ЛЕКЦИЯ II

УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Содержание

Изучается процедура построения системы гидродинамических уравнений, основанная на усреднении уравнения Больцмана. При этом удаётся получить пять уравнений гидродинамики, которые соответствуют пяти законам сохранения. Эта система становится замкнутой, если предположить, что давление и внутренняя энергия системы выражаются через плотность и температуру с помощью тех же уравнений, что и в термодинамике. В общем случае неидеального газа в уравнениях появляются коэффициенты вязкости и теплопроводности, которые следует считать известными из решения кинетического уравнения.

Линеаризация полученных уравнений гидродинамики позволяет получить длинноволновые и низкочастотные моды, соответствующие звуковым, теплопроводностным, а также поперечным вязкостным колебаниям. В заряженной системе продольные звуковые волны превращаются в высокочастотные плазменные колебания, в то время как теплопроводностные ветви не претерпевают качественных изменений.

§ 1. **Общие соотношения**

Рассмотрим уравнения гидродинамики вязкой жидкости или газа. Запишем кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = St(f), \tag{1}$$

где St – оператор столкновений.

Пронормируем функцию распределения таким образом, что интеграл от функции распределения по скоростям есть число частиц в единице объёма $n(\vec{r}, t)$:

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{v}. \tag{2}$$

Произведение $n(\vec{r}, t)m = \rho(\vec{r}, t)$ есть плотность массы.

Среднюю скорость макроскопического движения в данной пространственно-временной точке обозначим через $\vec{u}(\vec{r}, t)$. Она также выражается через функцию распределения:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{1}{n} \int \vec{v} f(\vec{v}, \vec{r}, t) d\vec{v}. \tag{3}$$

Столкновения не меняют ни числа сталкивающихся частиц, ни их суммарной энергии и импульса. Поэтому имеем три интегральных соотношения:

$$\int St f d\vec{v} = 0, \quad \int \epsilon(\vec{v}) St f d\vec{v} = 0, \quad \int \vec{p} St f d\vec{v} = 0. \tag{4}$$

Соответственно этим трём соотношениям получаем пять гидродинамических законов сохранения.

§ 1.1. **Закон сохранения массы**

Проинтегрируем обе части кинетического уравнения по скоростям, предварительно умножив его на массу:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \left(\rho(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) \right). \tag{5}$$

Из этого уравнения следует, что поток массы эквивалентен плотности импульса.

§ 1.2. **Закон сохранения импульса**

Проинтегрируем обе стороны кинетического уравнения по скоростям, предварительно умножив его на импульс $\vec{p} = m\vec{v}$ с фиксированной компонентой α:

$$\frac{\partial(\rho u_\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \quad \text{где} \quad \Pi_{\alpha\beta} = \int m v_\alpha v_\beta f d\vec{v}. \tag{6}$$

Определим среднюю гидродинамическую скорость с помощью соотношения: $\vec{u}(\vec{r},t) = <\vec{v}>$, так что среднее по импульсам от произведения двух скоростей можно выразить через произведения отклонения от средних $\Delta v_\alpha = v_\alpha - <v_\alpha>$:

$$v_\alpha v_\beta = u_\alpha u_\beta + u_\alpha \Delta v_\beta + \Delta v_\alpha u_\beta + \Delta v_\alpha \Delta v_\beta.$$

Усредняя это соотношение по скоростям, получим

$$<v_\alpha v_\beta> = u_\alpha u_\beta + u_\alpha <\Delta v_\beta> + <\Delta v_\alpha> u_\beta +$$

$$+ <\Delta v_\alpha \Delta v_\beta> = u_\alpha u_\beta + <\Delta v_\alpha \Delta v_\beta>.$$

Здесь мы воспользовались очевидным соотношением: $<\Delta\vec{v}> = <\vec{v}> - \vec{u} = 0$.

