_1}^{bb}(\omega_1) G_{Q_2}^{ba}(\omega - \omega_1) \frac{d\omega_1}{2\pi} \approx 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{cth} \left[\frac{\omega_1}{2T} \right] \times \\ \times \left[\frac{\delta(\omega_1 - \omega_{\vec{q}_1})}{\omega - \omega_{\vec{q}_1} + \omega_{\vec{q}_2} + i\delta} + \frac{\delta(\omega_1 + \omega_{\vec{q}_1})}{\omega + \omega_{\vec{q}_1} - \omega_{\vec{q}_2} + i\delta} \right] \frac{d\omega_1}{2\pi} = \\ = \text{cth} \left[\frac{\omega_{\vec{q}_1}}{2T} \right] \left[\frac{1}{\omega - \omega_{\vec{q}_1} + \omega_{\vec{q}_2} + i\delta} - \frac{1}{\omega + \omega_{\vec{q}_1} - \omega_{\vec{q}_2} + i\delta} \right]. \quad (17)$$

Добавляя к (17) такое же выражение, но с заменой $\vec{q}_{1,2} \rightarrow \vec{q}_{2,1}$, выразим результат через равновесную функцию распределения Бозе $N_B(\omega_{\vec{q}_{1,2}})$:

$$2 [N_B(\omega_{\vec{q}_1}) - N_B(\omega_{\vec{q}_2})] \left[\frac{1}{\omega - \omega_{\vec{q}_1} + \omega_{\vec{q}_2} + i\delta} - \frac{1}{\omega + \omega_{\vec{q}_1} - \omega_{\vec{q}_2} + i\delta} \right].$$

Это выражение можно ещё упростить, если произвести разложение по малому суммарному импульсу $\vec{s} = \vec{k}$:

$$\vec{q}_{1,2} = \frac{\vec{k}}{2} \pm \vec{p}, \quad \omega_{\vec{q}_1} - \omega_{\vec{q}_2} = \vec{k}\vec{v}_p, \quad \vec{v}_p = \frac{\partial\omega_{\vec{p}}}{\partial\vec{p}},$$

$$N_B(\omega_{\vec{q}_1}) - N_B(\omega_{\vec{q}_2}) = -N_B(\omega_{\vec{p}}) [1 + N_B(\omega_{\vec{p}})] \frac{\vec{k}\vec{v}_p}{T}. \quad (18)$$

В результате получим $\Pi_{\lambda,\mu}^{(2)}(\omega, \vec{k}) =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu\vec{p}} V^{\lambda,\nu,\nu}(-\vec{k}, -\vec{p} + \vec{k}/2, \vec{p} + \vec{k}/2) V^{\mu,\nu,\nu}(\vec{k}, \vec{p} - \vec{k}/2, -\vec{p} - \vec{k}/2) \times \\ \times N_B(\omega_{\vec{p}}) [1 + N_B(\omega_{\vec{p}})] \frac{\vec{k}\vec{v}_p}{T} \left[\frac{1}{\omega - \vec{k}\vec{v}_p + i\delta} - \frac{1}{\omega + \vec{k}\vec{v}_p + i\delta} \right]. \quad (19)$$

В неполярных кристаллах скорость фоновых возбуждений \vec{v}_p меняет знак при изменении знака \vec{p} . Остальные величины, входящие в выражение (19), при этом преобразовании остаются неизменными. По этой причине при суммировании по направлению импульса \vec{p} второе слагаемое (19) совпадает с первым. Кроме того, в условии резонанса $\vec{k}\vec{v}_p \approx \omega$. Исходя из этих соображений, вместо (19) получим $\Pi_{\lambda,\mu}^{(2)}(\omega, \vec{k}) =$

$$= \frac{\omega}{T} \sum_{\nu,\vec{p}} \left| V^{\lambda,\nu,\nu}(-\vec{k}, -\vec{p} + \vec{k}/2, \vec{p} + \vec{k}/2) \right|^2 \frac{N_B(\omega_{\vec{p}}) [1 + N_B(\omega_{\vec{p}})]}{\omega - \vec{k}\vec{v}_p + i\delta}. \quad (20)$$

При высоких температурах $T \gg \max(\hbar\omega_{\vec{p}}) = \Theta$ это выражение пропорционально первой степени температуры. В области низких температур полученный результат можно оценить как

отношение квадрата ангармонической вершины к температуре. Эта оценка указывает на резонансный характер полученного результата, что соответствует необходимости выхода за рамки теории возмущений.

В заключение заметим, что выражение (20) представляет собой резонансную часть поляризационного оператора $\Pi_{\lambda,\mu}^{(2)}(\omega, \vec{k})$. В результате находим мнимую часть выражения (15):

$$\text{Im} \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} G_{Q_1}^{bb}(\omega_1) G_{Q_2}^{ba}(\omega - \omega_1) \frac{d\omega_1}{2\pi} \right\} = -\pi \int_{-\infty}^{\infty} \text{cth} \left[\frac{\omega_1}{2T} \right] \rho_{Q_1}(\omega_1) \times \\ \times [\delta(\omega - \omega_{Q_1} - \omega_{Q_2}) - \delta(\omega - \omega_{Q_1} + \omega_{Q_2})] d\omega_1. \quad (21)$$

После чего мнимая часть $\Pi^{(2)}$ -оператора представляется в виде

$$\text{Im} \Pi_{\tilde{Q}, Q_6}^{(2)}(\omega) = -2\pi \sum_{Q_1, Q_2} V(\tilde{Q}, Q_1, Q_2) V(Q_6, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2) \times \\ \times \left\{ \left[\text{cth} \left(\frac{\omega_{Q_2}}{2T} \right) - \text{cth} \left(\frac{\omega_{Q_1}}{2T} \right) \right] \delta(\omega - \omega_{Q_1} + \omega_{Q_2}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[\text{cth} \left(\frac{\omega_{Q_2}}{2T} \right) + \text{cth} \left(\frac{\omega_{Q_1}}{2T} \right) \right] \delta(\omega - \omega_{Q_1} - \omega_{Q_2}) \right\}. \quad (22)$$

Далее мы преобразуем правую часть к виду, соответствующему кинетическому уравнению:

$$\text{Im} \Pi_{\tilde{Q}, Q_6}^{(2)}(\omega) = -2\pi \sum_{Q_1, Q_2} V(\tilde{Q}, Q_1, Q_2) V(Q_6, \tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2) \times \\ \times \left[\exp \left(\frac{\omega}{2T} \right) - 1 \right] \left\{ [1 + n_B(\omega_{Q_2})] n_B(\omega_{Q_1}) \delta(\omega - \omega_{Q_1} + \omega_{Q_2}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} n_B(\omega_{Q_1}) n_B(\omega_{Q_2}) \delta(\omega - \omega_{Q_1} - \omega_{Q_2}) \right\}. \quad (23)$$

Здесь и ниже $n_B(\omega_Q) = 1 / [\exp(\hbar\omega_Q/2T) - 1]$ – функция распределения Бозе.

§ 3. Лестничное уравнение для Π -оператора

Наша задача будет состоять в том, чтобы определить наиболее сильно расходящиеся поправки к выделенной вершинной части, которые изображены на рис. 2.

