ЛЕКЦИЯ III

ТЕОРИЯ ЭНСКОГА

Содержание

Вычисление кинетических коэффициентов теплопроводности κ и вязкости (η) на основе уравнения Больцмана приводит к результатам, которые не зависят от плотности, что является непосредственным следствием учёта только парных столкновений, которые считаются происходящими в одной и той же точке пространства и тот же момент времени. Получающиеся таким образом значения κ_0 и η_0 являются нулевыми членами разложения по газовому параметру – отношению радиуса действия потенциала к среднему расстоянию между частицами. Фактически разложение происходит по параметру $r_0^3 N/V$:

$$\kappa \approx \kappa_0 \left(1 + b r_0^3 N/V + ...\right), \quad \eta \approx \eta_0 \left(1 + c r_0^3 N/V + ...\right), \tag{1}$$

где b и c – численные постоянные порядка единицы.

Теория Энскога позволяет определить эти коэффициенты в простейшей модели газа из твёрдых шаров.

§ 1. **Уравнение Энскога**

Запишем интеграл столкновений Больцмана через интеграл от дифференциального сечения рассеяния $\sigma(\chi; g)$, зависящего от угла рассеяния χ и относительной скорости $g = g_0 = |\vec{v}_1 - \vec{v}| = |\vec{v}_1' - \vec{v}'|$: $St(f) =$

$$= \int g d\vec{v}_1 \int \sigma(\chi; g) \left[f(\vec{r}, \vec{v}'; t) f(\vec{r}, \vec{v}_1'; t) - f(\vec{r}, \vec{v}; t) f(\vec{r}, \vec{v}_1; t) \right] d\vec{\Omega}, \tag{2}$$

где $d\vec{\Omega} = \sin\chi d\Phi$ – элемент телесного угла в направлении рассеяния, $\sigma(\chi; g)$ – дифференциальное сечение.

Вместо угла рассеяния χ и азимутального угла Φ удобно ввести углы (θ, Φ), которые определяют направление единичного вектора $\vec{e}$, направленного вдоль линии, соединяющей точку при $r_{\min}$ с центром рассеяния (рис. 1).

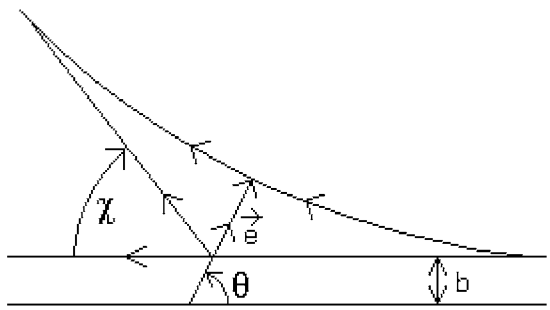

Рис. 1. Траектория частицы

В соответствии с рис. 1 имеем

$$\chi = \pi - 2\theta, \quad \theta = \arccos\left(\frac{\vec{e}\vec{g}_0}{|\vec{g}_0|}\right), \quad d^2\vec{e} = \sin\theta d\theta d\Phi, \tag{3}$$

где $\vec{g}_0 = \vec{v}_1 - \vec{v}$ – вектор относительной скорости до рассеяния.

Эти формулы позволяют выразить интеграл по направлениям угла рассеяния через интеграл по направлениям угла θ:

$$\int \sigma(\chi; g) d\vec{\Omega} = \int 4\sigma(\pi - 2\theta; g) \cos\theta d^2\vec{e}. \tag{4}$$

При этом конечные скорости $\vec{v}^{\,\prime}$ и $\vec{v}_1^{\,\prime}$ выражаются через начальные скорости с помощью единичного вектора $\vec{e}$, а также вектора относительной скорости $\vec{g}_0 = \vec{v}_1 - \vec{v}$ в начальном состоянии:

$$\vec{v}^{\,\prime} = \vec{v} + \vec{e}\,(\vec{g}_0\vec{e})\,, \quad \vec{v}_1^{\,\prime} = \vec{v}_1 - \vec{e}\,(\vec{g}_0\vec{e})\,. \tag{5}$$

Непосредственная проверка показывает, что из этих соотношений следуют законы сохранения энергии и импульса. Кроме того, можно показать, что проекции относительных скоростей до и после столкновения на направление $\vec{e}$ отличаются знаком, в то время как их составляющие, перпендикулярные $\vec{e}$, равны:

$$\left(\vec{v}_1^{\,\prime} - \vec{v}^{\,\prime}, \vec{e}\right) = -\,(\vec{g}_0\vec{e})\,, \quad \left[\vec{v}_1^{\,\prime} - \vec{v}^{\,\prime}, \vec{e}\right] = [\vec{v}_1 - \vec{v}, \vec{e}]\,. \tag{6}$$

Таким образом, интеграл столкновений Больцмана (2) может быть выражен через интегралы по скорости налетающей частицы и по направлению вектора $\vec{e}$.

Особенно простой вид имеет интеграл столкновений для частного случая парного столкновения твёрдых шаров, когда дифференциальное сечение рассеяния равно $a^2/4$, где a – диаметр твёрдого шара, и не зависит от угла рассеяния. При этом вектор $\vec{e}$ приобретает смысл единичного вектора, совпадающего по направлению с радиусом-вектором, проведённым из точки соприкосновения шаров в момент соударения в центр выделенного налетающего шара. При этом ясно, что угол между $\vec{e}$ и вектором начальной относительной скорости не должен превышать 90^0.