Все предыдущие выкладки допускают ясную физическую интерпретацию. Выделим флуктуацию скорости с помощью определения (3). Равновесное распределение в участке тела, движущегося как целое со скоростью $\vec{u}(\vec{r},t)$, отличается от равновесного распределения в неподвижном газе лишь преобразованием Галилея. Поэтому скорости молекул $\vec{v}'$ в этой системе связаны со скоростями в исходной системе с помощью соотношения $\vec{v} = \vec{u}(\vec{r},t) + \vec{v}'$, и можно написать

$$\Pi_{\alpha\beta} = \rho(\vec{r},t)\left\langle \left(u_\alpha(\vec{r},t) + v'_\alpha\right)\left(u_\beta(\vec{r},t) + v'_\beta\right)\right\rangle =$$

$$= \rho(\vec{r},t)\left\{u_\alpha(\vec{r},t)u_\beta(\vec{r},t) + \left\langle v_\alpha^{'} v_\beta^{'}\right\rangle\right\}. \qquad (7)$$

Члены $\left\langle u_\alpha(\vec{r},t)v_\beta^{'}\right\rangle$ и $\left\langle u_\beta(\vec{r},t)v_\alpha^{'}\right\rangle$ обращаются в нуль, поскольку все направления скорости молекулы в системе с нулевой средней скоростью равновероятны.

Аналогичным образом получим соотношение:

$$\left\langle v_\alpha^{'} v_\beta^{'}\right\rangle = \frac{1}{3}\delta_{\alpha,\beta}\left\langle\left(\vec{v}^{'}\right)^2\right\rangle = \delta_{\alpha,\beta}\frac{P}{\rho}. \qquad (8)$$

Эта величина называется скалярным давлением, поскольку для идеального газа среднеквадратичная тепловая скорость пропорциональна утроенному давлению.

В случае неидеального газа имеем поправку, зависящую от производных от средней скорости:

$$\Pi_{\alpha\beta} = \rho(\vec{r},t)u_\alpha(\vec{r},t)u_\beta(\vec{r},t) + P\delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha,\beta}^{'}, \qquad (9)$$

где $\sigma_{\alpha,\beta}^{'}$ – тензор вязких натяжений,

$$\sigma_{\alpha,\beta}^{'} = \eta\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha,\beta}\mathrm{div}\vec{u}\right) + \zeta\delta_{\alpha\beta}\mathrm{div}\vec{u}. \qquad (10)$$

Здесь коэффициенты η и ζ называются первой и второй вязкостью.

§ 1.3. Закон сохранения энергии

Проинтегрируем обе стороны кинетического уравнения по скоростям, предварительно умножив его на кинетическую энергию $\epsilon_{\vec{v}} = mv^2/2$:

$$\frac{\partial\left(n(\vec{r},t)\left\langle\epsilon_{\vec{v}}\right\rangle\right)}{\partial t} + \mathrm{div}\vec{Q} = 0, \quad \text{где} \quad \vec{Q} = \int \vec{v}\epsilon_{\vec{v}} f d\vec{v}. \qquad (11)$$

Возникающее в правой части среднее от произведения трёх скоростей выразим через произведения отклонения от средних $\Delta v_\alpha = v_\alpha - < v_\alpha >$:

$$v_\alpha v_\beta v_\gamma = u_\alpha u_\beta u_\gamma + u_\alpha \Delta v_\beta \Delta v_\gamma + u_\beta \Delta v_\gamma \Delta v_\alpha + u_\gamma \Delta v_\alpha \Delta v_\beta +$$

$$+ u_\alpha u_\beta \Delta v_\gamma + u_\beta u_\gamma \Delta v_\alpha + u_\gamma u_\alpha \Delta v_\beta + \Delta v_\alpha \Delta v_\beta \Delta v_\gamma. \qquad (12)$$

Усредняя это соотношение по скоростям, получим

$$< v_\alpha v_\beta v_\gamma > = u_\alpha u_\beta u_\gamma + u_\alpha < \Delta v_\beta \Delta v_\gamma > + u_\beta < \Delta v_\gamma \Delta v_\alpha > +$$

$$+ u_\gamma < \Delta v_\alpha \Delta v_\beta > + < \Delta v_\alpha \Delta v_\beta \Delta v_\gamma > . \qquad (13)$$

Упрощая это соотношение по индексам β и γ, находим

$$< v_\alpha \vec{v}^2 > = u_\alpha \vec{u}^2 + u_\alpha < (\Delta \vec{v})^2 > +$$

$$+ 2u_\beta < \Delta v_\beta \Delta v_\alpha > + < \Delta v_\alpha (\Delta \vec{v})^2 > . \qquad (14)$$

