

# Олимпиада по теоретической физике

27 апреля 2013 г.

1) Ф.И.О. (полностью):

2) ВУЗ:

3) Факультет:

4) Год поступления:

## 1 Мыльная плёнка (М.Г. Иванов, кафедра теор. физики МФТИ)

Энергия мыльной плёнки, поверхность которой описана функциями  $x^\alpha(\xi^1, \xi^2)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  задаётся функционалом

$$U[x^\alpha(\xi^a)] = 2\sigma \int \sqrt{\det \left( g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^a} \frac{\partial x^\beta}{\partial \xi^b} \right)} d^2\xi.$$

Здесь  $\sigma$  — поверхностное натяжение мыльной воды (коэффициент 2 связан с тем, что у плёнки две стороны).

Из условия минимальности энергии найдите уравнения для равновесной геометрии плёнки.

Как эта модель связана с действием для релятивистской частицы?

Как эта модель связана с действием для релятивистской струны?

## 2 Мембранная пыль (М.Г. Иванов)

Тензор энергии-импульса релятивистской мембраны отличен от нуля на мировой поверхности мембраны, там он пропорционален проектору на касательные направления к мировой поверхности. Проектор — это тензор  $P_{ij}$ , удовлетворяющий условиям

$$P_{ij} = P_{ji}, \quad P_j^i P_k^j = P_k^i.$$

Проектора на касательные направления должен обнулять любой вектор  $v^i$ , ортогональный к поверхности, т.е.

$$P_j^i v^j = 0.$$

Любой вектор  $w^i$  касательный к поверхности под действием того же проектора должен переходить в себя:

$$P_j^i w^j = w^i.$$

Размерность проектора  $P_i^i$  совпадает с размерностью пространства, на которое он проецирует.

Пусть имеется семейство мембран, чьи мировые поверхности задаются как поверхности уровня скалярного поля  $\varphi$ . Такое поле можно назвать мембранной пылью.

- 1) Запишите проектор на поверхности  $\varphi = \text{const}$ . Он должен обнулять градиент  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ . При этом  $P_i^i = 3$ .
- 2) Придумайте действие  $S[\varphi(x^i)]$ , содержащее производные от  $\varphi$  не выше первой, такое, что тензор энергии-импульса пропорционален проектору  $P_{ij}$  на поверхности  $\varphi = \text{const}$ .
- 3) Проварьируйте действие и запишите уравнение поля для поля  $\varphi$ .

### 3 Квантовая частица на поверхности бутылки Клейна (М.Г. Иванов)

Квантовая частица массы  $m$  локализована на поверхности бутылки Клейна. Поверхность бутылки Клейна считать прямоугольником  $a \times b$  ( $a \gg b$ ), длинные стороны которого склеены, как при склейке цилиндра, а короткие — как при склейке листа Мёбиуса.

- 1) Записать граничные условия на границах прямоугольника, соответствующие поверхности бутылки Клейна.
- 2) Найти стационарные состояния (волновые функции и собственные значения энергии).

### 4 Эффект Доплера на карусели (Н.А. Воронов, ИТЭФ, кафедра теор.физики МФТИ)

Карусель вращается с угловой скоростью  $\omega$ , на карусели на одинаковом расстоянии  $R$  от оси в диаметрально противоположных точках укреплены приёмник и передатчик. Как связаны частоты передатчика и приёмника?

### 5 Парастатистика (М.Г. Иванов)

Представим себе, что некоторые тождественные невзаимодействующие квантовые частицы могут находиться в одинаковом состоянии в количестве не большем чем  $p$  (так для фермионов  $p = 1$ , для бозонов  $p = \infty$ ). Найдите среднее число таких частиц  $n(\varepsilon, T, \mu)$  в состоянии с энергией  $\varepsilon > 0$  при температуре  $T$  и химическом потенциале  $\mu$ .

Покажите, что при  $p = 1$  и  $p = \infty$  воспроизводятся распределения Ферми и Бозе.

Какие значения может принимать химический потенциал  $\mu$  для таких частиц? Чему равно  $n(0, T, 0)$

### 6 Квантовый Антизенон. Управление с помощью измерений. (А.Н. Печень, МИАН)

Квантовая система описывается начальным состоянием  $\psi_0$  и гамильтонианом  $\hat{H}$ . На протяжении времени  $t_0$  система подвергается не более чем  $n \gg 1$  идеальным измерениям (могут измеряться разные произвольные наблюдаемые). Идеальное измерение происходит мгновенно, после него система оказывается в собственном состоянии измеряемой наблюдаемой. С какой максимальной вероятностью  $p_{max}$  в результате комбинации измерений и эволюции в момент времени  $t_0$  система будет обнаружена в состоянии  $\psi_1$ ?

Опишите оптимальную последовательность измерений.

$\psi_1 \neq \exp(-i\frac{\hat{H}}{\hbar}t_0)\psi_0$ . Найдите также  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{max}$ .

Решения в пределе  $t_0 \rightarrow 0$  также рассматриваются, но оцениваются в половину общего балла.