В соответствии с этим интеграл столкновений Больцмана (2), записанный через интегралы от угла поворота вектора $\vec{e}$, приобретает следующий вид:

$$St(f) = a^2 \int d\vec{v}_1 \int \{(\vec{g}_0\vec{e})\,\Theta\,(\vec{g}_0\vec{e}) \times$$
$$\times \left[f(\vec{r}, \vec{v}^{\,\prime}; t) f(\vec{r}, \vec{v}_1^{\,\prime}; t) - f(\vec{r}, \vec{v}; t) f(\vec{r}, \vec{v}_1; t)\right]\Big\}\, d^2\vec{e}. \tag{7}$$

В теории Энскога сохраняется предположение о превалирующей роли парных столкновений. Однако вследствие конечности размеров твёрдых сфер столкновения между ними являются нелокальными, в связи с чем пространственные аргументы одночастичных функций распределения должны быть разнесены на расстояние, по порядку величины равное диаметру a. В конкретной форме для "уходной" части необходимо произвести замену:

$$f(\vec{r},\vec{v};t)f(\vec{r},\vec{v}_1;t) \to f(\vec{r},\vec{v};t)f(\vec{r}-a\vec{e},\vec{v}_1;t), \tag{8a}$$

а для "приходной" части необходимо произвести аналогичное преобразование:

$$f(\vec{r},\vec{v}^{\,\prime};t)f(\vec{r},\vec{v}_1^{\,\prime};t) \to f(\vec{r},\vec{v}^{\,\prime};t)f(\vec{r}+a\vec{e},\vec{v}_1^{\,\prime};t). \tag{8b}$$

Здесь учтено, что в случае обратного столкновения единичный вектор $\vec{e}^{\,\prime} = -\vec{e}$.

Необходимо также помнить, что вероятность столкновений возрастает за счёт того, что шары конечных размеров в среднем занимают объём, уменьшенный на величину их собственного суммарного объёма. В соответствии с этим интеграл столкновений приобретает геометрический множитель Y^E, который зависит от плотности частиц (n) в точке соприкосновения молекул. Поэтому для "приходной" и "уходной" части соответствующий множитель имеет следующую функциональную форму:

$$Y^E = Y^E[n(\vec{r} \mp \frac{a\vec{e}}{2};t)].$$

Здесь верхний знак относится к "приходной", а нижний – к "уходной" части интеграла столкновений.

Таким образом, интеграл столкновений в форме Энскога имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} St(f) = a^2 \int d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0\vec{e})\,\Theta\,(\vec{g}_0\vec{e}) \times \\ \times \left\{ Y^E \left[n(\vec{r}+\frac{a\vec{e}}{2});t \right] f(\vec{r},\vec{v}^{\,\prime};t)f(\vec{r}+a\vec{e},\vec{v}_1^{\,\prime};t) - \right. \\ \left. - \, Y^E \left[n(\vec{r}-\frac{a\vec{e}}{2};t) \right] f(\vec{r},\vec{v};t)f(\vec{r}-a\vec{e},\vec{v}_1;t) \right\} d^2\vec{e}. \end{aligned} \tag{9}$$

Следует заметить, что стоящие под знаком интеграла одночастичные функции распределения по-прежнему относятся к одному и тому же моменту времени, что соответствует предположению о мгновенной передаче импульса в момент столкновения.

§ 2. Законы сохранения

В нашей задаче плотность полной энергии и плотность импульса определяется исключительно кинетической энергией и импульсами сталкивающихся шаров. По этой причине скорость изменения плотности числа частиц, импульса и энергии определяются так же, как и для уравнения Больцмана:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \psi_\alpha(\vec{v}) f(\vec{r},\vec{v};t)d\vec{v}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\int v_k \psi_\alpha(\vec{v}) f(\vec{r},\vec{v};t)d\vec{v}\right\} = \\ = \int \psi_\alpha(\vec{v}) St(f) d\vec{v}, \quad \psi_\alpha = \left[1, \vec{v}, \frac{v^2}{2}\right]. \tag{10}$$

Однако в нашем случае результат интегрирования в правой части оказывается равным нулю только при $\alpha = 0$, то есть закон сохранения числа частиц имеет обычный вид.

Для того чтобы записать законы сохранения импульса и энергии, запишем правую часть соотношения (10) в виде разложения по газовому параметру – отношению объёма сталкивающихся шаров к среднему расстоянию между частицами:

$$\int \psi_\alpha(\vec{v}) St(f) d\vec{v} = \sum_{k=1}^{6} I_\alpha^k + O(\nabla^3),$$

где разложение ведётся с точностью до вторых производных по пространственным координатам: $I_\alpha^k = \int \psi_\alpha(\vec{v}) J^{(k)})(\vec{r},\vec{v};t)d\vec{v}$,

$$J^{(1)}(\vec{r},\vec{v};t) = a^2 Y^E\left(n(\vec{r});t\right) \int d\vec{v}_1 \int \left(\vec{g}_0\vec{e}\right)\Theta\left(\vec{g}_0\vec{e}\right) \times \\ \times \left\{f(\vec{r},\vec{v}^{\,\prime};t) f(\vec{r},\vec{v}_1^{\,\prime};t) - f(\vec{r},\vec{v};t) f(\vec{r},\vec{v}_1;t)\right\} d^2\vec{e}. \tag{11a}$$

$$J^{(2)}(\vec{r},\vec{v};t) = a^3 Y^E\left(n(\vec{r});t\right)\int d\vec{v}_1 \int \left(\vec{g}_0\vec{e}\right)\Theta\left(\vec{g}_0\vec{e}\right)\times$$

$$\times e_k\left\{f(\vec{r},\vec{v}^{\,\prime};t)\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v}_1^{\,\prime};t)}{\partial r_k} + f(\vec{r},\vec{v};t)\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v}_1;t)}{\partial r_k}\right\}d^2\vec{e}. \qquad (11b)$$

$$J^{(3)}(\vec{r},\vec{v};t) = \frac{a^3}{2}\frac{\partial Y^E\left(n(\vec{r});t\right)}{\partial r_k}\int d\vec{v}_1 \int e_k\left(\vec{g}_0\vec{e}\right)\Theta\left(\vec{g}_0\vec{e}\right)\times$$

$$\times\left\{f(\vec{r},\vec{v}^{\,\prime};t)f(\vec{r},\vec{v}_1^{\,\prime};t) - f(\vec{r},\vec{v};t)f(\vec{r},\vec{v}_1;t)\right\}d^2\vec{e}. \qquad (11c)$$

$$J^{(4)}(\vec{r},\vec{v};t) = \frac{a^4}{2}Y^E\left(n(\vec{r});t\right)\int d\vec{v}_1 \int \left(\vec{g}_0\vec{e}\right)\Theta\left(\vec{g}_0\vec{e}\right)\times$$