Умножив это выражение на $\rho/2$ и используя соотношение

$$\rho < \Delta v_\beta \Delta v_\alpha > = \delta_{\alpha,\beta} P - \sigma'_{\alpha,\beta},$$

получаем

$$\frac{\rho}{2} < v_\alpha \vec{v}^2 > = \frac{\rho}{2} u_\alpha \vec{u}^2 + u_\alpha < (\Delta \vec{v})^2 > +$$

$$+ u_\alpha P - u_\beta \sigma'_{\alpha,\beta} + \frac{\rho}{2} < \Delta v_\alpha (\Delta \vec{v})^2 > . \qquad (15)$$

Здесь второе слагаемое в правой части есть произведение средней скорости на плотность внутренней энергии $e(\vec{r},t) = (\rho/2)\times$ $\times < (\Delta \vec{v})^2 >$, в то время как последнее слагаемое есть плотность потока внутренней энергии.

По этой причине полный поток внутренней энергии можно записать следующим образом:

$$\frac{\rho}{2} < v_\alpha \vec{v}^2 > = \frac{\rho}{2} u_\alpha \vec{u}^2 + u_\alpha e(\vec{r},t) + u_\alpha P - u_\beta \sigma'_{\alpha,\beta} + \frac{\rho}{2} < \Delta v_\alpha (\Delta \vec{v})^2 > . \qquad (16)$$

Ниже дана физическая интерпретация этого соотношения.

Равновесное распределение в участке тела, движущегося как целое со скоростью $\vec{u}(\vec{r},t)$, отличается от равновесного распределения в неподвижном газе лишь преобразованием Галилея. Поэтому скорости молекул $\vec{v}'$ в этой системе связаны со скоростями в исходной системе с помощью соотношения $\vec{v} = \vec{u}(\vec{r}, t) + \vec{v}'$, и можно написать

$$\epsilon_{\vec{v}} = \frac{mu^2}{2} + m\vec{v}'\,\vec{u}(\vec{r}, t) + \frac{m(\vec{v}')^2}{2}. \tag{17}$$

Умножив это выражение на $\vec{v} = \vec{u}(\vec{r}, t) + \vec{v}'$ и произведя усреднение с помощью определения среднеквадратичной скорости (3) и (8), переписываем вектор плотности потока энергии следующим образом:

$$Q_\alpha = u_\alpha \left(\frac{\rho}{2}\vec{u}^2 + e(\vec{r}, t) + P\right) - u_\beta \sigma'_{\alpha,\beta} + \frac{\rho}{2} < \Delta v_\alpha (\Delta \vec{v})^2 > . \tag{18}$$

Величина $n\vec{v}'\left\langle \epsilon_{\vec{v}'} \right\rangle$ есть плотность потока внутренней энергии или поток тепла. Поэтому она выражается через градиент температуры:

$$n \left\langle \vec{v}'\,\epsilon_{\vec{v}'} \right\rangle = -\kappa \nabla T. \tag{19}$$

Таким образом, полная плотность потока энергии представляется в следующем виде:

$$Q_\alpha = u_\alpha \left(\frac{\rho}{2}\vec{u}^2 + w(\vec{r}, t)\right) - u_\beta \sigma'_{\alpha,\beta} - \kappa \nabla_\alpha T, \tag{20}$$

где T – температура, $w(\vec{r}, t) = e(\vec{r}, t) + P(\vec{r}, t)$ – энтальпия единицы объёма, κ – коэффициент теплопроводности.

Для окончательной записи закона сохранения энергии необходимо усреднить соотношение (17) по скоростям, умножить результат на плотность, а затем подставить результат в левую часть уравнения (11).

В результате получим производную по времени:

$$\frac{\partial \left(n \left\langle \epsilon_{\vec{v}} \right\rangle\right)}{\partial t} = \frac{\partial \left(n \left\langle \epsilon_{\vec{v}'} \right\rangle\right)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \left(\rho u^2\right)}{\partial t}, \tag{21}$$

или

$$\frac{\partial \left(n \left\langle \epsilon_{\vec{v}'} \right\rangle\right)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial \left(\rho u^2\right)}{\partial t} = -\mathrm{div}\vec{Q}. \tag{21a}$$

В результате мы получили три закона сохранения, содержащие три коэффициента переноса: коэффициент теплопроводности, а также первую и вторую вязкость.