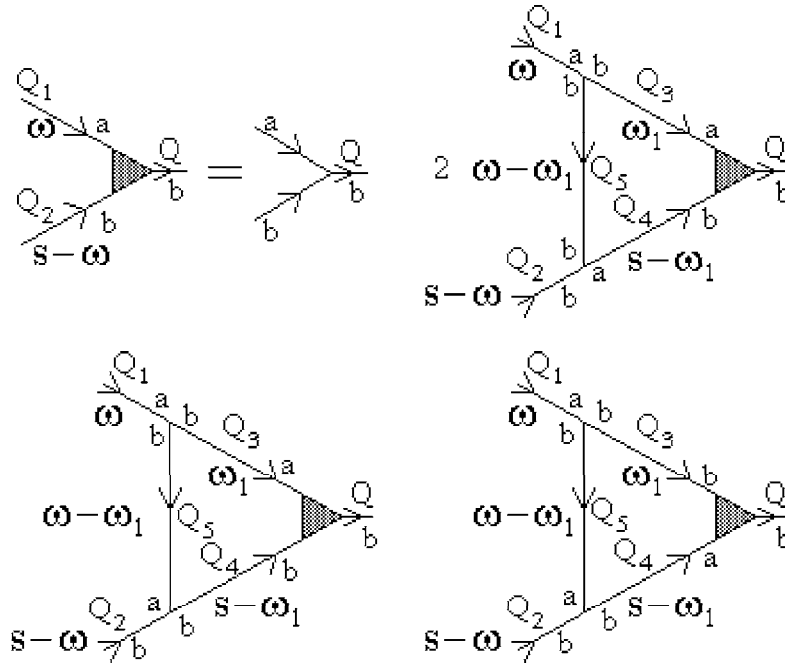


Рис. 2. Графическое изображение лестничного уравнения для угловой вершинной части

Суммирование лестничных диаграмм сводится к составлению интегрального уравнения для вершинной части $\Gamma_{Q_1 Q_2 Q}^{a,b}(\omega, s_0 - \omega)$, где верхние индексы соответствуют двум возможным причинным индексам входящих линий, нижние индексы соответствуют поляризациям и волновым векторам двух входящих и одной выходящей фоновой линии, частоты ω и $s_0 - \omega$ есть частоты входящих линий [1].

Лестничное уравнение, которому удовлетворяет искомая вер-

шина, имеет вид линейного интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} \Gamma_{Q_1 Q_2 Q}^{a,b}(\omega, s_0 - \omega) &= V(Q_1 Q_2 Q) - i \sum_{Q_3 Q_4 Q_5} V(\tilde{Q}_1 Q_3 Q_5) V(\tilde{Q}_2 Q_4 \tilde{Q}_5) \times \\ &\times \int \left\{ \sum_{k=1}^2 K_{Q_3 Q_4 Q_5, s_0}^{(k)}(\omega, \omega_1) \Gamma_{Q_3 Q_4 Q}^{a,b}(\omega_1, s_0 - \omega_1) + \right. \\ &\left. + K_{Q_3 Q_4 Q_5, s_0}^{(3)}(\omega, \omega_1) \Gamma_{Q_3 Q_4 Q}^{b,a}(\omega_1, s_0 - \omega_1) \right\} \frac{d\omega_1}{2\pi}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь и ниже используется обозначение: $\tilde{Q}_k = (\lambda_k, -\vec{q}_k)$; второе интегральное уравнение для $\Gamma_{Q_3 Q_4 Q}^{b,a}(\omega_1, s_0 - \omega_1)$ не выписывается, поскольку выполняется соотношение

$$\Gamma_{Q_3 Q_4 Q}^{b,a}(\omega_1, s_0 - \omega_1) = \Gamma_{Q_3 Q_4 Q}^{a,b}(s_0 - \omega_1, \omega_1). \quad (25)$$

Каждое слагаемое ядра интегрального уравнения запишем в соответствии с рис. 2: $K_{Q_3 Q_4 Q_5, s_0}^{(1)}(\omega, \omega_1) =$

$$\begin{aligned} &= 4i \operatorname{ctch} \left[\frac{\omega - \omega_1}{2T} \right] \operatorname{Im} G_{Q_5}^R(\omega - \omega_1) G_{Q_3}^R(\omega_1) G_{Q_4}^A(s_0 - \omega_1); \\ &K_{Q_3 Q_4 Q_5, s_0}^{(2)}(\omega, \omega_1) = \\ &= 2i \operatorname{ctch} \left[\frac{s_0 - \omega_1}{2T} \right] \operatorname{Im} G_{Q_4}^R(s_0 - \omega_1) G_{Q_5}^R(\omega - \omega_1) G_{Q_3}^R(\omega_1); \\ &K_{Q_3 Q_4 Q_5, s_0}^{(3)}(\omega, \omega_1) = \\ &= 2i \operatorname{ctch} \left[\frac{\omega_1}{2T} \right] \operatorname{Im} G_{Q_3}^R(\omega_1) G_{Q_5}^R(\omega - \omega_1) G_{Q_4}^R(s_0 - \omega_1). \end{aligned} \quad (26)$$

Решение интегрального уравнения будем искать в предположении о малой суммарной частоте $s_0 \ll \omega_{Q_k}$ и малой разности собственных частот $\omega_{Q_4} - \omega_{Q_3}$. То есть мы будем считать, что

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \lambda', \quad \vec{q}_3 = \vec{q}' + \vec{s}'/2, \quad \vec{q}_4 = -\vec{q}' + \vec{s}'/2, \quad |\vec{s}'| \ll |\vec{q}'|. \quad (27)$$

При выполнении этих условий можно выделить сингулярную часть из произведения:

$$G_{Q_3}^R(\omega_1) \operatorname{Im} G_{Q_4}^R(s_0 - \omega_1) = -\pi \left[\frac{1}{\omega_1 - \omega_{Q_3} + i\delta} - \frac{1}{\omega_1 + \omega_{Q_3} + i\delta} \right] \times$$

$$\begin{aligned} & \times [\delta(s_0 - \omega_1 - s_0 - \omega_{Q_4}) - \delta(s_0 - \omega_1 + \omega_{Q_4})] \rightarrow \\ & \rightarrow \pi \left[\frac{\delta(\omega_1 - \omega_{\vec{q}'})}{s_0 - \vec{s}\vec{v}_{\vec{q}'} + i\delta} + \frac{\delta(\omega_1 + \omega_{\vec{q}'})}{s_0 + \vec{s}\vec{v}_{\vec{q}'} + i\delta} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

где $\omega_{Q_3} - \omega_{Q_4} \approx \vec{s}\vec{v}_{\vec{q}'}$, $\vec{v}_{\vec{q}'} = \partial\omega_{\vec{q}'}/\partial\vec{q}'$.

К аналогичному выражению приводится произведение $G_{Q_3}^R(\omega_1)G_{Q_4}^A(s_0 - \omega_1)$, поскольку в полюсном приближении можно написать

$$G_{Q_3}^R(\omega_1)G_{Q_4}^A(s_0 - \omega_1) \rightarrow -iG_{Q_3}^R(\omega_1)\text{Im}G_{Q_4}^R(s_0 - \omega_1). \quad (29)$$

С такой же точностью можно произвести замену

$$G_{Q_5}^R(\omega - \omega_1) \rightarrow i\text{Im}G_{Q_5}^R(\omega - \omega_1). \quad (30)$$

В результате два первых слагаемых ядра интегрального уравнения представляются в виде: $\sum_{k=1}^2 K_{Q_3Q_4Q_5,s_0}^{(k)}(\omega, \omega_1) =$

$$\begin{aligned} & = 2\pi \left[\frac{\delta(\omega_1 - \omega_{\vec{q}'})}{s_0 - \vec{s}\vec{v}_{\vec{q}'} + i\delta} + \frac{\delta(\omega_1 + \omega_{\vec{q}'})}{s_0 + \vec{s}\vec{v}_{\vec{q}'} + i\delta} \right] \times \\ & \times \text{Im}G_{Q_5}^R(\omega - \omega_1) \left\{ 2\text{cth} \left[\frac{\omega - \omega_1}{2T} \right] + \text{cth} \left[\frac{\omega_1 - s_0}{2T} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Третья часть ядра интегрального уравнения (24) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{Q_3Q_4Q_5,s_0}^{(3)}(\omega, \omega_1) & = -2\pi \left[\frac{\delta(\omega_1 - \omega_{\vec{q}'})}{s_0 - \vec{s}\vec{v}_{\vec{q}'} + i\delta} + \frac{\delta(\omega_1 + \omega_{\vec{q}'})}{s_0 + \vec{s}\vec{v}_{\vec{q}'} + i\delta} \right] \times \\ & \times \text{Im}G_{Q_5}^R(\omega - \omega_1) \text{cth} \left[\frac{\omega_1}{2T} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