$$\times e_k e_s\left\{f(\vec{r},\vec{v}^{\,\prime};t)\frac{\partial^2 f(\vec{r},\vec{v}_1^{\,\prime};t)}{\partial r_k\partial r_s} - f(\vec{r},\vec{v};t)\frac{\partial^2 f(\vec{r},\vec{v}_1;t)}{\partial r_k\partial r_s}\right\}d^2\vec{e}. \quad (11d)$$

$$J^{(5)}(\vec{r},\vec{v};t) = \frac{a^4}{2}\frac{\partial Y^E\left(n(\vec{r});t\right)}{\partial r_s}\int d\vec{v}_1 \int e_s e_k\left(\vec{g}_0\vec{e}\right)\Theta\left(\vec{g}_0\vec{e}\right)\times$$

$$\times\left\{f(\vec{r},\vec{v}^{\,\prime};t)\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v}_1^{\,\prime};t)}{\partial r_k} + f(\vec{r},\vec{v};t)\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v}_1;t)}{\partial r_k}\right\}d^2\vec{e}. \qquad (11\text{e})$$

$$J^{(6)}(\vec{r},\vec{v};t) = \frac{a^4}{8}\frac{\partial^2 Y^E\left(n(\vec{r});t\right)}{\partial r_k\partial r_s}\int d\vec{v}_1 \int e_s e_k\left(\vec{g}_0\vec{e}\right)\Theta\left(\vec{g}_0\vec{e}\right)\times$$

$$\times\left\{f(\vec{r},\vec{v}^{\,\prime};t)f(\vec{r},\vec{v}_1^{\,\prime};t) - f(\vec{r},\vec{v};t)f(\vec{r},\vec{v}_1;t)\right\}d^2\vec{e}. \qquad (11f)$$

В силу антисимметрии выражений ($11a$) и ($11f$) относительно замены начального и конечного состояний они обращаются в нуль после интегрирования по начальным скоростям $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$, т. е. $I^1_{(\alpha)} = I^6_{(\alpha)} = 0$. Остальные четыре слагаемых преобразуются к полной пространственной производной, так что законы сохранения приобретают обычный вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int \psi_\alpha(\vec{v})f d\vec{v}\right\} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\int v_k\psi_\alpha(\vec{v})f d\vec{v}\right\} + \mathrm{div}\vec{j}^{(V)}_\alpha = 0, \quad (12)$$

где $\vec{j}^{(V)}_\alpha$ – потенциальная часть потока, определяемая через аномальные слагаемые (11) интеграла столкновений Энскога.

Для нахождения потенциальной части плотности потока импульса и энергии преобразуем интегралы, содержащие произведения функций распределения, относящихся к конечным состояниям, к аналогичным слагаемым, зависящим от начальных скоростей. Так, в интеграле $I_\alpha^{(2)}$ слагаемое, содержащее $\vec{e}f(\vec{v}^{\,\prime})\partial f(\vec{v}_1^{\,\prime})/\partial\vec{r}$, преобразуется к слагаемому $\vec{e}f(\vec{v})\partial f(\vec{v}_1)/\partial\vec{r}$ с помощью перехода от конечных состояний к начальным $\vec{v}^{\,\prime} \to \vec{v}$, $\vec{v}_1^{\,\prime} \to \vec{v}_1$, $\vec{e}^{\,\prime} \to -\vec{e}$. В результате слагаемое $I_\alpha^{(2)}$ преобразуется к виду

$$I_\alpha^{(2)} = \frac{a^3 Y^E}{3} \int d\vec{v} d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0\vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0\vec{e}) \times$$
$$\times\, e_k \left\{ \left[\psi_\alpha(\vec{v}) - \psi_\alpha(\vec{v}^{\,\prime})\right] f(\vec{r},\vec{v};t) \frac{\partial f(\vec{r},\vec{v}_1;t)}{\partial r_k} \right\} d^2\vec{e}, \qquad (13)$$

где $\vec{v}^{\,\prime} = \vec{v} + \vec{e}\,(\vec{g}_0\vec{e})$.

Далее произведём новую замену переменных $(\vec{v},\vec{v}_1) \to (\vec{v}_1,\vec{v})$ и заметим, что в силу законов сохранения $\psi_\alpha(\vec{v}) - \psi_\alpha(\vec{v}^{\,\prime}) = \psi_\alpha(\vec{v}_1^{\,\prime}) - \psi_\alpha(\vec{v}_1)$. В результате полусумма полученных эквивалентных выражений приобретает вид интеграла от полной пространственной производной:

$$I_\alpha^{(2)} = \frac{a^3 Y^E}{2} \int d\vec{v} d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0\vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0\vec{e}) \times$$
$$\times\, e_k \left\{ \left[\psi_\alpha(\vec{v}) - \psi_\alpha(\vec{v}^{\,\prime})\right] \frac{\partial}{\partial r_k} \left(f(\vec{r},\vec{v};t) f(\vec{r},\vec{v}_1;t)\right) \right\} d^2\vec{e}. \qquad (14)$$

Аналогично преобразуются остальные три слагаемых:

$$I_\alpha^{(3)} = \frac{a^3}{2} \int d\vec{v} d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0\vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0\vec{e}) \times$$
$$\times\, e_k \frac{\partial Y^E}{\partial r_k} \left\{ \left[\psi_\alpha(\vec{v}) - \psi_\alpha(\vec{v}^{\,\prime})\right] f(\vec{r},\vec{v};t) f(\vec{r},\vec{v}_1;t) \right\} d^2\vec{e}, \qquad (15)$$

$$I_\alpha^{(4)} = \frac{a^3 Y^E}{4} \int d\vec{v} d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0\vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0\vec{e})\, e_k e_s \times$$

$$\times \left\{ \left[\psi_\alpha(\vec{v}) - \psi_\alpha(\vec{v}\,') \right] \frac{\partial}{\partial r_s} \left[f(\vec{v}) f(\vec{v}_1) \frac{\partial}{\partial r_k} \ln\left(\frac{f(\vec{v})}{f(\vec{v}_1)} \right) \right] \right\} d^2\vec{e},$$

$$I_\alpha^{(5)} = \frac{a^3}{4} \int d\vec{v} d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0 \vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0 \vec{e}) \left[\psi_\alpha(\vec{v}) - \psi_\alpha(\vec{v}\,') \right] \times$$

$$\times \left\{ e_s \frac{\partial Y^E}{\partial r_s} f(\vec{v}) f(\vec{v}_1) e_k \frac{\partial}{\partial r_k} \ln\left(\frac{f(\vec{v})}{f(\vec{v}_1)} \right) \right\} d^2\vec{e}. \qquad (16)$$