§ 2. Замкнутая система уравнений

$$\frac{\partial\rho(\vec{r},t)}{\partial t} = -\nabla\left(\rho(\vec{r},t)\vec{u}(\vec{r},t)\right); \qquad (22a)$$

$$\frac{\partial\left(\rho u_\alpha\right)}{\partial t} = -\nabla_\beta\left(\rho u_\alpha u_\beta\right) - \nabla_\alpha P + \eta\triangle u_\alpha + \left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla_\alpha\nabla_\beta u_\beta; \qquad (22b)$$

$$\frac{\partial\left(n\left\langle\epsilon_{\vec{v}'}\right\rangle\right)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\rho u^2\right)}{\partial t} = -\nabla\left\{\vec{u}\left[\frac{\rho u^2}{2} + \frac{\rho}{3}\left\langle(v')^2\right\rangle + n\left\langle\epsilon_{\vec{v}'}\right\rangle\right]\right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial r_\alpha}\left(u_\beta\sigma'_{\alpha,\beta}\right) + \kappa\triangle T. \qquad (22c)$$

Уравнение (22a) есть уравнение непрерывности. Уравнение (22b) называется уравнением Навье–Стокса. В правой части третьего уравнения напишем

$$\frac{\rho}{3}\left\langle(v')^2\right\rangle = P - \zeta\mathrm{div}\vec{u},$$

и тогда мы получаем систему пяти уравнений, которые содержат семь неизвестных, включая давление и среднюю внутреннюю энергию $<\epsilon>$, отнесённую к одной частице.

Система (22) становится замкнутой, если предположить, что давление и средняя внутренняя энергия являются функциями температуры и плотности.

Кроме того, мы будем предполагать, что эти зависимости имеют тот же вид, что и в равновесии, т.е. фактически совпадают с уравнениями состояния:

$$P = P(\rho, T), \quad <\epsilon> = \epsilon(\rho, T), \quad \rho = mn. \qquad (23)$$

Далее мы сделаем ещё более сильное предположение, состоящее в том, что в нестационарной системе давление и внутренняя энергия зависят от пространственных координат и времени только через функции $\rho(\vec{r}, t)$ и $T(\vec{r}, t)$. Важно подчеркнуть, что последнее предположение фактически является гипотезой.

Поскольку $< \epsilon >$ – средняя энергия, отнесённая к одной частице, то для неё можно использовать термодинамическое тождество:

$$d < \epsilon > = Tds - Pdv, \tag{24}$$

где s – энтропия, отнесённая к одной частице, $v = 1/n$ – объём, приходящийся на одну частицу.

Это соотношение можно доказать, исходя из известного тождества, относящегося к обобщённому ансамблю:

$$dE = TdS - PdV + \mu dN, \quad S = sN, \quad V = vN,$$

$$dF = -SdT - PdV + \mu dN.$$

Запишем искомый дифференциал

$$d\frac{E}{N} = \frac{1}{N}\left[TdS - PdV + \mu dN\right] - \frac{E}{N^2}dN.$$

Подставим сюда дифференциалы полной энтропии и полного объёма:

$$dS = Nds + sdN, \quad dV = Ndv + vdN.$$

В силу известного термодинамического соотношения $\Omega = E - TS - \mu N = -PV$ произойдёт полное сокращение коэффициента перед dN, после чего мы получаем искомую термодинамическую формулу (24).

Далее переходим к дифференциалу свободной энергии, отнесённой к одной частице $f = e - Ts$:

$$d\frac{F}{N} = df = de - sdT - Tds = -sdT - Pdv.$$

Отсюда находим производную энтропии по объёму, приходящуюся на одну частицу:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v.$$

Этим соотношением следует воспользоваться для нахождения изотермической производной энергии по объему, приходящегося на одну частицу:

$$\left(\frac{\partial < \epsilon >}{\partial v}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P. \tag{25}$$

С помощью этого соотношения можно записать временную производную:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \langle\epsilon\rangle}{\partial t} &= \frac{\partial T}{\partial t}\left(\frac{\partial < \epsilon >}{\partial T}\right)_v + \frac{\partial v}{\partial t}\left\{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P\right\} = \\ &= \frac{\partial T}{\partial t}c_V - \frac{1}{n^2}\frac{\partial n}{\partial t}\left\{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P\right\}.\end{aligned} \tag{26}$$