В результате удаётся проинтегрировать по ω_1 , после чего удобно ввести две новых функции:

$$X_{Q,Q'}(s_0, \omega) = \frac{\Gamma^{ab}(\omega, s_0 - \omega)}{s_0 + \vec{s}\vec{v}_{\vec{q}'}\omega/\omega_{\vec{q}'} + i\delta}, \quad \text{где } \omega = \pm \omega_{\vec{q}'}, \quad (33)$$

после чего получим два уравнения для определения новых функций $X_{Q,Q'}(s_0, \pm\omega_{\vec{q}'})$:

$$\begin{aligned} & (-is_0 + i\vec{s}\vec{v}_{\vec{q}'}\omega/\omega_{\vec{q}'} + \delta)X_{Q,Q'}(s_0, \omega) = V(Q\tilde{Q}_1\tilde{Q}_2) + 2\pi \times \\ & \times \sum_{Q''} \{K_{Q'Q''}(\omega)X_{Q,Q''}(s_0, \omega_{Q''}) + K_{Q'Q''}(-\omega)X_{Q,Q''}(s_0, -\omega_{Q''})\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Коэффициенты, возникающие в этом уравнении, приводятся к тому же виду, что и в кинетическом уравнении для фононов:

$$\begin{aligned} K_{Q'Q''}(\omega) &= 2 \sum_{Q_5} V(\tilde{Q}'\tilde{Q}''Q_5)V(Q'Q''\tilde{Q}_5)\rho_{Q_5}(\omega - \omega_{Q''}) \times \\ & \times n_B(\omega_{Q''}) [1 + n_B(\omega - \omega_{Q''})] \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (35)$$

где $n_B(\omega) = 1 / [\exp(\hbar\omega/T) - 1]$ – функция распределения Бозе;

$$\rho_{Q_5}(\omega - \omega_{Q''}) = \delta(\omega - \omega_{Q''} - \omega_{Q_5}) - \delta(\omega - \omega_{Q''} + \omega_{Q_5})$$

– спектральная плотность фононных состояний.

Далее введём две новые функции, каждая из которых симметрична или антисимметрична относительно замены $Q' \rightarrow \tilde{Q}'$:

$$Y_{Q'}^{\pm}(s_0, Q) = \frac{1}{2} \{X_{Q,Q'}(s_0, \omega_{Q'}) \pm X_{Q,Q'}(s_0, -\omega_{Q'})\}. \quad (36)$$

Подставляя эти функции в уравнения (34), находим уравнения для чётной и нечётной части:

$$\begin{aligned} & -is_0Y_{Q'}^+(s_0, Q) + i\vec{q}\vec{v}_{\vec{q}'}Y_{Q'}^-(s_0, Q) = V(Q\tilde{Q}_1\tilde{Q}_2) + \\ & + \{2\pi [K_{Q'Q''}(\omega_{Q'}) + K_{Q'Q''}(-\omega_{Q'})] - \delta\} Y_{Q'}^+(s_0, Q); \\ & -is_0Y_{Q'}^-(s_0, Q) + i\vec{q}\vec{v}_{\vec{q}'}Y_{Q'}^+(s_0, Q) = V(Q\tilde{Q}_1\tilde{Q}_2) = \\ & = \{2\pi [K_{Q'Q''}(\omega_{Q'}) + K_{Q'Q''}(-\omega_{Q'})] - \delta\} Y_{Q'}^-(s_0, Q). \end{aligned} \quad (37)$$

В этих уравнениях в правой части вместо бесконечно малого затухания δ следует подставить удвоенную мнимую часть поляризованного оператора (23), взятую с обратным знаком:

$$\begin{aligned} \delta \rightarrow 4\pi \sum_{Q'', Q'''} V(\tilde{Q}', Q'', Q''') V(Q', \tilde{Q}'', \tilde{Q}''') \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega_{Q'}}{2T}\right) - 1 \right] \times \\ \times \left\{ [1 + n_B(\omega_{Q''})] n_B(\omega_{Q''}) \delta(\omega_{Q'} - \omega_{Q''} + \omega_{Q'''}) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} n_B(\omega_{Q''}) n_B(\omega_{Q'''}) \delta(\omega - \omega_{Q''} - \omega_{Q'''}) \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Для того чтобы в правой части получить линейризованный интеграл столкновений, достаточно умножить обе стороны уравнений (37) на множитель $[1 + n_B(\omega_{Q'})] n_B(\omega_{Q'})$, а также использовать явное выражение (35) для ядра $K_{Q'Q''}(\pm\omega_{Q'})$ интегрального уравнения (34). В результате уравнения (37) переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \left[-is_0 Y_{Q'}^+(s_0, Q) + i\vec{q}\vec{v}_{\vec{q}'} Y_{Q'}^-(s_0, Q) \right] [1 + n_B(\omega_{Q'})] n_B(\omega_{Q'}) = \\ = V(Q\tilde{Q}_1\tilde{Q}_2) [1 + n_B(\omega_{Q'})] n_B(\omega_{Q'}) + \sum_{Q''} P_{Q', Q''} Y_{Q''}^+(s_0, Q). \\ \left[-is_0 Y_{Q'}^-(s_0, Q) + i\vec{q}\vec{v}_{\vec{q}'} Y_{Q'}^+(s_0, Q) \right] [1 + n_B(\omega_{Q'})] n_B(\omega_{Q'}) = \\ = \sum_{Q''} P_{Q', Q''} Y_{Q''}^-(s_0, Q). \end{aligned} \quad (39)$$

Оператор столкновений $P_{Q', Q''}$ соответствует линейризованному статистическому оператору тройных фонон-фононных столкновений:

$$\begin{aligned} \sum_{Q''} P_{Q', Q''} Y_{Q''} = \sum_{Q'', Q'''} 4\pi |V(Q', Q'', \tilde{Q}'')|^2 [1 + n_B(\omega_{Q'})] n_B(\omega_{Q''}) \times \\ \times [1 + n_B(\omega_{Q''})] \delta(\omega_{Q'} + \omega_{Q''} - \omega_{Q'''}) [Y_{Q'''} - Y_{Q''} - Y_{Q'}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\pi \sum_{Q'', Q'''} \left\{ |V(\tilde{Q}', Q'', Q''')|^2 [1 + n_B(\omega_{Q'})] n_B(\omega_{Q''}) \times \right. \\
& \left. \times n_B(\omega_{Q'''}) \delta(\omega_{Q'} - \omega_{Q''} - \omega_{Q'''}) [Y_{Q'''} + Y_{Q''} - Y_{Q'}] \right\}. \quad (40)
\end{aligned}$$

Сравнение с теорией возмущений показывает, что чётное решение уравнений (39) позволяет определить аномальную поправку к поляризационному оператору в области частот $|s_0| \ll T$:

$$\begin{aligned}
\delta\Pi_{\tilde{Q}, Q}^{(2)}(s_0) &= -i \frac{s_0}{T} \sum_{Q' \approx Q''} V(\tilde{Q}_6, Q', Q'') \times \\
& \times [1 + n_B(\omega_{Q'})] n_B(\omega_{Q'}) Y_{Q'}^+(s_0, Q). \quad (41)
\end{aligned}$$

Уравнения (39) – (41) устанавливают связи ”одночастичных” оптических и акустических колебаний с колебаниями фононной функции распределения, описываемых кинетическими уравнениями.