Теперь уже нетрудно проверить, что потенциальные части потоков имеют вид

$$\vec{j}_\alpha^V = \frac{m a^3 Y^E}{2} \int d\vec{v} d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0 \vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0 \vec{e}) \times$$

$$\times\, \vec{e} \left\{ \left[\psi_\alpha(\vec{v}) - \psi_\alpha(\vec{v}\,') \right] f(\vec{r}, \vec{v}; t) f(\vec{r}, \vec{v}_1; t) \right\} d^2\vec{e} \,+$$

$$+ \frac{m a^4 Y^E}{4} \int d\vec{v} d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0 \vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0 \vec{e}) \left[\psi_\alpha(\vec{v}) - \psi_\alpha(\vec{v}\,') \right] \times$$

$$\times\, \vec{e} \left\{ f(\vec{r}, \vec{v}; t) f(\vec{r}, \vec{v}_1; t) e_k \frac{\partial}{\partial r_k} \ln\left(\frac{f(\vec{v})}{f(\vec{v}_1)} \right) \right\} d^2\vec{e}. \qquad (17)$$

Функциональная зависимость $Y^E(n)$ от плотности может быть получена, если вычислить диагональные поправки к плотности потока импульса Π_{ij}, поскольку в условии термодинамического равновесия давление равно $Sp\Pi_{ij}/3$. Таким образом, поправка к уравнению состояния идеального газа, состоящего из твёрдых шаров, выражается через следующий интеграл:

$$\Delta p = \frac{m a^3 Y^E}{6} \int d\vec{v} d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0 \vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0 \vec{e}) \times$$

$$\times \left\{ \left[(\vec{v}\,' \vec{e}) - (\vec{v} \vec{e}) \right] f_0(\vec{v}) f_0(\vec{v}_1) \right\} d^2\vec{e} =$$

$$= \frac{\pi m a^3 Y^E}{9} \int d\vec{v} d\vec{v}_1 f_0(\vec{v}) f_0(\vec{v}_1) \vec{g}_0^{\,2} d\vec{v} d\vec{v}_1 = \frac{2\pi m T n^2 a^3 Y^E}{3}. \qquad (18)$$

Здесь и ниже в качестве нулевого приближения $f_0(\vec{v})$ используется максвелловская функция распределения, равная произведению плотности на функцию распределения по скоростям, нормированную на единицу:

$$f_0(\vec{v}) = n\varphi_0(v) = n\left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right). \qquad (19)$$

§ 3. Линеаризация оператора столкновений

Для нахождения коэффициентов переноса (вязкости и теплопроводности) произведём линеаризацию интеграла столкновений (8) с помощью подстановки:

$$f(\vec{r},\vec{v};t) = n\varphi_0(v) + f_1(\vec{r},\vec{v};t), \quad n(\vec{r};t) = n + n_1(\vec{r};t). \qquad (20)$$

При этом кинетическое уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_k\frac{\partial f_1}{\partial r_k} = na^2 Y^E(n)\int d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0\vec{e})\,\Theta\,(\vec{g}_0\vec{e}) \times$$
$$\times\left\{\left[f_1(\vec{r},\vec{v}^{\,\prime};t)\varphi(\vec{v}_1^{\,\prime}) + f_1(\vec{r}+a\vec{e},\vec{v}_1^{\,\prime};t)\varphi(\vec{v}^{\,\prime})\right] -\right.$$
$$\left.- \left[f_1(\vec{r},\vec{v};t)\varphi(\vec{v}_1) + f_1(\vec{r}-a\vec{e},\vec{v}_1;t)\varphi(\vec{v})\right]\right\} d^2\vec{e} +$$
$$+ n^2a^2\frac{\partial Y^E(n)}{\partial n}\int d\vec{v}_1\int (\vec{g}_0\vec{e})\,\Theta\,(\vec{g}_0\vec{e}) \times$$
$$\times\left\{\left[n_1(\vec{r}+\frac{a\vec{e}}{2};t) - n_1(\vec{r}-\frac{a\vec{e}}{2};t)\right]\varphi(\vec{v})\varphi(\vec{v}_1)\right\} d\vec{e}\,. \qquad (21)$$

Здесь $n_1(\vec{r};t) = \int f_1(\vec{r},\vec{v};t)d\vec{v}$, $Y^E(n)$ – равновесное значение, определяемое поправкой к уравнению состояния согласно (18).

Перепишем кинетическое уравнение (21) в компонентах Фурье по пространственным переменным:

$$\frac{\partial f_{\vec{q}}}{\partial t} + i(\vec{v}\vec{q})f_{\vec{q}} = na^2Y^E(n)\int d\vec{v}_1\int (\vec{g}_0\vec{e})\,\Theta\,(\vec{g}_0\vec{e}) \times$$
$$\times\left\{\left[f_{\vec{q}}(\vec{v}^{\,\prime};t)\varphi(\vec{v}_1^{\,\prime}) + f_{\vec{q}}(\vec{v}_1^{\,\prime};t)e^{ia(\vec{q}\vec{e})}\varphi(\vec{v}^{\,\prime})\right] -\right.$$
$$\left.- \left[f_{\vec{q}}(\vec{v};t)\varphi(\vec{v}_1) + e^{-ia(\vec{q}\vec{e})}f_{\vec{q}}(\vec{v}_1;t)\varphi(\vec{v})\right]\right\} d^2\vec{e} +$$

$$+ n^2 a^2 \frac{\partial Y^E(n)}{\partial n} \int d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0 \vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0 \vec{e}) \times$$

$$\times \left\{ \left[e^{ia(\vec{q}\vec{e})/2} - e^{-ia(\vec{q}\vec{e})/2} \right] \int f_{\vec{q}}(\vec{v}_3; t) d\vec{v}_3 \varphi(\vec{v}) \varphi(\vec{v}_1) \right\} d\vec{e}\,. \tag{22}$$

Существенным отличием полученного уравнения от линеаризованного уравнения Больцмана является зависимость правой части (22) от волнового вектора $\vec{q}$.