Временную производную от плотности в левой части (22c) исключаем с помощью уравнения непрерывности (5). В результате получим

$$\frac{\partial\left(n\langle\epsilon\rangle\right)}{\partial t} = - < \epsilon > \nabla\left(n\vec{u}\right) + n\frac{\partial T}{\partial t}c_v - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial t}\left\{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P\right\}. \tag{27}$$

Пространственные производные от давления преобразуются аналогичным образом:

$$\nabla P = \nabla n\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T + \nabla T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_n = -v^2\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T\nabla n + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v\nabla T. \tag{28}$$

В результате удаётся получить замкнутую систему из пяти гидродинамических уравнений.

§ 3. Линеаризованные уравнения гидродинамики

Предположим, что плотность и температура весьма слабо отклоняются от равновесных значений, которые не зависят ни от координат, ни от времени. Равновесное значение скорости принимается равным нулю:

$$n(\vec{r},t) = n + \varphi(\vec{r},t), \quad \vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}(\vec{r},t), \quad T(\vec{r},t) = T_0 + \theta(\vec{r},t). \tag{29}$$

Подставляя эти величины в уравнения (19) – (25) и сохраняя члены, линейные по переменным $\varphi(\vec{r},t)$, $\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}(\vec{r},t)$ и $\theta(\vec{r},t)$, получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -n\mathrm{div}\vec{u}, \tag{30a}$$

$$\frac{\partial\left(u_\alpha\right)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial P}{mn\partial n}\right)_T \nabla_\alpha\varphi - \left(\frac{\partial P}{mn\partial T}\right)_n \nabla_\alpha\theta + \frac{\eta}{n}\triangle u_\alpha + \\ + \frac{1}{mn}\left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla_\alpha\left(\mathrm{div}\vec{u}\right). \tag{30b}$$

В законе сохранения для энергии левая часть имеет вид:

$$n\frac{\partial < \epsilon >}{\partial t} - n < \epsilon > \mathrm{div}\vec{u} = \frac{\partial T}{\partial t}nc_V - \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial t}\left\{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - P\right\} - \\ - n < \epsilon > \mathrm{div}\vec{u}.$$

Правая часть в линейном приближении имеет следующий вид:

$$-\mathrm{div}\vec{u}\left[P + n\left\langle\epsilon_{\vec{v}'}\right\rangle\right] + \kappa\triangle T = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial t}\left[P + n\left\langle\epsilon_{\vec{v}'}\right\rangle\right] + \kappa\triangle T.$$

В результате происходит сокращение слагаемых, пропорциональных первой степени давления и первой степени энергии, после чего получаем

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{T}{mnc_v}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\mathrm{div}\vec{u}\right) + \frac{\kappa}{mnc_v}\triangle\theta. \tag{30c}$$

В случае плазмы в правой части уравнения Ньютона (30b) появляется сила $(-e/m)\vec{E}$, где поле $\vec{E}$ само определяется из уравнения Пуассона.

Таким образом, уравнения гидродинамики однокомпонентной плазмы состоят из шести уравнений:

$$\mathrm{div}\vec{E} = -\frac{4\pi e}{m}\varphi, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -n\mathrm{div}\vec{u}, \tag{31a}$$

$$\frac{\partial\left(u_\alpha\right)}{\partial t} = -\left(\frac{\partial P}{n\partial n}\right)_T \nabla_\alpha\varphi - \left(\frac{\partial P}{n\partial T}\right)_n \nabla_\alpha\theta + \frac{\eta}{n}\triangle u_\alpha + \\ + \frac{1}{n}\left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\nabla_\alpha\left(\mathrm{div}\vec{u}\right) - \frac{e}{m}E_\alpha. \tag{31b}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{T}{nC_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\mathrm{div}\vec{u}\right) + \frac{\kappa}{nC_V}\triangle\theta. \tag{31c}$$

