

ЛЕКЦИЯ VIII

ЭФФЕКТ ДЖОЗЕФСОНА

С о д е р ж а н и е

Введение	189
§ 1. Стационарный сверхпроводящий ток	191
§ 1.1. Туннельный гамильтониан и средний ток	191
§ 1.2. $(u-v)$ -преобразование с фазовым множителем	193
§ 1.3. Вычисление амплитуды тока Джозефсона	195
§ 2. Туннелирование при заданной разности потенциалов	201
§ 3. Нестационарный эффект Джозефсона	207
§ 3.1. Температура $T \ll T_c$	210
Приложение Вычисление эллиптических интегралов	217
Список литературы	222

Введение

После создания микроскопической теории стало ясно, что носителями сверхпроводимости являются скоррелированные пары электронов, которые имеют нулевой суммарный спин и суммарный импульс, близкий к нулю, – так называемые куперовские пары. При этом характерный радиус корреляции (размер куперовской пары) имеет порядок $R(T) \sim \hbar v_0 / \Delta(T)^1$, где v_0 – относительная скорость электронов, по порядку величины совпадает со скоростью электронов на поверхности Ферми (v_F), а $\Delta(T)$ – энергия связи куперовской пары, по порядку равная значению энергетической щели в спектре возмущений. Поскольку максимальное значение $\max(\Delta(T)) = \Delta(0) \sim T_c$, то минимальная величина корреляционного радиуса $R(0) \sim (\hbar/p_F) \times (\epsilon_F/T_c)$,

¹Эту оценку получим, приравнявая разность кинетических энергий электронов, образующих куперовскую пару, к их энергии связи: $|p_1^2 - p_2^2| \approx \approx 2m\Delta(T)$. Далее следует положить $(p_1 + p_2) \approx 2mv_0$, а также использовать принцип неопределённости $|p_1 - p_2| \approx \hbar/R(T)$.

что значительно превышает среднее расстояние между электронами $r_0 = \hbar/p_F$, поскольку энергия Ферми (ϵ_F) не менее чем на два порядка превышает максимально возможную температуру сверхпроводящего перехода (T_c). Отсюда можно заключить, что

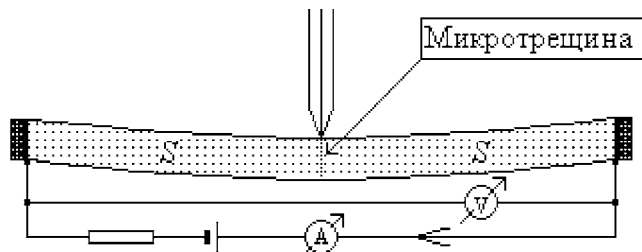


Рис. 1. Схема измерения тока Джозефсона

в контакте двух сверхпроводников возможно образование куперовских пар из электронов, принадлежащих различным металлам. По этой причине бездиссипативное течение куперовских пар оказывается возможным не только в каждом сверхпроводнике, но также и между сверхпроводниками, разделёнными тонкой диэлектрической прослойкой при нулевой разности потенциалов на контакте (см. рис.1). Это явление было теоретически предсказано Джозефсоном [1] и рассматривается в § 1.

Стационарная составляющая тока через контакт обусловлена возможностью подбарьерного туннелирования нормальных возбуждений, которые проходят через контакт в меру существования приложенной разности потенциалов. Соответствующая вольт-амперная характеристика обсуждается в § 2.

При конечной приложенной разности потенциалов V наряду со стационарным током нормальных возбуждений на контакте имеется нестационарная составляющая с частотой $\omega = 2eV/\hbar$. В § 3 получено общее выражение для амплитуды нестационарного тока Джозефсона, рассмотрены также различные предельные случаи.

§ 1. Стационарный сверхпроводящий ток

Предположим, что два сверхпроводника разделены тонкой прослойкой диэлектрика или один и тот же сверхпроводник разделен микротрещиной, толщина которой мала по сравнению с размером куперовской пары. Возникает вопрос: может ли через такой контакт протекать незатухающий ток? Если к контакту не приложено напряжение и нет никакого внешнего поля, тогда причиной возникновения сверхпроводящего тока может быть пространственное изменение волновой функции куперовских пар.

§ 1.1. Туннельный гамильтониан и средний ток

Для тонкой диэлектрической прослойки с малым коэффициентом прохождения можно предположить, что в нулевом приближении левый и правый сверхпроводники независимы, так что фазы их конденсатных волновых функций никак не связаны и произвольны.

В следующем приближении необходимо учесть возможное перекрытие электронных волновых функций, что можно сделать на основе так называемого туннельного гамильтониана:

$$\hat{H}_T = \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} \left(T_{\vec{p}\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^{\dagger} \hat{b}_{\vec{q}\sigma} + T_{\vec{p}\vec{q}}^* \hat{b}_{\vec{q}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \right). \quad (1)$$

Здесь $\hat{a}_{\vec{p}\sigma}^{\dagger}$ и $\hat{a}_{\vec{p}\sigma}$ – операторы рождения и уничтожения электронов в левом, а $\hat{b}_{\vec{q}\sigma}^{\dagger}$ и $\hat{b}_{\vec{q}\sigma}$ – операторы рождения и уничтожения электронов в правом сверхпроводнике.