В пределе $qa \ll 1$ правая часть (22) допускает разложение по степеням q:

$$St_q(f_q) = nY^E(n) St_B(f_q) - iq_k St_k^{(1)}(f_q) - q_k q_s St_{k,s}^{(2)}(f_q), \tag{23}$$

где $St_B(f_q)$ – линеаризованный оператор столкновений Больцмана:

$$St_B(f_q) = a^2 \int d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0 \vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0 \vec{e}) \times$$

$$\times \left[f_{\vec{q}}(\vec{v}^{\,\prime}; t) \varphi(\vec{v}_1^{\,\prime}) + f_{\vec{q}}(\vec{v}_1^{\,\prime}; t) \varphi(\vec{v}^{\,\prime}) - \right.$$

$$\left. - f_{\vec{q}}(\vec{v}; t) \varphi(\vec{v}_1) - f_{\vec{q}}(\vec{v}_1; t) \varphi(\vec{v}) \right] d^2\vec{e}; \tag{24}$$

$$St_k^{(1)}(f_q) = -na^3 Y^E(n) \int d\vec{v}_1 \int e_k\, (\vec{g}_0 \vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0 \vec{e}) \times$$

$$\times \left[f_{\vec{q}}(\vec{v}_1^{\,\prime}; t) \varphi(\vec{v}^{\,\prime}) + f_{\vec{q}}(\vec{v}_1; t) \varphi(\vec{v}) \right] d^2\vec{e} -$$

$$- n^2 a^3 \frac{\partial Y^E(n)}{\partial n} \int d\vec{v}_1 \int (\vec{g}_0 \vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0 \vec{e}) \int f_{\vec{q}}(\vec{v}_3; t) d\vec{v}_3 \varphi(\vec{v}) \varphi(\vec{v}_1) d\vec{e}; \tag{25}$$

$$St_{k,s}^{(2)}(f_q) = \frac{Y^E a^4}{2} \int d\vec{v}_1 \int e_k e_s\, (\vec{g}_0 \vec{e})\, \Theta\, (\vec{g}_0 \vec{e}) \times$$

$$\times \left[f_{\vec{q}}(\vec{v}_1^{\,\prime}; t) \varphi(\vec{v}^{\,\prime}) - f_{\vec{q}}(\vec{v}_1; t) \varphi(\vec{v}) \right] d^2\vec{e}. \tag{26}$$

§ 4. Поправки к кинетическим коэффициентам

В предыдущих лекциях было показано, что существует соответствие между пятью собственными значениями оператора столкновений, каждый из которых обращается в нуль в длинноволновом пределе $q \to 0$, и собственными значениями линеаризованных уравнений гидродинамики.

Кинетические коэффициенты, соответствующие сдвиговой вязкости η и теплопроводности κ, выражаются через коэффициенты разложения собственных значений оператора столкновений по степеням q^2:

$$\lambda_{3,4} = -\frac{\lambda q^2}{\rho}, \quad \lambda_5 = -\frac{\kappa q^2}{\rho C_p}. \tag{27}$$

Здесь и ниже $\lambda_{3,4}$ – собственные значения оператора столкновений, отвечающие собственным функциям, пропорциональным компонентам скорости, перпендикулярным заданному направлению волнового вектора $\vec{q}$; λ_5 – собственные значения оператора столкновений, соответствующие собственным функциям, пропорциональным кинетической энергии частицы за вычетом её средней энергии при заданной плотности. С учётом требования ортогональности и нормировки имеем следующие пять собственных функций:

$$\begin{gathered}
\psi_1(\vec{v}) = \varphi(v) = \left(\frac{m}{2\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2T}\right), \\
\psi_i(\vec{v}) = v_i\sqrt{\frac{m}{T}}\varphi(v), \quad (i = 2, 3, 4 \equiv x, y, z), \\
\psi_5(\vec{v}) = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{mv^2}{2T} - \frac{3}{2}\right)\varphi(v).
\end{gathered} \tag{28}$$

Таким образом, наша задача будет состоять в том, чтобы исследовать уравнение на собственные значения:

$$\left[nY^E(n)\hat{S}t_B - iq_k\left(v_k + \hat{S}t_k^{(1)}\right) - q_k q_s \hat{S}t_{k,s}^{(2)}\right]\psi_\alpha = \lambda_\alpha \psi_\alpha \tag{29}$$

с пятью собственными значениями λ_α, которые обращаются в нуль при $q \to 0$.

Для решения задачи запишем разложения собственных значений и собственных функций по степеням вектора $\vec{q}$, который для определённости будем считать направленным вдоль оси x:

$$\lambda_\alpha = -iq\lambda_\alpha^{(1)} - q^2\lambda_\alpha^{(2)} + ...$$

$$\psi_\alpha = \psi_\alpha^{(0)} - iq\psi_\alpha^{(1)} - q^2\psi_\alpha^{(2)} ... \tag{30}$$

С учётом того, что в нулевом приближении имеется пятикратное вырождение, для нахождения первой поправки к нулевому собственному значению необходимо использовать линейную комбинацию известных функций нулевого приближения:
$\tilde{\psi}_\alpha = \sum\limits_{\nu=0}^{5} \mathrm{C}_{\alpha,\nu}\psi_\nu^{(0)}$, после чего получим уравнение первого приближения:

$$\left(v_x + \hat{S}t_x^{(1)}\right)\tilde{\psi}_\alpha = \lambda_\alpha^{(1)}\tilde{\psi}_\alpha. \tag{31}$$

С помощью новых собственных функций определяем поправки второго приближения $\tilde{\lambda}_\alpha^{(2)}$:

$$\tilde{\lambda}_\alpha^{(2)} = -\sum_{n\neq\nu} \frac{\left[v_x + \hat{S}t_x^{(1)}\right]_n^\alpha \left[v_x + \hat{S}t_x^{(1)}\right]_\alpha^n}{\lambda_n}, \tag{32}$$

где $\tilde{\lambda}_n$ – не равные нулю собственные значения больцмановского оператора столкновений. Правую часть (32) запишем в виде суммы по всем номерам собственных значений:

$$\tilde{\lambda}_\alpha^{(2)} = -\lim_{\epsilon\to 0+} \sum_{n(all)} \frac{\left[v_x + \hat{S}t_x^{(1)}\right]_n^\alpha \left[\left(v_x + \hat{S}t_x^{(1)}\right) - \lambda^{(1)}\right]_\alpha^n}{\lambda_n - \epsilon}. \tag{33}$$

Здесь используется система взаимно ортогональных собственных функций, для которых $\left[\left(v_x + \hat{S}t_x^{(1)}\right)\right]_\alpha^\beta = \lambda^{(1)}\delta_{\alpha,\beta}$.