§ 4. Влияние теплопроводности на $\epsilon^{\alpha, \beta}(\omega, \vec{q})$

Будем искать решение кинетических уравнений в гидродинамической области, для которой $\omega = s_0$ и $k\vec{v}_{\vec{q}}$ не превышают скорости релаксации $1/\tau$. Для достижения этой цели разложим функции $Y_{Q'}^{(\pm)}(\omega, \vec{q}, j)$ по чётным и нечётным собственным функциям кинетического уравнения (40):

$$\begin{aligned}
Y_{\vec{p}, j}^{(+)}(\omega, \vec{k}) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(\omega, \vec{k}) \varphi_{2n}(\vec{p}, j), \quad Y_{\vec{p}, j}^{(-)}(\omega, \vec{k}) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}(\omega, \vec{k}) \varphi_{2n+1}(\vec{p}, j), \quad \sum_{Q''} P_{Q', Q''} \varphi_k(Q'') = -\gamma_k \varphi_k(Q'). \quad (42)
\end{aligned}$$

Подставим эти разложения в уравнения (39), после чего первое из них умножим на чётную собственную функцию, а второе –

на нечётную. В результате дальнейшего суммирования по всем импульсам \vec{p} и поляризациям j получим

$$\begin{aligned} -i\omega \sum_{m=0}^{\infty} S_{2n,2m} a_{2m}^{\beta}(\omega, \vec{k}) + i \sum_{m=0}^{\infty} (\vec{k} \vec{v}_{2n,2m+1}) a_{2m+1}^{\beta}(\omega, \vec{k}) = \\ = V_{2n}^{\beta}(\vec{k}) - \gamma_{2n} a_{2n}^{\beta}(\omega, \vec{k}), \end{aligned} \quad (43a)$$

$$\begin{aligned} -i\omega \sum_{m=0}^{\infty} S_{2n+1,2m+1} a_{2m+1}^{\beta}(\omega, \vec{k}) + i \sum_{m=0}^{\infty} (\vec{k} \vec{v}_{2n+1,2m}) a_{2m}^{\beta}(\omega, \vec{k}) = \\ = -\gamma_{2n+1} a_{2n+1}^{\beta}(\omega, \vec{k}), \quad \delta\Pi_{\alpha,\beta} = i \frac{\omega}{T} \sum_{m=0}^{\infty} V_{2m}^{\alpha}(-\vec{k}) a_{2m}^{\beta}(\omega, \vec{k}). \end{aligned} \quad (43b)$$

Здесь учтена отрицательная чётность вектора групповой скорости $\vec{v} = \partial\omega_{\vec{p},j}/\partial\vec{p}$, а также введены обозначения:

$$\begin{aligned} S_{2n,2m} &= \sum_{\vec{p},j} \varphi_{2n}(\vec{p}, j) [1 + n_B(\omega_{\vec{p},j})] n_B(\omega_{\vec{p},j}) \varphi_{2m}(\vec{p}, j), \\ S_{2n+1,2m+1} &= \sum_{\vec{p},j} \varphi_{2n+1}(\vec{p}, j) [1 + n_B(\omega_{\vec{p},j})] n_B(\omega_{\vec{p},j}) \varphi_{2m+1}(\vec{p}, j), \\ \vec{v}_{2n,2m+1} &= \sum_{\vec{p},j} \varphi_{2n}(\vec{p}, j) \vec{v}_{\vec{p},j} [1 + n_B(\omega_{\vec{p},j})] n_B(\omega_{\vec{p},j}) \varphi_{2m+1}(\vec{p}, j), \\ \vec{v}_{2n+1,2m} &= \sum_{\vec{p},j} \varphi_{2n+1}(\vec{p}, j) \vec{v}_{\vec{p},j} [1 + n_B(\omega_{\vec{p},j})] n_B(\omega_{\vec{p},j}) \varphi_{2m}(\vec{p}, j), \\ V_{2n}^{\beta}(\vec{k}) &= \sum_{\vec{p},j} \varphi_{2n}(\vec{p}, j) V^{\beta,j,j}(\vec{k}, \vec{p} - \frac{\vec{k}}{2}, -\vec{p} - \frac{\vec{k}}{2}) [1 + n_B(\omega_{\vec{p},j})] n_B(\omega_{\vec{p},j}). \end{aligned}$$

Функция $\varphi_0(\vec{p}, j) = c_0 \omega_{\vec{p},j}$ соответствует нулевому собственному значению $\gamma_0 = 0$ и определяет изменение равновесной функции распределения при малом изменении температуры. Предположим, что температура не слишком мала, – настолько, что собственные значения γ_{ν} , соответствующие квазиимпульсу, достаточно велики, что можно рассмотреть область частот $\omega \ll \gamma_{\nu}$, для которых основную роль играет теплопроводностная мода. С точки зрения системы уравнений (43) это эквивалентно выполнению условия $a_0^{\beta}(\omega, \vec{k}) \gg a_n^{\beta}(\omega, \vec{k})$ для всех $n > 0$.

Это предположение позволяет разложить систему уравнений по параметру $\max \{ \omega, \vec{k} \vec{v}_{\vec{p},j} \} / \gamma_n$.

В первом порядке по этому параметру можно выразить коэффициенты a_n^β через a_0^β :

$$a_{2n}^\beta(\omega, \vec{k}) = -\frac{1}{\gamma_{2n}} \left\{ i\omega S_{2n,0} a_0^\beta(\omega, \vec{k}) - V_{2n}^\beta(\vec{k}) \right\}, \quad (n \neq 0);$$

$$a_{2n+1}^\beta(\omega, \vec{k}) = -\frac{i}{\gamma_{2n+1}} \left(\vec{k} \vec{v}_{2n+1,0} \right) a_0^\beta(\omega, \vec{k}).$$

Эти приближённые выражения подставим в первое уравнение, записанное при $n = 0$:

$$-i\omega S_{0,0} a_0^\beta(\omega, \vec{k}) - i\omega \sum_{m=1}^{\infty} S_{0,2m} a_{2m}^\beta(\omega, \vec{k}) +$$

$$+ i \sum_{m=0}^{\infty} \left(\vec{k} \vec{v}_{0,2m+1} \right) a_{2m+1}^\beta(\omega, \vec{k}) = V_{2n}^\beta(\vec{k}),$$

откуда находим $a_0^\beta(\omega, \vec{k}) =$

$$= \frac{V_0^\beta(\vec{k}) + i\omega \sum_{m=1}^{\infty} S_{0,2m} V_{2m}^\beta(\vec{k}) / \gamma_{2m}}{-i\omega S_{0,0} + \omega^2 \sum_{m=1}^{\infty} S_{0,2m}^2 / \gamma_{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\vec{k} \vec{v}_{0,2m+1} \right)^2 / \gamma_{2m+1}}. \quad (44)$$

В этом выражении следует пренебречь величинами порядка $\omega S_{0,2m} / \gamma_{2m}$, а затем подставить $a_0^\beta(\omega, \vec{k})$ в аномальную часть П-оператора:

$$\delta\Pi_{\alpha,\beta} \approx i \frac{\omega}{T} V_0^\alpha(-\vec{k}) a_0^\beta(\omega, \vec{k}) =$$

$$= i \frac{\omega}{T} \frac{V_0^\alpha(-\vec{k}) V_0^\beta(\vec{k})}{-i\omega S_{0,0} + \sum_{m=0}^{\infty} \left(\vec{k} \vec{v}_{0,2m+1} \right)^2 / \gamma_{2m+1}}. \quad (45)$$

Здесь нормировочная постоянная нулевой собственной функции сокращается, так что можно положить $\varphi_0(\vec{p}, j) = \omega_{\vec{p},j}$,

после чего знаменатель оказывается пропорциональным теплоёмкости C :

$$\delta\Pi_{\alpha,\beta} = -\frac{\omega}{T^3 C v_0} \frac{V_0^\alpha(-\vec{k})V_0^\beta(\vec{k})}{(\omega + i\chi_{\gamma,\nu}k_\gamma k_\nu)}, \quad (46)$$

где $\chi_{\gamma,\nu}$ – тензор температуропроводности, C – удельная теплоёмкость идеального бозе-газа фононов:

$$\chi_{\gamma,\nu} = \frac{1}{C v_0 T^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v_{0,2m+1}^\gamma v_{0,2m+1}^\nu}{\gamma_{2m+1}}, \quad (47a)$$

$$C = \frac{1}{T^2 v_0} \sum_{\vec{p},j} \omega_{\vec{p},j} [1 + n_B(\omega_{\vec{p},j})] n_B(\omega_{\vec{p},j}). \quad (47b)$$

Этот результат был получен в работе Б.Я. Балагурова и В.Г. Вакса [2].