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить среднее число электронов, которое может протекать без потерь из одного сверхпроводника в другой. Для определенности вычислим оператор тока, вытекающего из левого сверхпроводника. Для этой цели определим временную производную оператора числа частиц $\hat{N}_a = \sum_{\vec{p}\sigma} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^{\dagger} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}$ в левом сверхпроводнике: $\dot{N}_a = i[\hat{H}, \hat{N}_a]/\hbar$.

Учитывая, что гамильтониан нулевого приближения по прозрачности прослойки сохраняет число частиц, достаточно вычислить коммутатор между \hat{N}_a и \hat{H}_T . В результате находим оператор электрического тока:

$$\hat{I}_a = \frac{ie}{\hbar} \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} \left(T_{\vec{p}\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^\dagger \hat{b}_{\vec{q}\sigma} - T_{\vec{p}\vec{q}}^* \hat{b}_{\vec{q}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \right). \quad (2)$$

Среднее значение от оператора тока

$$\langle \hat{I}_a \rangle = \frac{\langle I_a(t_-) \hat{S}_\Gamma \rangle_0}{\langle \hat{S}_\Gamma \rangle_0}$$

определим с точностью до членов второго порядка по интегралам перескока $T_{\vec{p}\vec{q}}$. Простое усреднение оператора (2) по состоянию без туннелирования дает нуль. В следующем приближении достаточно использовать разложение \hat{S} -матрицы с гамильтонианом туннелирования (1). При нулевой разности потенциалов в результате усреднения произведений четырех операторов по состояниям без туннелирования $\langle \dots \rangle_0$ остаются только произведения аномальных средних (F и F^+), относящихся к разным металлам.

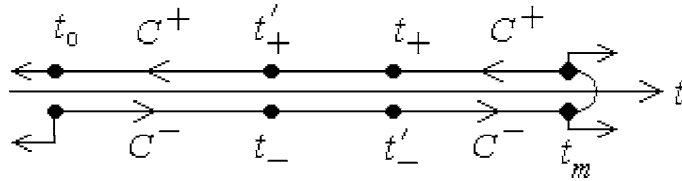


Рис. 2. Упорядочение на контуре Келдыша

Интегралы вдоль верхней половины контура Келдыша содержат функции Грина, для которых переменная интегрирования τ_+ всегда превышает значение переменной t , находящейся на нижней части контура Келдыша. С другой стороны, интеграл на нижней части контура Келдыша от $-\infty$ до t соответствует значениям переменной интегрирования $\tau < t$, в то время

как при интегрировании от t до ∞ переменная интегрирования τ_+ всегда, так же как и на верхней части, превышает значение переменной t .

Поскольку гамильтониан взаимодействия на верхней части контура Келдыша имеет противоположный знак по отношению к гамильтониану взаимодействия на нижней части контура, то в первом порядке теории возмущений происходит взаимное сокращение интегралов от области $t < \tau < +\infty$. В результате остаются интегралы только в пределах $-\infty < \tau < t$, один из которых относится к τ_- – на нижней части контура, на которой считается, что $\tau < t$; в другом интеграле переменная интегрирования принадлежит верхней части контура Келдыша, для всех значений которой операторы упорядочены согласно условию: $\tau_+ > t$.

В результате удаётся записать выражение для туннельного тока в виде формулы Кубо [2], [3]:

$$\langle \tilde{j}_a^1 \rangle = \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t \langle [\hat{H}_T(t'), \hat{I}_a(t)] \rangle_0 dt'. \quad (3)$$

Здесь операторы $\hat{H}_T(t')$ и $\hat{N}_a(t)$ записаны в представлении взаимодействия, а усреднение в правой части производится по стационарным состояниям, вычисляемым без учёта эффекта туннелирования.

§ 1.2. (u-v)-преобразование с фазовым множителем

Далее мы используем явное выражение для операторов рождения частиц через операторы рождения и уничтожения квазичастиц, записанных через переменные u_p и v_p с двумя произвольными фазами $u_p = |u_p| \exp(i\alpha)$ и $v_p = |v_p| \exp(i\beta)$:

$$\hat{a}_{\vec{p},\sigma}^+ = u_p^* \hat{\alpha}_{\vec{p},\sigma}^+ + \sigma v_p \hat{\alpha}_{-\vec{p},-\sigma}, \quad \hat{a}_{\vec{p},\sigma} = u_p \hat{\alpha}_{\vec{p},-\sigma}^+ + \sigma v_p^* \hat{\alpha}_{-\vec{p},-\sigma}. \quad (4)$$

Докажем, что абсолютные значения $|u_p|$ и $|v_p|$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и теории Боголюбова с действительными u_p и v_p , зависящими от модуля вектора \vec{p} .

Два первых соотношения проверяются непосредственной подстановкой:

$$\begin{aligned} \{\hat{a}_{\vec{p},\sigma}^+, \hat{a}_{\vec{p},\sigma}\} &= |u_p|^2 + |v_p|^2 = 1, \\ \{\hat{a}_{\vec{p},\sigma}^+, \hat{a}_{-\vec{p},-\sigma}^+\} &= \{\hat{a}_{\vec{p},\sigma}, \hat{a}_{-\vec{p},-\sigma}\} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Аномальные средние $\Delta = g\langle \hat{a}_{-\vec{p},\downarrow}, \hat{a}_{\vec{p},\uparrow} \rangle_0$ и $\Delta^+ = g\langle \hat{a}_{\vec{p},\uparrow}^+, \hat{a}_{-\vec{p},\downarrow}^+ \rangle_0$ остаются комплексно-сопряжёнными и имеют отличный от нуля фазовый множитель:

$$\begin{aligned} \Delta &= g e^{i(\alpha-\beta)} \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} |u_p| |v_p| (1 - 2n_F(E_p)), \\ \Delta^+ &= g e^{-i(\alpha-\beta)} \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}} |u_p| |v_p| (1 - 2n_F(E_p)), \end{aligned} \quad (6)$$

где $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + |\Delta|^2}$ — энергия возбуждений, зависящая от абсолютного значения Δ .