В результате правая часть (32) выражается через матричные элементы гриновской функции $G_B(\epsilon)$, соответствующей оператору столкновений уравнения Больцмана:

$$\tilde{\lambda}_\alpha^{(2)} = - \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \left(v_x + \hat{S}t_x^{(1)} \right) \hat{G}_B(\epsilon) \left[\left(v_x + \hat{S}t_x^{(1)} \right) - \lambda^{(1)} \right] \right\}_\alpha^\alpha, \quad (34)$$

где $\left[\hat{G}_B(\epsilon) \right]_n^n = 1/(\lambda_n - \epsilon)$.

Полученное выражение пропорционально второй степени волнового вектора, так что для написания окончательного ответа к нему следует добавить вклад от квадратичной поправки к больцмановскому оператору столкновений:

$$\lambda_\alpha^{(2)} = \tilde{\lambda}_\alpha^{(2)} + \left\{ \hat{S}t_{x,x}^{(2)} \right\}_\alpha^\alpha. \quad (35)$$

В результате решения системы уравнений (31) оказывается, что два первых собственных значения отличаются знаком и по абсолютному значению равны скорости звука; остальные три собственных значения $\lambda_{3,4,5}^{(1)} = 0$. Собственные функции, отвечающие вязким модам ($\alpha = 3, 4$), совпадают с соответствующими собственными функциями нулевого приближения (28). Пятая собственная функция оказывается пропорциональной энергии одной частицы за вычетом средней энергии при заданном давлении:

$$\psi_5(\vec{v}) = \sqrt{\frac{2}{5}} \left(\frac{mv^2}{2T} - \frac{5}{2} \right) \varphi(v). \quad (36)$$

В результате оказывается возможным записать общие выражения для вязкости и теплопроводности через известные собственные функции, относящиеся к нулевым собственным значениям:

$$\eta^E = \rho \lambda_{3,4}^{(2)} = -\rho \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \left(v_x + \hat{S}t_x^{(1)} \right) \hat{G}_B(\epsilon) \left(v_x + \hat{S}t_x^{(1)} \right) \right\}_\alpha^\alpha + \\ + \rho \left\{ \hat{S}t_{x,x}^{(2)} \right\}_\alpha^\alpha, \quad (\alpha = 3 \quad \text{или} \quad 4); \quad (37)$$

$$\kappa^E = \rho C_p \lambda_5^{(2)} = -\rho C_p \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ \left(v_x + \hat{S}t_x^{(1)} \right) \hat{G}_B(\epsilon) \left(v_x + \hat{S}t_x^{(1)} \right) \right\}_5^5 +$$

$$+ \rho C_p \left\{ \hat{S}t^{(2)}_{x,x} \right\}^5_5 , \tag{38}$$

где ρ – плотность, C_p – теплоёмкость при заданном давлении.

Используя явный вид оператора столкновений (25), удаётся определить результат его действия на собственные функции нулевого приближения (см. Задачу):

$$\left(v_x + \hat{S}t^{(1)}_x(\psi_3(\vec{v}))\right) = \left(1 + \frac{4\pi a^3 n}{15} Y^E\right) (v_x \psi_3(\vec{v})) , \tag{39a}$$

$$\left(v_x + \hat{S}t^{(1)}_x(\psi_5(\vec{v}))\right) = \left(1 + \frac{2\pi a^3 n}{5} Y^E\right) (v_x \psi_5(\vec{v})) . \tag{39b}$$

Используя также сопряжённые выражения, удаётся преобразовать соотношения (37) и (38) к следующему виду:

$$\eta^E = -\rho \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ v_x \hat{G}_B(\epsilon) v_x) \right\}^\alpha_\alpha \left(1 + \frac{4\pi a^3 n}{15} Y^E\right)^2 + \\ + \rho \left\{ \hat{S}t^{(2)}_{x,x} \right\}^\alpha_\alpha , \quad (\alpha = 3 \quad \text{или} \quad 4); \tag{40}$$

$$\kappa^E = -\rho C_p \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ v_x \hat{G}_B(\epsilon) v_x \right\}^5_5 \left(1 + \frac{2\pi a^3 n}{5} Y^E\right)^2 + \\ + \rho C_p \left\{ \hat{S}t^{(2)}_{x,x} \right\}^5_5 . \tag{41}$$

Множители, содержащие нулевую функцию Грина $G_B(\epsilon)$, непосредственно связаны с больцмановскими значениями коэффициентов вязкости и теплопроводности:

$$\eta^B = -\rho \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ v_x \hat{G}_B(\epsilon) v_x) \right\}^3_3 , \quad \kappa^B = -\rho C_p \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{ v_x \hat{G}_B(\epsilon) v_x \right\}^5_5 . \tag{42}$$

Вычисление оставшихся матричных элементов производится непосредственно с помощью соотношения (26):

$$\left\{ \hat{S}t^{(2)}_{x,x} \right\}^3_3 = \left\{ \hat{S}t^{(2)}_{x,x} \right\}^5_5 = n Y^E \frac{4}{15} a^4 \sqrt{\frac{\pi T}{m}} . \tag{43}$$

Таким образом, мы находим первые поправки к кинетическим коэффициентам:

$$\eta^E = \eta^B \left(1 + \frac{4\pi a^3 n}{15} Y^E\right)^2 + \frac{4}{15} a^4 n^2 Y^E \sqrt{\pi m T}; \tag{44}$$

$$\kappa^E = \kappa^B \left(1 + \frac{2\pi a^3 n}{5} Y^E\right)^2 + \frac{2}{3} a^4 n^2 Y^E \sqrt{\frac{\pi T}{m}}. \tag{45}$$

Было показано, что $\eta^B \approx \sqrt{(mT)}/a^2$, так что третье слагаемое в (44) и (45) имеет второй порядок малости по параметру $a^3 n$.