В низкочастотной области $\omega \ll \chi_{\gamma,\nu}k_\gamma k_\nu$ аномальная поправка становится несущественной, в то время как при высоких частотах $\omega \gg \chi_{\gamma,\nu}k_\gamma k_\nu$ поляризационная поправка не зависит от частоты и соответствует адиабатической поляризуемости диэлектрика:

$$\left(D_\omega^{\alpha,\beta}(\vec{q})\right)^{-1} = \delta_{\alpha,\beta} \left(D_0^R(\omega, \vec{q}, \lambda)\right)^{-1} + \frac{V_0^\alpha(-\vec{k})V_0^\beta(\vec{k})}{T^3 C v_0}. \quad (48)$$

З а д а ч а

Используя термодинамические соотношения при заданной поляризации \vec{P} , определить связь между адиабатической и изотермической поляризуемостью.

Р е ш е н и е.

Запишем полный дифференциал свободной энергии, отнесённой к единице объёма $F(\vec{P}, T)$:

$$dF = -SdT + 4\pi\vec{E}d\vec{P}, \quad E_\alpha = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial P_\alpha}\right)_T. \quad (49)$$

В соответствии с этим определим тензор обратных восприимчивостей $\zeta_{\alpha\beta}$:

$$\zeta_{\alpha\beta} = \frac{\partial E_\alpha}{\partial P_\beta} = 4\pi (\hat{\epsilon} - 1)_{\alpha\beta}^{-1} = \left(\frac{\partial E_\alpha}{\partial P_\beta} \right)_T + \left(\frac{\partial E_\alpha}{\partial T} \right)_{\bar{P}} \frac{\partial T}{\partial P_\beta}. \quad (50)$$

С помощью соотношений (49) правая часть выражается через изотермическую поляризуемость $\zeta_{\alpha\beta}^T = (1/4\pi)\partial^2 F/\partial P_\alpha \partial P_\beta$:

$$\zeta_{\alpha\beta} = \zeta_{\alpha\beta}^T + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial P_\alpha} \frac{\partial T}{\partial P_\beta} = \zeta_{\alpha\beta}^T - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial S}{\partial P_\alpha} \right)_T \frac{\partial T'}{\partial P_\beta}. \quad (51)$$

Величины T' и \bar{P}' можно связать между собой через уравнение теплопроводности:

$$T \frac{\partial S}{\partial t} = T \left(\frac{\partial S}{\partial P_\alpha} \right)_T \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\bar{P}} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (52)$$

Вводя тензор теплопроводности $\kappa_{\alpha\beta}$, а также $C_{\bar{P}}$ — теплоёмкость единицы объёма при постоянной поляризации, перепишем соотношение (52) следующим образом:

$$\kappa_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 T}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = T \left(\frac{\partial S}{\partial P_\alpha} \right)_T \frac{\partial P_\alpha}{\partial t} + C_{\bar{P}} \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (53)$$

Если предположить, что поправки к температуре и давлению периодически зависят от координат и времени по закону $\exp(-i\omega t + i\vec{q}\vec{r})$, тогда уравнение (53) упрощается:

$$\kappa_{\alpha\beta} q_\alpha q_\beta \Delta T = i\omega T \left(\frac{\partial S}{\partial P_\alpha} \right)_T \Delta P_\alpha + i\omega C_{\bar{P}} \Delta T. \quad (54)$$

Отсюда находим отношение $\Delta T/\Delta P$ и подставляем в соотношение (51):

$$\zeta_{\alpha\beta} = \zeta_{\alpha\beta}^T + \frac{T}{4\pi} \left(\frac{\partial S}{\partial P_\alpha} \right)_T \left(\frac{\partial S}{\partial P_\beta} \right)_T \frac{\omega}{\omega C_{\bar{P}} - \kappa_{\gamma\nu} q_\gamma q_\nu} =$$

$$= \zeta_{\alpha\beta}^T + \frac{4\pi T}{C_{\vec{P}}} \left(\frac{\partial E_\alpha}{\partial T} \right)_{\vec{P}} \left(\frac{\partial E_\beta}{\partial T} \right)_{\vec{P}} \frac{\omega}{\omega - \chi_{\gamma\nu} q_\gamma q_\nu}, \quad (55)$$

где $\chi_{\gamma\nu} = \kappa_{\gamma\nu}/C_{\vec{P}}$ – тензор температуропроводности.

При $\omega \ll \chi_{\gamma\nu} q_\gamma q_\nu$ колебания изотермичны и $\zeta_{\alpha\beta} = \zeta_{\alpha\beta}^T$. В области высоких частот, когда $\omega \gg \chi_{\gamma\nu} q_\gamma q_\nu$, величина восприимчивости переходит к своему адиабатическому значению:

$$\zeta_{\alpha\beta}^S = \zeta_{\alpha\beta}^T + \frac{4\pi T}{C_{\vec{P}}} \left(\frac{\partial E_\alpha}{\partial T} \right)_{\vec{P}} \left(\frac{\partial E_\beta}{\partial T} \right)_{\vec{P}}. \quad (56)$$

В сегнетоэлектрических кристаллах величина $(\partial E_\alpha/\partial T)_{\vec{P}}$ пропорциональна поляризации P_α , так что различие между $\zeta_{\alpha\beta}^S$ и $\zeta_{\alpha\beta}^T$ может существовать только в сегнетофазе и лишь для тех компонент $\zeta_{\alpha\beta}^S$, для которых $P_\alpha \neq 0$ и $P_\beta \neq 0$.

§ 5. Второй звук

В области предельно низких температур, когда вероятность процессов переброса становится экспоненциально малой, можно считать, что квазиимпульс фононов является сохраняющейся величиной при столкновениях. Это означает, что три компоненты импульса \vec{p} , являющиеся собственными функциями оператора столкновений, с экспоненциальной точностью имеют нулевые собственные значения.

Если предположить, что частота звуковых колебаний велика по сравнению с обратными временами процессов переброса, однако мала по сравнению со скоростью релаксации нормальных процессов, тогда для нахождения скорости второго звука достаточно рассмотреть четыре первых уравнения (43), соответствующих нулевым собственным значениям:

$$\begin{aligned} -i\omega S_{0,0} a_0^\beta(\omega, \vec{k}) + i \sum_{\nu=1}^3 (\vec{k} \vec{v}_{0,2\nu+1}) a_{2\nu+1}^\beta(\omega, \vec{k}) &= V_0^\beta(\vec{k}), \\ -i\omega \sum_{\nu=1}^3 S_{2\gamma+1,2\nu+1} a_{2\nu+1}^\beta(\omega, \vec{k}) + i (\vec{k} \vec{v}_{2\gamma+1,0}) a_0^\beta(\omega, \vec{k}) &= 0. \end{aligned} \quad (57)$$

В кубическом кристалле коэффициенты соответствующей однородной системы уравнений определяются тремя независимыми матричными элементами: $S_{0,0} = c_0^2 A$,

$$S_{2\gamma+1,2\nu+1} = b_0^2 \delta_{\gamma,\nu} B, \quad v_{0,2\nu+1}^\alpha = v_{2\nu+1,0}^\alpha = c_0 b_0 \delta_{\gamma,\nu} D,$$