Уравнение для нахождения абсолютных значений $|u_p|$ и $|v_p|$ получим из условия диагонализации гамильтониана БКШ:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{p},\sigma} \hat{a}_{\vec{p},\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{p},\sigma} \xi_p - \frac{g}{V} \sum_{\vec{p},\vec{p}'} \hat{a}_{\vec{p},\uparrow}^+ \hat{a}_{-\vec{p},\downarrow}^+ \hat{a}_{-\vec{p}',\downarrow} \hat{a}_{\vec{p}',-\uparrow}. \quad (7)$$

Подставляя в гамильтониан (7) выражения (4) и приравнявая к нулю коэффициенты при произведениях $\hat{\alpha}_{\vec{p},\uparrow}^+ \hat{\alpha}_{-\vec{p},\downarrow}^+$ и $\hat{\alpha}_{-\vec{p},\downarrow} \hat{\alpha}_{\vec{p},\uparrow}$, получим два совпадающих соотношения, не содержащих фазовых множителей α и β .

Запишем к качестве примера коэффициент при $\hat{\alpha}_{\vec{p},\uparrow}^+ \hat{\alpha}_{-\vec{p},\downarrow}^+$:

$$2u_p^* v_p^* \xi_p - \Delta (u_p^*)^2 + \Delta^+ (v_p^*)^2.$$

С помощью соотношений (6) это выражение преобразуется к факторизованному виду, после чего находим уравнение самосогласования:

$$e^{-i(\alpha+\beta)} \left\{ 2|u_p| |v_p| \xi_p - |\Delta| (|u_p|^2 - |v_p|^2) \right\} = 0. \quad (8)$$

Оставшаяся часть гамильтониана уже не содержит фазовых множителей и с помощью уравнений (5) и (8) позволяет определить спектр квазичастичных возбуждений $E_p = \sqrt{\xi_p^2 + |\Delta|^2}$. В соответствии с этим можно записать операторы рождения и уничтожения частиц в представлении взаимодействия:

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\vec{p},\sigma}^{\dagger}(t) &= u_p^* \hat{\alpha}_{\vec{p},\sigma}^{\dagger}(t) + \sigma v_p \hat{\alpha}_{-\vec{p},-\sigma}(t), \\ \hat{a}_{\vec{p},\sigma}(t) &= u_p \hat{\alpha}_{\vec{p},\sigma}^{\dagger}(t) + \sigma v_p^* \hat{\alpha}_{-\vec{p},-\sigma}^{\dagger}(t),\end{aligned}\quad (9)$$

где операторы рождения и уничтожения квазичастиц записываются с соответствующим энергетическим множителем:

$$\hat{\alpha}_{\vec{p},\sigma}(t) = \hat{\alpha}_{\vec{p},\sigma} \exp\left(\frac{-iE_p t}{\hbar}\right), \quad \alpha_{\vec{p},\sigma}^{\dagger}(t) = \alpha_{\vec{p},\sigma}^{\dagger} \exp\left(\frac{iE_p t}{\hbar}\right). \quad (10)$$

§ 1.3. Вычисление амплитуды тока Джозефсона

Таким образом, выражение (3) для первой не исчезающей поправки можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{j}_a^1 \rangle &= \frac{e}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t \left\langle \left[\sum_{\vec{p},\vec{q},\sigma} (T_{\vec{p}\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^{\dagger}(t) \hat{b}_{\vec{q}\sigma}(t) + \text{h.c.}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sum_{\vec{p}',\vec{q}',\sigma'} (T_{\vec{p}'\vec{q}'} \hat{a}_{\vec{p}'\sigma'}^{\dagger}(t') \hat{b}_{\vec{q}'\sigma'}(t') - \text{h.c.}) \right] \right\rangle_0 dt'.\end{aligned}\quad (11)$$

Здесь символ *h.c.* обозначает операцию эрмитового сопряжения, квадратные скобки – коммутатор.

В результате удаётся записать выражение для туннельного тока в виде суммы интегралов от произведений аномальных средних: $\langle \tilde{j}_a^1 \rangle =$

$$= \frac{e}{\hbar^2} \int_{-\infty}^t \sum_{\vec{p},\vec{q}} |T_{\vec{p},\vec{q}}|^2 \{ [F_a^+(t, \tau_-) F_b(\tau_-, t) - F_a^+(t, \tau_+) F_b(\tau_+, t)] -$$

$$- [a \rightarrow b, b \rightarrow a] d\tau. \quad (12)$$

Операторы рождения и уничтожения с помощью боголюбовского преобразования выражаются через операторы рождения и уничтожения квазичастиц, поэтому можно вычислить все четыре аномальных функции:

$$\begin{aligned} F_a^+(t, \tau < t) &= -i \langle \hat{a}_{\bar{p}, \uparrow}^+(t) \hat{a}_{-\bar{p}, \downarrow}^+(\tau) \rangle = i(u_p^a)^* v_p^a \sigma \times \\ &\times \left\{ n_F(E_p^a) \exp(iE_p^a(t - \tau)) - n_F(-E_p^a) \exp(-iE_p^a(t - \tau)) \right\}; \\ F_b(\tau < t, t) &= i \langle \hat{b}_{\bar{q}, \uparrow}(t) \hat{b}_{-\bar{q}, \downarrow}(\tau) \rangle = iu_q^b (v_q^b)^* \sigma \times \\ &\times \left\{ n_F(E_q^b) \exp(iE_q^b(t - \tau)) - n_F(-E_q^b) \exp(-iE_q^b(t - \tau)) \right\}; \\ F_a^+(t, \tau > t) &= i \langle \hat{a}_{-\bar{p}, \downarrow}^+(\tau) \hat{a}_{\bar{p}, \uparrow}^+(t) \rangle = i(u_p^a)^* v_p^a \sigma \times \\ &\times \left\{ n_F(E_p^a) \exp(iE_p^a(\tau - t)) - n_F(-E_p^a) \exp(iE_p^a(t - \tau)) \right\}; \\ F_b(\tau > t, t) &= -i \langle \hat{b}_{-\bar{q}, \downarrow}(\tau) \hat{b}_{\bar{q}, \uparrow}(t) \rangle = iu_q^b (v_q^b)^* \sigma \times \\ &\times \left\{ n_F(E_q^b) \exp(iE_q^b(\tau - t)) - n_F(-E_q^b) \exp(-iE_q^b(\tau - t)) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь и ниже положено $\hbar = 1$, а также используется соотношение $1 - n_F(E) = n_F(-E)$.

После перемножения этих выражений и интегрирования находим

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^t \{ [F_a^+(t, \tau_-) F_b(\tau_-, t) - F_a^+(t, \tau_+) F_b(\tau_+, t)] \} d\tau = \\ &= 2iu_q v_q^* u_p^* v_p \left\{ \operatorname{Re} \frac{n_F(E_p^a) n_F(E_q^b)}{E_p^a + E_q^b + i\delta} - \operatorname{Re} \frac{n_F(-E_p^a) n_F(-E_q^b)}{E_p^a + E_q^b - i\delta} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{Re} \frac{n_F(E_p^a) n_F(-E_q^b)}{E_p^a - E_q^b + i\delta} + \operatorname{Re} \frac{n_F(-E_p^a) n_F(E_q^b)}{E_p^a - E_q^b - i\delta} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь символ Re обозначает действительную часть, так что дальнейшее интегрирование следует понимать в смысле главного значения.

Выражение в фигурных скобках есть симметричная функция относительно замены $a \rightarrow b$, $p \rightarrow q$ и обратно. Её удобно выразить через гиперболические тангенсы:

$$A(E_a, E_b) = \frac{1}{2} \left[\frac{\text{th}(E_a/2T) - \text{th}(E_b/2T)}{E_a - E_b} - \frac{\text{th}(E_a/2T) + \text{th}(E_b/2T)}{E_a + E_b} \right]. \quad (15)$$

Далее можно выразить произведения $u_q v_q^* u_p^* v_p$ через фазу волновой функции куперовской пары $\varphi = \alpha - \beta$:

$$u_p^* v_p = \frac{|\Delta_a|}{2E_p^a} \exp(-i\varphi_a), \quad u_q v_q^* = \frac{|\Delta_b|}{2E_q^b} \exp(i\varphi_b).$$

Таким образом, мы получаем общее выражение для тока Джозефсона:

$$j_j = \sin(\varphi_a - \varphi_b) \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{q}} |T_{\vec{p}, \vec{q}}|^2 \frac{|\Delta_a| |\Delta_b|}{2E_q^b E_p^a} A(E_p^a, E_q^b). \quad (16)$$

Вводя плотности одночастичных состояний $\nu_{1,2}(\epsilon_{a,b})$ на уровне Ферми, через которые могут быть выражены суммы по импульсам в общем выражении (58), получим

$$\sum_{\vec{p}} \rightarrow V_1 \nu_1 \int d\xi_{\vec{p}}, \quad \sum_{\vec{q}} \rightarrow V_2 \nu_2 \int d\xi_{\vec{q}}, \quad (17)$$

где $\nu_k(E_k) = \sum_{\vec{p}} \delta(E_k - \xi_{\vec{p}}^k)$, V_k – плотность состояний и объём k -го сверхпроводника.

В результате мы имеем возможность интегрировать вблизи от поверхности Ферми: $j_j =$

$$= \sin(\varphi_a - \varphi_b) \nu_a \nu_b \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_a \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_b |T_{\xi_a, \xi_b}|^2 \frac{|\Delta_a| |\Delta_b|}{2E_q^b E_p^a} A(E_p^a, E_q^b). \quad (18)$$

Дальнейшее преобразование оказывается возможным, если перейти к интегрированию по энергии возбуждений E_p^a и E_q^b :

$$j_j = \sin(\varphi_a - \varphi_b) \nu_a \nu_b \int_{\Delta_a}^{\infty} \frac{dE_a}{\xi_a} \int_{\Delta_b}^{\infty} \frac{dE_b}{\xi_b} \times \\ \times \left\{ |T_{\xi_a, \xi_b}|^2 \frac{|\Delta_a| |\Delta_b|}{(E_a^2 - E_b^2)} \left[E_a \operatorname{th}\left(\frac{E_b}{2T}\right) - E_b \operatorname{th}\left(\frac{E_a}{2T}\right) \right] \right\}. \quad (19)$$

Здесь $\xi_{a,b} = \sqrt{E_{a,b}^2 - \Delta_{a,b}^2}$.