§ 4. **Гидродинамические возбуждения**

Будем искать решения уравнений (30) и (31) в виде плоских монохроматических волн:

$$\varphi(\vec{r},t) = \varphi\exp\left(-i\omega t + i\vec{q}\vec{r}\right), \quad \vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}\exp\left(-i\omega t + i\vec{q}\vec{r}\right),$$

$$\theta(\vec{r},t) = \theta\exp\left(-i\omega t + i\vec{q}\vec{r}\right). \tag{32}$$

Можно сразу заметить, что поперечные колебания носят диффузионный характер. Для того чтобы выделить поперечные колебания, достаточно взять rot от левой и правой части уравнения Ньютона (30b) и (31b):

$$m\frac{\partial\left(\mathrm{rot}\vec{u}\right)}{\partial t} = \frac{\eta}{n}\triangle\left(\mathrm{rot}\vec{u}\right). \tag{33}$$

Подставляя сюда $\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}\exp(-i\omega t + i\vec{q}\vec{r})$ в виде плоских волн, обнаруживаем, что поперечные возмущения диффундируют с коэффициентом диффузии $D = \eta/\rho$.

Для того чтобы выделить продольные колебания, достаточно взять div от левой и правой части уравнения Ньютона (30b) и (31b). В результате получим систему из трёх уравнений:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -n\psi, \tag{34a}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\left(\frac{\partial P}{n\partial n}\right)_T \triangle\varphi - \left(\frac{\partial P}{n\partial T}\right)_n \triangle\theta + \frac{1}{n}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)\triangle\psi, \tag{34b}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = -\frac{T}{nC_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_T \psi + \frac{\kappa}{nC_V}\triangle\theta, \tag{34c}$$

где $\psi = \mathrm{div}\vec{u}$.

Подставляя сюда $\vec{u}(\vec{r},t) = \vec{u}\exp(-i\omega t + i\vec{q}\vec{r})$ в виде плоских волн, получаем систему из трёх уравнений:

$$-i\omega\varphi + \rho\psi = 0, \tag{35a}$$

$$-i\omega\psi - \left(\frac{\partial P}{n\partial n}\right)_T q^2\varphi - \left(\frac{\partial P}{n\partial T}\right)_n q^2\theta + \frac{1}{n}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)q^2\psi = 0, \tag{35b}$$

$$-i\omega\theta + \frac{T}{nC_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_T \psi + \frac{\kappa}{nC_V}q^2\theta = 0. \tag{35c}$$

Условие разрешимости этой системы уравнений определяет спектр возбуждений $\omega = \omega(q)$. Введём удобные обозначения:

$$A = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho, \quad B = \frac{T}{\rho C_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho, \quad C = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T,$$
$$\eta' = \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right). \quad \chi = \frac{\kappa}{\rho C_v}. \tag{36}$$

Дисперсионное уравнение имеет вид кубического уравнения относительно переменной $i\omega$:

$$\left(U_t^2 - i\omega\eta'\right)\chi q^4 + \left[-\omega^2\left(\chi + \eta'\right) - i\omega U_s^2\right]q^2 + i\omega^3 = 0. \tag{37}$$

Здесь U_t и U_s – изотермическая и адиабатическая скорости звука:

$$U_t^2 = \rho C, \quad U_s^2 = AB + \rho C = \rho C\frac{C_p}{C_V}. \tag{38}$$

Уравнение (37) легко решается относительно квадрата волнового вектора q:

$$q^2 = \frac{1}{2\left(U_t^2 - i\omega\eta'\right)\chi}\left\{\left[\omega^2\left(\chi+\eta'\right) + i\omega U_s^2\right] \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{\left[\omega^2\left(\chi+\eta'\right) + i\omega U_s^2\right]^2 - 4i\omega^3\chi\left(U_t^2 - i\omega\eta'\right)}\right\}. \qquad (39)$$

Полученное выражение нетрудно разложить по степеням ω, после чего находим звуковые частоты с малым затуханием, а также теплопроводностную моду:

$$\omega_q^{\pm} = \pm U_s q - i\frac{q^2}{2\rho}\left[\left(\frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_p}\right)\kappa + \frac{4}{3}\eta + \zeta\right], \quad \omega_q^T = -iq^2\frac{\kappa}{\rho C_p}. \qquad (40)$$

§ 5. Возбуждения в заряженной системе

В случае квазинейтральной однокомпонентной плазмы в уравнение для средней скорости добавляется электрическое поле, которое в свою очередь удовлетворяет уравнению Пуассона. См. уравнения (31).