где в области низких температур имеем следующие оценки:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{\vec{p},j} \omega_{\vec{p},j}^2 [1 + n_B(\omega_{\vec{p},j})] n_B(\omega_{\vec{p},j}) = T^2 C_v, \\ B &= \frac{1}{3} \sum_{\vec{p},j} p^2 [1 + n_B(\omega_{\vec{p},j})] n_B(\omega_{\vec{p},j}) \sim \frac{A}{3\bar{c}^2}, \\ D &= \frac{1}{3} \sum_{\vec{p},j} \omega_{\vec{p},j} (\vec{v}_{\vec{p},j} \vec{p}) [1 + n_B(\omega_{\vec{p},j})] n_B(\omega_{\vec{p},j}) \sim \frac{A}{3}. \end{aligned} \quad (58)$$

Нормировочные постоянные c_0 и b_0 оказываются несущественными, поскольку после естественной замены переменных $c_0 a_0^\beta(\omega, \vec{k}) = X$ и $b_0 a_{2\nu+1}^\beta(\omega, \vec{k}) = Y_\nu$ соответствующая система уравнений (57) приобретает вид

$$\omega X A = \sum_{\nu=1}^3 k_\nu Y_\nu D, \quad \omega Y_\nu B = k_\nu X D, \quad \omega^2 = k^2 \frac{D^2}{AB} \approx k^2 \frac{\bar{c}^2}{3}. \quad (59)$$

Таким образом, при низких температурах в твёрдом теле могут распространяться продольные термоупругие колебания, распространяющиеся со скоростью, не превышающей скорость обычного звука.

§ 6. Влияние теплопроводности на звук

С повышением температуры, когда вероятность процессов переброса сравнивается с вероятностью нормальных процессов, волны второго звука превращаются в теплопроводностную моду, существенно связанную с упругими звуковыми колебаниями. Для того чтобы обнаружить это явление, достаточно рассмотреть "акустические" компоненты обратной функции Грина

$D_{\alpha,\beta}(\omega, \vec{k})$ и соответствующие компоненты поляризационного оператора $\Pi_{\alpha,\beta}(\omega, \vec{k})$.

В нулевом приближении имеем обычные уравнения упругих колебаний:

$$\left(\hat{D}^{-1}(\omega, \vec{k})\right)_{\alpha,\beta} = -\rho\omega^2\delta_{\alpha,\beta} + C_{\alpha\beta\gamma\nu}^T k_\gamma k_\nu, \quad (60)$$

где $C_{\alpha,\beta,\gamma,\nu}^T$ – изотермический тензор упругих модулей.

В общем случае тензор упругих модулей выражается через акустические компоненты поляризационного оператора:

$$C_{\alpha\beta\gamma\nu} k_\gamma k_\nu(\omega, \vec{k}) = C_{\alpha\beta\gamma\nu}^T k_\gamma k_\nu - \Pi_{\alpha\beta}(\omega, \vec{k}). \quad (61)$$

Здесь в качестве Π -оператора следует понимать выражение (46), вычисленное в пределе длинных волн:

$$\Pi_{\alpha,\beta} = -k_\gamma k_\nu \frac{\omega}{T^3 C v_0} \frac{W_0^{\alpha,\gamma} W_0^{\beta,\nu}}{(\omega + i\chi_{\gamma,\nu} k_\gamma k_\nu)}, \quad (62)$$

где использованы обозначения: $V_0^\alpha(\vec{k}) = ik_\gamma W_0^{\alpha,\gamma}$, $W_0^{\alpha,\gamma} =$

$$= \sum_{\vec{p}, j} \omega_{\vec{p}, j} [1 + n_B(\omega, j)] n_B(\omega, j) \frac{\partial}{\partial k_\gamma} V^{\alpha, j, j}(\vec{k}, \vec{p} - \frac{\vec{k}}{2}, -\vec{p} - \frac{\vec{k}}{2}) \Big|_{\vec{k}=0}. \quad (63)$$

В области малых частот $\omega \ll \chi_{\gamma,\nu} k_\gamma k_\nu$ температурная поправка к упругим модулям мала, в то время как в обратном пределе $\omega \gg \chi_{\gamma,\nu} k_\gamma k_\nu$ скорость продольных звуковых колебаний определяется так называемыми адиабатическими модулями:

$$C_{\alpha\beta\gamma\nu}^S = C_{\alpha\beta\gamma\nu}^T + \frac{W_0^{\alpha,\gamma} W_0^{\beta,\nu}}{T^3 C v_0}. \quad (64)$$

§ 7. Затухание критических колебаний

Полуширина Γ критического длинноволнового колебания определяется мнимой частью полюса запаздывающей функции Грина $G_{\alpha\beta}^R$ и связана с неприводимой собственно энергетической частью критических колебаний $\Pi_{\alpha\beta}(q=0, \omega) = \delta_{\alpha\beta}\Pi(\omega)$ с помощью соотношения

$$\Gamma(\omega) = \frac{\text{Im}\Pi(\omega)}{2\omega}. \quad (65)$$

Диэлектрическая проницаемость $\epsilon(\omega)$ и $\text{tg}\delta$ при рассматриваемых $\omega < \omega_c$ выражается через критическую частоту $\omega_c(0) = \omega_c \sim \sqrt{|T - T_c|}$ и $\Gamma(\omega)$ из (65) следующим образом:

$$\epsilon(\omega) = \frac{\lambda}{\omega_c^2 - \omega^2 - 2i\omega\Gamma(\omega)}, \quad \text{tg}\delta = \frac{2\omega\Gamma(\omega)}{\omega_c^2 - \omega^2} = \frac{\text{Im}\Pi(\omega)}{\omega_c^2 - \omega^2}. \quad (66)$$

Если Γ не зависит от ω , тогда (66) переходит в обычные "осцилляторные" формулы. Однако в случае критических колебаний $\Gamma(\omega)$ меняется при переходе от $\omega = \omega_c$ к $\omega \ll \omega_c$, поэтому величину $\text{Im}\Sigma(\omega)$ мы будем вычислять для произвольных ω . При изучении затухания вместо ω следует писать ω_c , а при описании диэлектрических потерь ω есть частота внешнего электрического поля, причём в обычных опытах $\omega \ll \omega_c$.

§ 7.1. Трёхфононные процессы

Затухание, происходящее от ангармонических колебаний второго порядка по $V(Q_1Q_2Q_3)$, определяется общими соотношениями (19) – (23). (См. рис. 1.) Пользуясь формулами (23) и (65), в области высоких температур $T \gg \omega_{j\vec{k}}$ можно написать

$$\Gamma(\omega) = T \frac{\pi}{16} \sum_{i,j,\vec{k}} |V_{c,i,j}^{(3)}(0, \vec{k}, -\vec{k})|^2 \frac{1}{\omega_{i\vec{k}}^2 \omega_{j\vec{k}}^2} \times \\ \times \left[2\delta(\omega - \omega_{i\vec{k}} - \omega_{j\vec{k}}) + \delta(\omega + \omega_{i\vec{k}} - \omega_{j\vec{k}}) \right]. \quad (67)$$

Первое слагаемое в (67) определяет процессы распада критического фонона, а второе слагаемое связано с возможностью его присоединения к тепловому.

Поскольку ω мало, то распад может происходить только на длинноволновые акустические фононы. В соответствии с этим матричный элемент $V_{e,i,j}^{(3)}(0, \vec{k}, -\vec{k})$ при малых \vec{k} обращается в нуль по закону k^2 , а в центральных кристаллах ещё быстрее $\sim k^3$. Отсюда можно заключить, что вклад от процессов распада мал по сравнению со всеми другими.

Процессы присоединения $\omega + \omega_{i\vec{k}} = \omega_{j\vec{k}}$ при малых ω оказываются возможными только если в некоторой области \vec{k} возникает аномальная близость частот двух ветвей i и j фононного спектра.

Если i и j – различные акустические ветви и $q \rightarrow 0$, тогда соответствующий матричный элемент мал, и результирующий вклад так же мал, как и в случае распада.