З а д а ч а. Первая поправка к коэффициенту вязкости

Определить дополнительный множитель к коэффициенту первой вязкости.

Р е ш е н и е.

Рассмотрим результат действия первой поправки к оператору столкновений на собственную функцию нулевого приближения $\psi_3(\vec{v}) = v_y \sqrt{m/T} \varphi(v)$:

$$\hat{S}t_x^{(1)}(\psi_3(\vec{v})) = -\frac{n a^3 Y^E \sqrt{m}}{\sqrt{T}} \times$$
$$\times \int d\vec{v}_1 \int e_x \left(\vec{g}_0 \vec{e}\right) \Theta \left(\vec{g}_0 \vec{e}\right) \left(v'_{1,y} + v_{1,y}\right) \varphi(v) \varphi(v_1) d^2 \vec{e}. \tag{46}$$

Для вычисления интеграла по направлениям вектора $\vec{e}$ рассмотрим вспомогательный тензор второго ранга:

$$N_{\alpha,\beta} = \int e_\alpha \left(v'_{1,\beta} + v_{1,\beta}\right) \left(\vec{g}_0 \vec{e}\right) \Theta \left(\vec{g}_0 \vec{e}\right) d^2 \vec{e}. \tag{47}$$

С учётом соотношения $\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{e}(\vec{e}\vec{g}_0)$ правая часть (47) преобразуется к следующему виду:

$$N_{\alpha,\beta} = 2 A_\alpha v_{1,\beta} - B_{\alpha,\beta}, \tag{48}$$

где

$$\vec{A} = \int \vec{e}\,(\vec{g}_0\vec{e})\,\Theta\,(\vec{g}_0\vec{e})\,d^2\vec{e}; \quad B_{\alpha,\beta} = \int e_\alpha e_\beta\,(\vec{g}_0\vec{e})^2\,\Theta\,(\vec{g}_0\vec{e})\,d^2\vec{e}. \tag{49}$$

Из соображений симметрии вектор A направлен вдоль $\vec{g}_0$, а второй интеграл есть линейная комбинация единичного тензора и произведения тензора $g_{0,\alpha}g_{0,\beta}$ на постоянную:

$$\vec{A} = A\vec{g}_0, \quad B_{\alpha,\beta} = B\delta_{\alpha,\beta} + Cg_{0,\alpha}g_{0,\beta}.$$

Постоянную A находим с помощью скалярного умножения на $\vec{g}_0$ и дальнейшего интегрирования в полярной системе координат:

$$A = \frac{1}{g_0^2}\int (\vec{g}_0\vec{e})^2\,\Theta\,(\vec{g}_0\vec{e})\,d^2\vec{e} = \frac{2\pi}{3}. \tag{50}$$

Для нахождения коэффициентов B и C необходимо иметь два соотношения. Одно из них получим с помощью суммирования по двум одинаковым индексам:

$$3B + Cg_0^2 = \int (\vec{g}_0\vec{e})^2\,\Theta\,(\vec{g}_0\vec{e})\,d^2\vec{e} = \frac{2\pi}{3}g_0^2. \tag{51}$$

Второе соотношение находим с помощью умножения слева и справа на $g_{0,\alpha}g_{0,\beta}$:

$$Bg_0^2 + Cg_0^4 = \int (\vec{g}_0\vec{e})^4\,\Theta\,(\vec{g}_0\vec{e})\,d^2\vec{e} = \frac{2\pi}{5}g_0^4. \tag{52}$$

В результате получим

$$B_{\alpha,\beta} = \frac{4\pi}{3}g_{0,\alpha}v_{1,\beta} - \frac{2\pi}{15}\left[g_0^2\delta_{\alpha,\beta} + 2g_{0,\alpha}g_{0,\beta}\right]. \tag{53}$$

Вычисляя x, y-компоненту от этого соотношения, находим

$$\hat{S}t_x^{(1)}(\psi_3(\vec{v})) = -\frac{na^3Y^E\sqrt{m}}{\sqrt{T}}\frac{4\pi}{3}\times$$
$$\times\int\left(v_{1,y}g_{0,x} - \frac{g_{0.x}g_{0,y}}{5}\right)\varphi(v)\varphi(v_1)d\vec{v}_1. \tag{54}$$

После интегрирования по $\vec{v}_1$ первое слагаемое в правой части даёт нуль, а второе слагаемое даёт произведение $v_x v_y$, после чего можно написать

$$v_x \psi_3(\vec{v}) + \hat{S}t_x^{(1)}(\psi_3(\vec{v})) = \left\{1 + \frac{4\pi}{15} n a^3 Y^E\right\} v_x(\psi_3(\vec{v})). \qquad (55)$$

Точно так же можно написать сопряжённое равенство.

Таким образом, мы доказали первую половину общей формулы (40):

$$\eta^E = -\rho \lim_{\epsilon \to 0+} \left\{v_x \hat{G}_B(\epsilon) v_x)\right\}_\alpha^\alpha \left(1 + \frac{4\pi a^3 n}{15} Y^E\right)^2. \qquad (56)$$

Отсюда с помощью определения (42) находим первую поправку к вязкости:

$$\Delta\eta_I = \eta^B \left(1 + \frac{4\pi a^3 n}{15} Y^E\right)^2. \qquad (57)$$

§ 5. **Вторая вязкость**

Уравнения гидродинамики вязкой жидкости в общем случае содержат два коэффициента вязкости η и ζ, которые входят в определение тензора вязких натяжений:

$$\sigma'_{\alpha,\beta} = \eta \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta} \mathrm{div}\vec{u}\right) + \zeta \delta_{\alpha\beta} \mathrm{div}\vec{u}. \qquad (58)$$