Можно далее заметить, что как функция комплексной переменной $E_{a,b}$ подынтегральная функция имеет на мнимой оси только полюсные особенности. Поэтому контур интегрирования можно развернуть таким образом, чтобы он охватывал все полюсные особенности [4]:

$$j_m \sim T \sum_{\omega} \frac{|\Delta_1 \Delta_2|}{\sqrt{(\omega^2 + |\Delta_1|^2)(\omega^2 + |\Delta_2|^2)}}, \quad (20)$$

где $\omega_n = \pi T(2n + 1)$.

Таким образом, существование незатухающего тока через контакт оказывается возможным, если удастся фиксировать различие фаз между двумя сверхпроводниками: плотность тока через контакт j есть амплитуда тока Джозефсона j_m , умноженная на $\sin(\varphi_a - \varphi_b)$.

Сама амплитуда тока может быть выражена через сопротивление контакта:

$$R^{-1} = \pi e^2 \frac{V_1 V_2}{S} \nu_1 \nu_2 |T_{\vec{p}, \vec{q}}|^2, \quad (21)$$

где черта обозначает интегрирование по импульсам \vec{p} и \vec{q} , лежащим на поверхностях Ферми левого и правого металла. Здесь $\nu_{1,2}$ – плотности состояний на уровне Ферми, которые мы вводим согласно (18); $V_{1,2}$ – объемы левого и правого сверхпроводника, S – площадь контакта.

В результате удаётся проинтегрировать по ξ_p и по ξ_q , после чего джозефсоновский ток (20) выражается через ту же сумму,

что и проводимость (21). Таким образом, мы определяем всю температурную зависимость амплитуды стационарного тока Джозефсона [5]:

$$j_m = \frac{\pi T}{eR} \sum_{\omega} \frac{|\Delta_1 \Delta_2|}{\sqrt{(\omega^2 + |\Delta_1|^2)(\omega^2 + |\Delta_2|^2)}}. \quad (22)$$

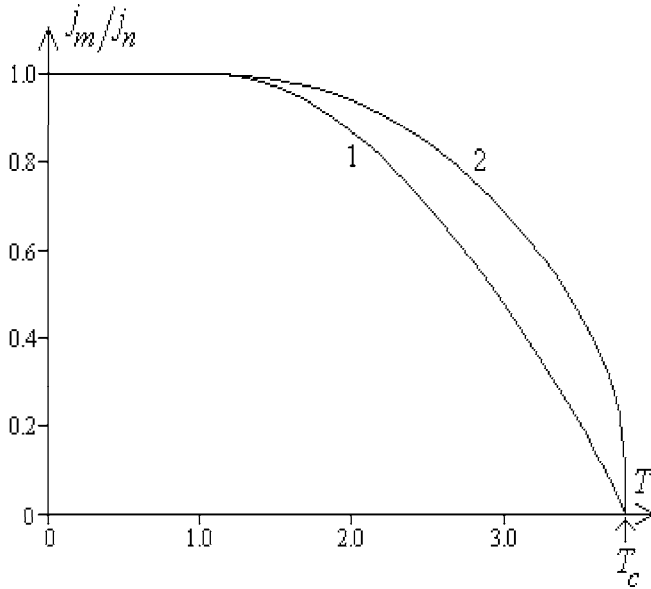


Рис. 3. 1 – температурная зависимость амплитуды тока Джозефсона для одинаковых сверхпроводников (Sn-I-Sn);
2 – температурная зависимость амплитуды тока Джозефсона для различных сверхпроводников (Pb-I-Sn)

В случае одинаковых сверхпроводников суммирование по $\omega = 2\pi T(2n+1)$ легко производится, так что имеем простую формулу:

$$j_m = \frac{\pi}{2eR} \Delta \text{th} \left(\frac{\Delta}{2T} \right). \quad (23)$$

В пределе $T \rightarrow T_c$, $j_m \cong (\pi \Delta^2)/(4eRT_c)$, так что амплитуда обращается в нуль линейно по температуре: $j_m \simeq (T_c - T)/eR$.

Вся температурная кривая изображена на рис. 3.

Можно заметить, что для разных сверхпроводников при одной и той же температуре амплитуда оказывается больше, чем для одинаковых. В пределе $T = 0$ суммирование в (20) можно заменить интегрированием. В результате простых вычислений получаем

$$j_m = \frac{2|\Delta_1\Delta_2|}{eR(|\Delta_1| + |\Delta_2|)} K\left(\frac{||\Delta_1| - |\Delta_2||}{(|\Delta_1| + |\Delta_2|)}\right), \quad (24)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл I рода.