Наиболее существенный вклад возникает, когда мы рассматриваем область пересечения акустической и критической ветви. В этом случае потенциал $V^{(3)}$ при малых \vec{k} выражается через электрострикционные константы разложения термодинамического потенциала $-Q^{\alpha\beta\gamma\nu} P_\alpha P_\beta \sigma_{\gamma\nu}$, где \vec{P} – вектор спонтанной поляризации, $\sigma_{\gamma\nu}$ – тензор деформации, $Q^{\alpha\beta\gamma\nu}$ – матрица электрострикции.

Затухание критических колебаний в кубической фазе происходит за счёт так называемого ”стрикционного” гамильтониана, который соответствует ангармоническому взаимодействию акустического и двух критических колебаний:

$$\hat{H}_{str} = -iQ^{\alpha\beta\gamma\nu} \sum_{\vec{p}, \vec{k} \ll k_{\max}} k^\alpha \hat{u}_{\lambda, \vec{k}}^\beta \hat{x}_{\vec{p}}^\gamma \hat{x}_{-\vec{p}-\vec{k}}^\nu. \quad (68)$$

Здесь $\hat{u}_{\lambda, \vec{k}}^\beta$ и $\hat{x}_{\vec{p}}^\gamma$ – операторы акустических и критических колебаний:

$$\hat{u}_{\vec{k}}^\beta = \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho V c_\lambda k}} \left[\hat{b}_{\lambda, \vec{k}} e_{\lambda, \vec{k}}^\beta - \text{h.c.} \right], \quad c_\lambda = \{c_l, c_t\},$$

$$\hat{x}_{\vec{p}}^{\gamma} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho V \omega_c(p)}} \left[\hat{a}_{c,\vec{p}} e_{c,\vec{p}}^{\gamma} + \text{h.c.} \right], \quad \omega_c(p) = \sqrt{\omega_c^2 + s^2 p^2}; \quad (69)$$

$\hat{b}_{\lambda,\vec{k}}$ и $\hat{a}_{c,\vec{p}}$ – операторы уничтожения акустических и критических фононов; $e_{\lambda,\vec{k}}^{\beta}$ и $e_{c,\vec{p}}^{\gamma}$ – единичные векторы продольных и поперечных акустических и критических колебаний;

$$Q^{\alpha\beta\gamma\nu} = \Lambda \left[q_{12} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\nu} + \frac{1}{2} q_{44} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\nu} + \delta_{\alpha\nu} \delta_{\beta\gamma}) + q_a g^{\alpha\beta\gamma\nu} \right] \quad (70)$$

– матрица стрикционных постоянных, $g^{\alpha\beta\gamma\nu}$ – тензор кубической анизотропии, определяемый таким образом, что в системе главных осей кристалла он равен единице, когда все его индексы совпадают, и равен нулю в остальных случаях. Вычисления особенно упрощаются, если пренебречь анизотропией спектров и считать, что критические частоты записываются через квадратичную форму: $\omega_c(k) = \sqrt{\omega_c^2 + s^2 k^2}$, в то время как акустические ветви спектра имеют звуковой характер: $\omega_{l,t}(k) = c_{l,t} k$.

Учитывая явный вид стрикционного гамильтониана (68), перепишем общую формулу (67) в следующем виде:

$$\Gamma(\omega) = T \frac{\pi}{48} Q^{\alpha\beta\gamma\nu} Q^{\alpha'\beta'\gamma'\nu} \sum_{\lambda,\vec{k}} k^{\alpha} k^{\alpha'} \frac{e_{\lambda,\vec{k}}^{\beta} e_{\lambda,\vec{k}}^{\beta'} e_{c,\vec{k}}^{\gamma} e_{c,\vec{k}}^{\gamma'}}{c_{\lambda}^2 k^2 \omega_c(k)^2} \times \\ \times [\delta(\omega + \omega_c(k) - c_{\lambda} k) + \delta(\omega - \omega_c(k) + c_{\lambda} k)]. \quad (71)$$

В диэлектрических потерях $\omega \ll \omega_c$ и поглощение возможно только если $c_{\lambda} > s$.

В этом простом пределе можно положить $\omega = 0$ и заменить векторы поляризации критических колебаний соответствующими постоянными предельными значениями:

$$\Gamma_t^{\gamma\gamma'}(\vec{k}) = e_{c,\vec{k}}^{\gamma} e_{c,\vec{k}}^{\gamma'} = \delta_{\gamma\gamma'} - \frac{k_{\gamma} k_{\gamma'}}{k^2}. \quad (72a)$$

Поступая аналогичным образом с продольными и поперечными критическими колебаниями, когда

$$\Gamma_l^{\beta\beta'}(\vec{k}) = e_{l,\vec{k}}^{\beta} e_{l,\vec{k}}^{\beta'} = \frac{k_{\beta} k_{\beta'}}{k^2}, \quad e_{t,\vec{k}}^{\beta} e_{t,\vec{k}}^{\beta'} = \delta_{\beta\beta'} - \frac{k_{\beta} k_{\beta'}}{k^2}, \quad (72b)$$

находим

$$\Gamma = \frac{T}{6\pi\rho} \Lambda^2 \left[\frac{A_t^2}{|c_t^2 - s^2|\sqrt{c_t}} + \frac{A_t^2}{|c_t^2 - s^2|\sqrt{c_t}} \right], \quad (73)$$

где A_λ – постоянные числа, связанные с матрицей стрикционных постоянных $Q^{\alpha\beta\gamma\nu}$. Подробности см. в работе [3].

Таким образом, благодаря существованию стрикционного взаимодействия, два поперечных критических колебания могут превращаться как в продольную, так и в поперечную акустическую волну. Этот процесс приводит к малому затуханию критических колебаний, пропорциональных отношению температуры к величине порядка атомной величины ($\sim M c_{3B}^2$), где M – суммарная масса атомов ячейки, c_{3B} – величина порядка скорости звука.

§ 7.2. Четырёхфононные процессы

Слагаемые второго порядка по параметру T/Mc_{3B}^2 происходят от двухпетлевых поправок к поляризации оператору. Если предположить, что температура велика по сравнению с энергией любого теплового фонона, тогда для кубических кристаллов поглощение критического фонона определяется следующим образом: $\Gamma^{(2)}(\omega) =$

$$= T^2 \frac{\pi}{6} \sum_{\pm} \sum_{i_1, i_2, i_3, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \left| V_{c, i_1, i_2, i_3}(0, \vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3) \right|^2 \times \\ \times \frac{\Delta(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3)}{8\omega_{i_1, \vec{k}_1}^2 \omega_{i_2, \vec{k}_2}^2 \omega_{i_3, \vec{k}_3}^2} \delta\left(\omega \pm \omega_{i_1, \vec{k}_1} \pm \omega_{i_2, \vec{k}_2} \pm \omega_{i_3, \vec{k}_3}\right). \quad (74)$$

Символ $\Delta(\vec{k})$ равен единице, когда \vec{k} равен нулю или одному из векторов обратной решётки. Суммирование по ”+” и ”-” происходит по всевозможным комбинациям знаков частот $\omega_{i, \vec{k}}$, соответствующих рассеянию, распаду или присоединению.

Заметим, что низкочастотный вклад в затухание имеет наиболее существенное значение именно для критических фононов,

поскольку для акустических частот потенциал V_4 обращается в нуль при $\vec{k} \rightarrow 0$. В соответствии с этим произведём оценку интеграла (74) при $T \rightarrow T_c$, т. е. когда $\omega_{c,\vec{k}} = \sqrt{\omega_c^2 + s^2 k^2}$, где $\omega_c^2 \sim |T - T_c|$.