В предыдущем параграфе предполагалось, что градиент скорости направлен вдоль оси x, а сама средняя скорость направлена по у, после чего находим плотность потока y-составляющей импульса в направлении x, которая определяет σ'_{xy}. При этом коэффициент первой вязкости определяется диагональными матричными элементами по собственным функциями со скоростями v_y или v_z. Так, поправка второго порядка к первой вязкости, обусловленная нелокальной частью интеграла столкновений, имеет вид

$$\Delta\eta_{II} = \rho \left\{\hat{S}t_{x,x}^{(2)}\right\}_y^y. \qquad (59)$$

Если предположить, что направление средней скорости совпадает с направлением градиента (по x), тогда согласно определению (58) находим соотношение

$$\sigma'_{xx} = \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)\frac{\partial u_x}{\partial x},$$

из которого следует, что диагональные элементы от оператора столкновений по собственным функциями со скоростями вдоль направления градиента определяют также вторую вязкость:

$$\rho\left\{\hat{S}t^{(2)}_{x,x}\right\}^x_x = \left(\frac{4}{3}\Delta\eta_{II} + \zeta\right). \tag{60}$$

Для вычисления матричных элементов $\left\{\hat{S}t^{(2)}_{x,x}\right\}^k_k$ рассмотрим вспомогательный интеграл:

$$K_{k,s} = \int e_k e_s\,(\vec{g}_0\vec{e})\,\Theta\,(\vec{g}_0\vec{e})\left(\vec{v}_1' - \vec{v}_1, \vec{\nu}\right)d^2\vec{e}, \tag{61}$$

где $\vec{\nu}$ – единичный вектор.

Подставляя в (49) явное выражение для разности $\vec{v}_1' - \vec{v}_1 = -\vec{e}(\vec{e}\vec{g}_0)$, получим

$$K_{k,s} = -\int e_k e_s\,(\vec{g}_0\vec{e})^2\,\Theta\,(\vec{g}_0\vec{e})\,(\vec{e}\vec{\nu})\,d^2\vec{e}. \tag{62}$$

Выражение в правой части есть линейная функция компонент вектора $\vec{\nu}$, а по размерности равна квадрату относительной скорости $g^2 = \vec{g}_0^2$. Учитывая также симметрию по индексам (k, s), можно написать

$$K_{k,s} = g_0^2 A\,(\nu_k g_{0,s} + \nu_s g_{0,k}) + \left[B g_{0,k} g_{0,s} + C\delta_{k,s} g_0^2\right](\vec{\nu}\vec{g}_0). \tag{63}$$

Линейная система уравнений, которой подчиняются коэффициенты A, B и C, в правой части содержит интегралы, которые легко вычисляются в полярной системе координат с полярной осью, направленной вдоль вектора $\vec{g}_0$. В результате оказывается, что $A = B = C = -\pi\,/g_0$, так что

$$K_{k,s} = -\frac{\pi}{12}\left\{g_0\,(\nu_k g_{0,s} + \nu_s g_{0,k}) + \left[\frac{g_{0,k} g_{0,s}}{g_0} + \delta_{k,s} g_0\right](\vec{\nu}\vec{g}_0)\right\}. \tag{64}$$

Интересующие нас матричные элементы выражаются через диагональные компоненты $\tilde{K}_{x,x}$ и $\tilde{K}_{y,y}$, в которых единичный вектор $\vec{\nu}$ считается направленным вдоль оси x:

$$\tilde{K}_{x,x} = -\frac{\pi}{12} g_{0,y} \left[\frac{g_{0,x}^2}{g_0} + g_0 \right], \quad \tilde{K}_{yy} = -\frac{\pi}{12} g_{0,y} \left[\frac{g_{0,y}^2}{g_0} + 3g_0 \right]. \quad (65)$$

Учитывая специальное определение матричных элементов:

$$\left\{ \hat{S}t_{x,x}^{(2)} \right\}_\beta^\alpha = \int \psi_\alpha(\vec{v}) \varphi(v)^{-1} \psi_\beta(\vec{v}) d\vec{v}, \quad (66)$$

в соответствии с определениями (28) получим

$$\left\{ \hat{S}t_{x,x}^{(2)} \right\}_y^y = \frac{nmY^E a^4}{2T} \int v_y \tilde{K}_{x,x} \varphi(v) \varphi(v_1) d\vec{v} d\vec{v}_1, \quad (67a)$$

$$\left\{ \hat{S}t_{y,y}^{(2)} \right\}_y^y = \frac{nmY^E a^4}{2T} \int v_y \tilde{K}_{y,y} \varphi(v) \varphi(v_1) d\vec{v} d\vec{v}_1. \quad (67b)$$

Эти интегралы легко вычисляются, если вместо $\vec{v}$ и $\vec{v}_1$ перейти к относительной скорости $\vec{g}$ и скорости центра инерции $\vec{V} = (\vec{v}+\vec{v}_1)/2$. В итоге получим произведения гауссовых интегралов:

$$\left\{ \hat{S}t_{x,x}^{(2)} \right\}_y^y = nY^E a^4 \frac{4}{15} \sqrt{\frac{\pi T}{m}}, \quad \left\{ \hat{S}t_{y,y}^{(2)} \right\}_y^y = nY^E a^4 \frac{4}{5} \sqrt{\frac{\pi T}{m}}. \quad (68)$$

Эти выражения следует подставить в уравнения (59) и (60), после чего находим

$$\Delta\eta_{II} = n^2 Y^E a^4 \frac{4}{15} \sqrt{\pi m T}, \quad \zeta = n^2 Y^E a^4 \frac{4}{9} \sqrt{\pi m T} = \frac{5}{3} \Delta\eta_{II}. \quad (69)$$

Важно отметить, что коэффициент второй вязкости, вычисленный из линеаризованной части уравнения Больцмана, оказывается равным нулю. Точно так же оказывается равным нулю вклад, происходящий от интеграла столкновений $q_k St_k^{(1)}$ первого порядка по пространственной производной.

Вычисленный таким образом коэффициент второй вязкости имеет второй порядок малости по газовому параметру na^3 и имеет своим происхождением наличие второй пространственной производной в интеграле столкновений Энскога.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Резибуа П., Де Леннер М.* Классическая кинетическая теория жидкостей и газов – М.: Мир, 1980. – 424 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Физическая кинетика. – М.: Физматлит, 2001. – 535 с.