Этот результат можно получить непосредственно из соотношения (19), которое при $T = 0$ имеет вид

$$j_j = \sin(\varphi_a - \varphi_b)\nu_a\nu_b \int_{\Delta_a}^{\infty} \frac{dE_a}{\xi_a} \int_{\Delta_b}^{\infty} \frac{dE_b}{\xi_b} \left\{ |T_{\xi_a, \xi_b}|^2 \frac{|\Delta_a||\Delta_b|}{(E_a + E_b)} \right\}. \quad (25)$$

После подстановки $E_a = |\Delta_a|\text{ch}(x)$, $E_b = |\Delta_b|\text{ch}(y)$ получим

$$j_j = \sin(\varphi_a - \varphi_b)\nu_a\nu_b \left\{ |T_{\xi_a, \xi_b}|^2 \right\} |\Delta_a||\Delta_b| J(|\Delta_a|, |\Delta_b|), \quad (26)$$

где интеграл

$$J(|\Delta_a|, |\Delta_b|) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} dx dy \frac{1}{|\Delta_a|\text{ch}(x) + |\Delta_b|\text{ch}(y)}. \quad (27)$$

Двойной интеграл приводится к интегралу от произведения беселевых функций ($K_0(s|\Delta|)$): $J(|\Delta_a|, |\Delta_b|) =$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} ds \exp\{-s(|\Delta_a|\text{ch}(x) + |\Delta_b|\text{ch}(y))\} \right] dx dy = \\ &= \int_0^{\infty} K_0(s|\Delta_a|)K_0(s|\Delta_b|)ds = \frac{\pi}{|\Delta_a| + |\Delta_b|} K(k), \end{aligned} \quad (28)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл I рода с параметром $k = (||\Delta_1| - |\Delta_2||)/(|\Delta_1| + |\Delta_2|)$.

§ 2. Туннелирование при заданной разности потенциалов

До сих пор мы производили усреднение по состоянию полного термодинамического равновесия при заданных объеме, температуре и химическом потенциале. Для двух металлов, обменивающихся электронами, последнее условие означает появление контактной разности, которая и выравнивает химические потенциалы. Если же на контакте имеется разность потенциалов, тогда равновесие нарушается, что в нормальном состоянии проявилось бы в виде возникновения тока через контакт. При этом дополнительная потенциальная энергия выражается через потенциалы φ_a и φ_b :

$$\Delta \hat{H} = e \left[\sum_{\vec{p}\sigma} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ \hat{a}_{\vec{p}\sigma} \varphi_a + \sum_{\vec{q}\sigma} \hat{b}_{\vec{q}\sigma}^+ \hat{b}_{\vec{q}\sigma} \varphi_b \right]. \quad (29)$$

В соответствии с этим после перехода к представлению Гейзенберга операторы рождения и уничтожения левого и правого металла приобретают фазовые множители, линейно зависящие от времени t :

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+ &\rightarrow \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+(t) e^{ie\varphi_a t/\hbar}, & \hat{a}_{\vec{p}\sigma} &\rightarrow \hat{a}_{\vec{p}\sigma}(t) e^{-ie\varphi_a t/\hbar}, \\ \hat{b}_{\vec{p}\sigma}^+ &\rightarrow \hat{b}_{\vec{q}\sigma}^+(t) e^{ie\varphi_b t/\hbar}, & \hat{b}_{\vec{p}\sigma} &\rightarrow \hat{b}_{\vec{q}\sigma}(t) e^{-ie\varphi_b t/\hbar}. \end{aligned} \quad (30)$$

При этом зависящие от времени операторы рождения и уничтожения, стоящие в правой части преобразований (30), выражаются через квазичастичные операторы с помощью соотношений (9) и (10).

В результате подстановок (30) гамильтониан (1) оказывается зависящим от разности потенциалов $U = \varphi_a - \varphi_b$:

$$\hat{H}_T(t) = \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} \left(e^{ieUt/\hbar} T_{\vec{p}\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+(t) \hat{b}_{\vec{q}\sigma}(t) + e^{-ieUt/\hbar} T_{\vec{p}\vec{q}}^* \hat{b}_{\vec{q}\sigma}^+(t) \hat{a}_{\vec{p}\sigma}(t) \right). \quad (31)$$

Оператор туннельного тока (2) также зависит от разности потенциалов:

$$\hat{I}(t) = \frac{ie}{\hbar} \sum_{\vec{p}, \vec{q}, \sigma} \left(e^{ieUt/\hbar} T_{\vec{p}\vec{q}} \hat{a}_{\vec{p}\sigma}^+(t) \hat{b}_{\vec{q}\sigma}(t) - e^{-ieUt/\hbar} T_{\vec{p}\vec{q}}^* \hat{b}_{\vec{q}\sigma}^+(t) \hat{a}_{\vec{p}\sigma}(t) \right). \quad (32)$$

При этом следует помнить, что операторы рождения и уничтожения электронов слева и справа от контакта теперь связаны с операторами рождения и уничтожения квазичастиц с помощью $(u-v)$ -преобразования с фазой (4). После перехода к представлению взаимодействия получим следующие соотношения:

$$\hat{a}_{\vec{p}, \sigma_a}^+(t) = u_p^* \hat{\alpha}_{\vec{p}, \sigma_a}^+(t) + \sigma_a v_p \hat{\alpha}_{-\vec{p}, -\sigma_a}(t),$$

$$\hat{a}_{\vec{p}, \sigma_a} = u_p \hat{\alpha}_{\vec{p}, -\sigma_a}^+(t) + \sigma_a v_p^* \hat{\alpha}_{-\vec{p}, -\sigma_a}^+(t). \quad (33)$$

$$\hat{b}_{\vec{q}, \sigma_b}^+(t) = u_q^* \hat{\beta}_{\vec{q}, \sigma_b}^+(t) + \sigma_b v_q \hat{\beta}_{-\vec{q}, -\sigma_b}(t),$$

$$\hat{b}_{\vec{q}, \sigma_b} = u_q \hat{\beta}_{\vec{q}, -\sigma_b}^+(t) + \sigma_b v_q^* \hat{\beta}_{-\vec{q}, -\sigma_b}^+(t). \quad (34)$$