Для определённости рассмотрим процесс рассеяния, когда

$$\omega_{c,\vec{k}_3} + \omega_c = \omega_{c,\vec{k}_1} + \omega_{c,\vec{k}_2}, \quad \vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2.$$

Интегрирование по k_3 приводит аргумент δ -функции от энергии к виду $\omega_c(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) + \omega_c = \omega_c(\vec{k}_1) + \omega_c(\vec{k}_2)$, после чего интегрирование по углу между \vec{k}_1 и \vec{k}_2 даёт множитель $\omega_c(k_3)/(s^2 k_1 k_2)$. Далее переходим к интегрированию по k_1, k_2 :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{s^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{k_1 k_2 dk_1 dk_2}{(\omega_c^2 + s^2 k_1^2)(\omega_c^2 + s^2 k_2^2) \left[\sqrt{\omega_c^2 + s^2 k_1^2} + \sqrt{\omega_c^2 + s^2 k_1^2} - \omega_c \right]} = \\ & = \frac{1}{s^6} \int_{\omega_c}^\infty \int_{\omega_c}^\infty \frac{dx dy}{xy(x+y-\omega_c)} = \frac{\pi^2}{6s^6 \omega_c} \sim \frac{1}{\sqrt{T - T_c}}. \end{aligned} \quad (75)$$

Таким образом, с приближением к точке перехода затухание критических колебаний возрастает по закону $g^2 T^2 / (\sqrt{|T - T_c|})$, где $g \sim V_{c,c,c,c}(0, 0, 0, 0)$ – четырёхвершинное взаимодействие, определяющее взаимодействие критических колебаний.

Как следует из полученной формулы, затухание критических колебаний возрастает с приближением к точке фазового перехода. Сравнение с экспериментом на BaTiO_3 показывает [3], что в непосредственной близости к точке перехода затухание оказывается больше того, что даёт соотношение (70). Наблюдаемое расхождение очевидным образом связано с неприменностью теории возмущений вблизи точки фазового перехода.

Если же обратиться к экспериментам, относящимся к SrTiO_3 и KTaO_3 , тогда теоретические данные могут быть согласованы с экспериментальными в достаточно широком интервале температур вблизи от точки фазового перехода [3].

§ 8. Затухание звука в сегнетоэлектриках

Для обычных кристаллов затухание высокочастотного звука с заданной частотой ω при температуре больше дебаевской определяется формулой Ландау–Румера:

$$\Gamma_{\text{ЛР}} \sim \frac{\omega T}{M c_{3\text{В}}^2}.$$

В сегнетоэлектрических кристаллах поглощение звука определяется возможностью распада или присоединения звукового кванта на два критических фонона, что определяется стрикционным гамильтонианом (68).

Уравнение акустических колебаний фактически совпадает с уравнением Дайсона, записанного для запаздывающей функции Грина (10).

При этом мнимая часть поляризационного оператора для акустической ветви записывается аналогично (71): $\text{Im}\Pi_{aa}^{\alpha,\beta}(\omega) =$

$$= \omega T Q^{\alpha\gamma\mu\nu} Q^{\beta\gamma'\mu'\nu'} k^\gamma k^{\gamma'} \sum_{\vec{p}} \left\{ \frac{\Gamma_t^{\mu\mu'}(\vec{p}) \Gamma_t^{\nu\nu'}(\vec{p}-\vec{k})}{(\omega_c(p))^2 (\omega_c(\vec{p}-\vec{k}))^2} \times \right. \\ \left. \times \left[\delta(\omega + \omega_c(\vec{p}-\vec{k}) - \omega_c(\vec{p})) + \frac{1}{2} \delta(\omega - \omega_c(\vec{p}-\vec{k}) - \omega_c(\vec{p})) \right] \right\}. \quad (76)$$

Здесь использованы обозначения (72) для произведений векторов поляризации поперечных критических колебаний.

При малых $k \ll \omega_c/s$ аргумент первой δ -функции в правой части (76) равен $\omega - k\vec{u}_c(p)$, где $\vec{u}_c(p) = s^2 p / \omega_c(\vec{p})$.

Коэффициент затухания звука

$$\gamma(\omega) = \frac{\omega}{\rho k^2} \text{Im}\Pi(k = \frac{\omega}{c}, \omega), \quad (77)$$

так что, отвлекаясь от угловых интегралов, дело сводится к вычислению интеграла по импульсу критического фонона:

$$\gamma(\omega) \sim \omega T c \frac{\Lambda^2}{4\pi \rho s^2} \int_{p_0}^{\infty} \frac{p dp}{(\sqrt{\omega_c^2 + s^2 p^2} - \omega) (\omega_c^2 + s^2 p^2)}, \quad (78)$$

где минимальное значение p_0 определяется из условия

$$\sqrt{\omega_c^2 + s^2 p_0^2} - \omega = \sqrt{\omega_c^2 + s^2 (p_0 - k)^2}.$$

В результате естественной замены переменной $z = \sqrt{\omega_c^2 + s^2 p^2}$ вместо (77) получим

$$\gamma(\omega) \sim Tc \frac{\Lambda^2}{4\pi\rho s^2} \ln \left[\frac{Z_+(\beta, \tilde{\omega})}{Z_-(\beta, \tilde{\omega})} \right], \quad (79)$$

где $\tilde{\omega} = \omega/(2\omega_c)$, $\beta = s/c$, ρ – плотность, c – скорость звука;

$$Z_{\pm} = \pm \tilde{\omega} \sqrt{\beta^2 - 1} + \beta \sqrt{\tilde{\omega}^2 (\beta^2 - 1) + 1}.$$

Поглощение отсутствует, когда $c > s$, т. е. при $\beta < 1$.

Во всех остальных случаях при $\omega = ck < sk$ коэффициент поглощения зависит от отношения $\tilde{\omega} = \omega/(2\omega_c)$ и от параметра $\beta = s/c$ [5]. (См. рис. 3.)

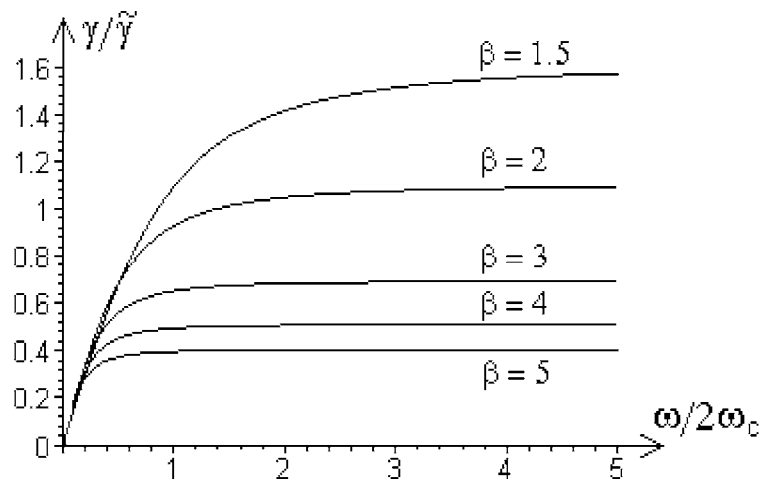


Рис. 3. Зависимость безразмерного коэффициента поглощения звука от отношения $\omega/2\omega_c$

Так, при $s > c$ вдали от точки перехода, когда $\omega \ll \omega_c$,

поглощение пропорционально первой степени частоты:

$$\gamma(\omega) \sim Tc \frac{\Lambda^2}{2\pi\rho s^2} \frac{\omega}{\omega_c} \sqrt{1 - \frac{c^2}{s^2}}. \quad (80)$$

В обратном предельном случае $\omega \gg \omega_c$, но по-прежнему $s > c$, поглощение стремится к постоянному пределу:

$$\gamma(\omega) \sim Tc \frac{\Lambda^2}{4\pi\rho s^2} \ln \left[\frac{(s+c)}{(s-c)} \right]. \quad (81)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sham L.J.* // Phys. Rev. 1967. **156**, 494.
2. *Балагуров Б.Я., Вакс В.Г.* // ЖЭТФ. 1969. **57**, 1646.
3. *Балагуров Б.Я., Вакс В.Г., Шкловский Б.И.* // ФТТ. 1970. **12**, 89.
4. *Балагуров Б.Я.* // ЖЭТФ. 1971. **61**, 1627.