Если считать, что электрическое поле является продольным, т.е. удовлетворяет условию $\mathrm{rot}\vec{E} = 0$, тогда поперечные моды удовлетворяют тем же уравнениям (30), что и в отсутствие поля.

Что же касается продольных колебаний, то система, соответствующая уравнениям (31), приобретает следующий вид:

$$-i\omega\varphi + \rho\psi = 0, \quad D_q = -\frac{4\pi e}{m}\varphi, \quad -i\omega\psi - \left(\frac{\partial P}{n\partial n}\right)_T q^2\varphi -$$
$$-\left(\frac{\partial P}{n\partial T}\right)_n q^2\theta + \frac{1}{n}\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)q^2\psi + \frac{e}{m}D_q = 0, \qquad (41a)$$

$$-i\omega\theta + \frac{T}{nC_V}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_T \psi + \frac{\kappa}{nC_V}q^2\theta = 0, \qquad (41b)$$

где D_q – компонента Фурье от $\mathrm{div}E$.

Дисперсионное уравнение по-прежнему имеет вид кубического уравнения относительно переменной $\imath\omega$:

$$\left(U_t^2 - i\omega\eta'\right)\chi q^4 + \left[-\omega^2\left(\chi+\eta'\right) - i\omega U_s^2 + \chi\omega_p^2\right] q^2 - i\omega\omega_p^2 + i\omega^3 = 0, \tag{42}$$

где $\omega_p^2 = 4\pi n e^2/m$ – так называемая плазменная частота.

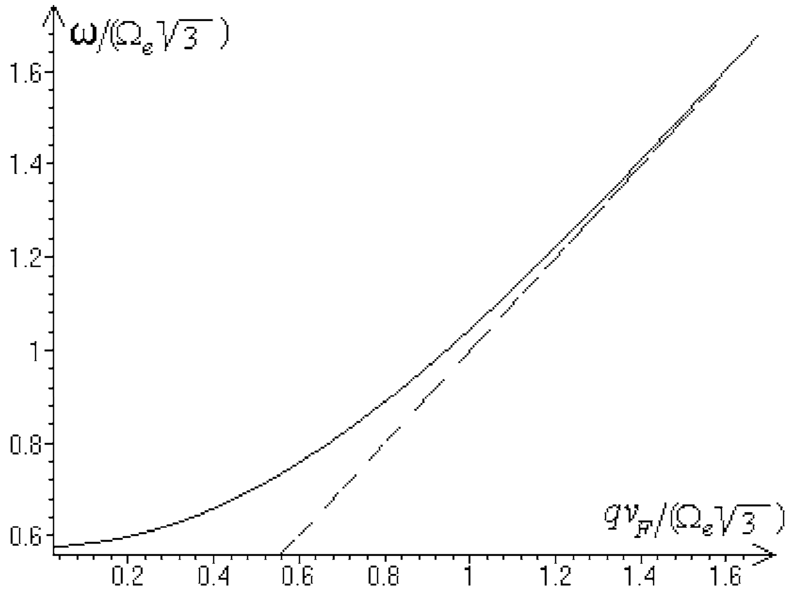

Рис. 1. Зависимость частоты плазменных колебаний от безразмерного волнового вектора при T = 0

В области длинных волн уравнение (38) имеет два решения со щелью в спектре, со слабой дисперсией и малым затуханием. В качестве третьего решения выступает теплопроводностная мода, но с другим коэффициентом температуропроводности:

$$\omega_q^{\pm} = \pm\omega_p\left(1 + q\frac{U_s^2}{2\omega_p^2}\right) - i\frac{q^2}{2\rho}\left[\frac{4}{3}\eta + \zeta\right], \quad \omega_q^T = -iq^2\frac{\kappa}{\rho C_v}. \tag{43}$$

Таким образом, в нашей гидродинамической модели при включении электрического поля звуковая частота превращается в плазменную (рис. 1). При этом затухание в первом приближении определяется только вязкостью, но не теплопроводностью. Коэффициент теплопроводности κ оказывается увеличенным в отношении C_p/C_V.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т.2. – М.: Мир, 1978. – 399 с.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика.– М.: Физматлит, 1988. – 733 с.