Входящие в правые части квазичастичные операторы рождения и уничтожения приобретают энергетические фазовые множители:

$$\hat{\alpha}_{\vec{p}, \sigma}(t) = \exp\{-iE_a(p)t\} \hat{\alpha}_{\vec{p}, \sigma}, \quad \hat{\alpha}_{\vec{p}, \sigma}^+(t) = \exp\{iE_a(p)t\} \hat{\alpha}_{\vec{p}, \sigma}^+,$$

$$\hat{\beta}_{\vec{q}, \sigma}(t) = \exp\{-iE_b(q)t\} \hat{\beta}_{\vec{q}, \sigma}, \quad \hat{\beta}_{\vec{q}, \sigma}^+(t) = \exp\{iE_b(q)t\} \hat{\beta}_{\vec{q}, \sigma}^+, \quad (35)$$

где использованы обозначения для энергии квазичастиц:

$$E_a(p) = \sqrt{\xi_p^2 + |\Delta_a|^2}, \quad E_b(q) = \sqrt{\xi_q^2 + |\Delta_b|^2}. \quad (36)$$

Мы снова должны произвести интегрирование вдоль контура Келдыша, однако при вычислении нормального (квазичастичного) тока, который выражается через произведения нормальных функций Грина, возникает существенное упрощение, состоящее в том, что результат усреднения интегрирования нормальных функций Грина вдоль нижней части контура Келдыша

обращается в нуль [3]. Остаются только интегралы вдоль верхней части, на которой аргументы всегда считаются большими по сравнению со значениями на нижней части.

Таким образом, необходимо вычислить два интеграла:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \hat{a}_{\bar{p}\sigma}(t_+) \hat{a}_{\bar{p}\sigma}^+(t) \rangle \exp(ieU(t-t_1)) \langle \hat{b}_{\bar{q}\sigma}^+(t_+) \hat{b}_{\bar{q}\sigma}(t) \rangle dt_1 - \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \hat{a}_{\bar{p}\sigma}^+(t_+) \hat{a}_{\bar{p}\sigma}(t) \rangle \exp(-ieU(t-t_1)) \langle \hat{b}_{\bar{q}\sigma}(t_+) \hat{b}_{\bar{q}\sigma}^+(t) \rangle dt_1, \quad (37) \end{aligned}$$

где следует считать, что $t_+ \equiv t_1$.

Подставляя сюда явные выражения (30) для операторов рождения и уничтожения через операторы рождения и уничтожения квазичастиц, находим

$$\begin{aligned} & u_a^2 u_b^2 \delta(E_a - E_b + eU) \{(1 - n_a)n_b - n_a(1 - n_b)\} + \\ & + v_a^2 v_b^2 \delta(E_a - E_b - eU) \{(1 - n_b)n_a - n_b(1 - n_a)\} + \\ & + u_a^2 v_b^2 \delta(E_a + E_b + eU) \{(1 - n_a)(1 - n_b) - n_a n_b\} + \\ & + v_a^2 u_b^2 \delta(E_a + E_b - eU) \{n_b n_a - (1 - n_b)(1 - n_a)\}. \quad (38) \end{aligned}$$

Здесь введены функции Ферми, а также нормальные координаты:

$$n_k = n_F(E_k), \quad u_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k} \right), \quad v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right), \quad (39)$$

где $k = a$ или b .

Поскольку, по определению (36), квазичастичные энергии E_k являются чётными функциями от переменной ξ , то во всех четырёх слагаемых произведения нормальных координат $u_a^2 u_b^2$, $v_a^2 v_b^2$, $u_a^2 v_b^2$ и $u_b^2 v_a^2$ можно заменить на $1/4$.

Далее удобно перейти к интегралам по энергии квазичастиц $E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2}$, после чего имеем интегралы:

$$\int_{\Delta_k}^{\infty} \frac{E_k dE_k}{\xi_k}, \quad \text{где} \quad \xi_k = \sqrt{E_k^2 - \Delta_k^2}. \quad (40)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta_a}^{\infty} \int_{\Delta_b}^{\infty} \nu_a(E_a) \nu_b(E_b) \{ \delta(E_a - E_b + eU) [(1 - n_a)n_b - n_a(1 - n_b)] + \\ & \quad + \delta(E_a - E_b - eU) [(1 - n_b)n_a - n_b(1 - n_a)] + \\ & \quad + \delta(E_a + E_b + eU) [(1 - n_a)(1 - n_b) - n_a n_b] + \\ & \quad + \delta(E_a + E_b - eU) [n_b n_a - (1 - n_b)(1 - n_a)] \} dE_a dE_b. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь введена так называемая функция плотности состояний:

$$\nu_k(\epsilon) = \theta(\epsilon^2 - \Delta_k^2) \frac{|\epsilon|}{2\sqrt{\epsilon^2 - \Delta_k^2}}. \quad (42)$$

В конечном счёте, можно записать все четыре слагаемых с помощью одной формулы, если в первом слагаемом считать, что интегрирование ведётся в бесконечных пределах:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \nu_a(E_a) \nu_b(E_b) \delta(E_a - E_b + eU) (1 - n_a) n_b dE_a dE_b - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \nu_a(E_a) \nu_b(E_b) \delta(E_a - E_b + eU) n_a (1 - n_b) dE_a dE_b = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \nu_a(E - eU) \nu_b(E) \{ [n_b(E) - n_a(E - eU)] \} dE. \end{aligned} \quad (43)$$

Таким образом, мы получили простейшую формулу, являющуюся естественным обобщением формулы для тока, проходящего через контакт между двумя нормальными металлами [4].

При $T = 0$ квазичастичный ток исчезает для напряжений, меньших порогового $U_c = (\Delta_a + \Delta_b)/e$. При напряжениях, больших порогового, вольт-амперная характеристика туннельного тока определяется интегралом:

$$J_{\text{кв}} = \frac{1}{|e|R_n} \int_{\Delta_a}^{(eU - \Delta_b)} \frac{\epsilon (eU - \epsilon) d\epsilon}{\sqrt{[\epsilon^2 - \Delta_a^2] [(eU - \epsilon)^2 - \Delta_b^2]}}. \quad (44)$$

При $\Delta_a = \Delta_b = 0$ из (44) следует выражение для туннельного тока между двумя нормальными металлами: $J_n = U/R_n$.

Интеграл (44) сводится к линейной комбинации эллиптических интегралов (см. Приложение):

$$J_{\text{кв}}(T = 0) = \frac{1}{|e|R_{ab}} \sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2} \times \\ \times \left\{ E(q) - \frac{2|\Delta_a\Delta_b|}{[(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2]} K(q) \right\}, \quad (45)$$

где R_{ab} – сопротивление контакта в нормальном состоянии обоих металлов, K и E – полные эллиптические интегралы I и II рода:

$$K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varphi}}, \quad E(q) = \int_0^{\pi/2} d\varphi \sqrt{1 - q^2 \sin^2 \varphi}, \\ q = \frac{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| + |\Delta_b|)^2}}{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2}}.$$

Если при $T = 0$ один из металлов остаётся в нормальном состоянии, тогда формула (45) существенно упрощается:

$$J_{\text{кв}}(T = 0) = (|e|R_{ab})^{-1} \sqrt{(eU)^2 - |\Delta_a|^2}, \quad (46)$$

а туннельный ток существует, только если $|eU| > |\Delta_a|$, как это показано на рис. 4 – кривая 2.

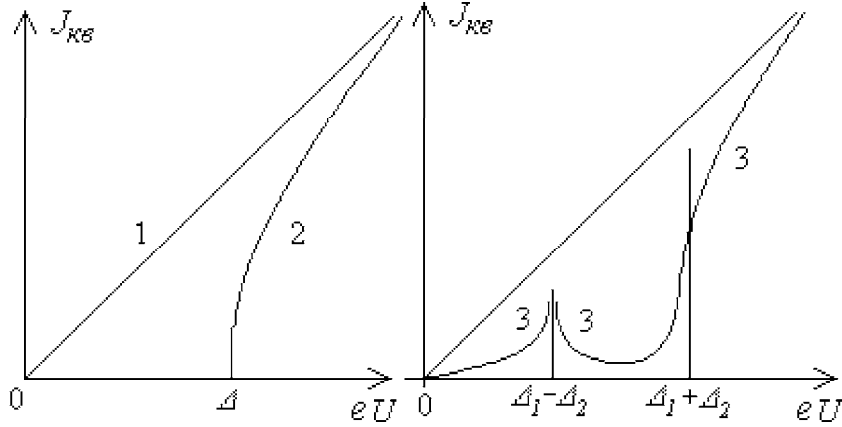


Рис. 4. 1 – контакт из двух нормальных металлов – (N-I-N);
 2 – контакт из нормального металла и
 сверхпроводника – (N-I-S)-контакт;
 3 – квазичастичный ток через (S-I-S)-контакт
 для различных сверхпроводников при $T \neq 0$

В случае контакта двух одинаковых сверхпроводников имеем

$$J_{\text{кв}}(T=0) = \frac{|U|}{R_n} \left\{ E(k) - \frac{2|\Delta|^2}{(eU)^2} K(k) \right\}, \quad (47)$$

где R_n – сопротивление контакта в нормальном состоянии,

$$k = \frac{\sqrt{(eU)^2 - 4|\Delta|^2}}{|eU|}. \quad (48)$$

Если же $U > U_c$, тогда при заданном значении напряжения величина квазичастичного тока всегда оказывается меньшей, чем значение тока в нормальной фазе при том же падении напряжения. Главный член асимптотического разложения при больших напряжениях, когда $eU \gg (\Delta_a + \Delta_b)$, имеет вид

$$J_{\text{кв}} \approx \frac{U}{R_n} \left(1 - \frac{(\Delta_a + \Delta_b)}{eU} \right). \quad (49)$$

Когда напряжение стремится к пороговому со стороны больших значений, из (45) находим величину скачка квазичастичного тока:

$$J_{\text{кв}}^* = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{\Delta_1 \Delta_2}}{eR_n}. \quad (50)$$

При отличной от нуля температуре скачок тока при напряжении порога $U < U_c = |\Delta_1 + \Delta_2|/|e|$ всегда сохраняется и равен:

$$J_{\text{кв}}^* = \frac{\pi \sqrt{\Delta_a \Delta_b}}{4|e|R_n} \left(\text{th} \frac{\Delta_a}{2T} + \text{th} \frac{\Delta_b}{2T} \right). \quad (51)$$

При отличной от нуля температуре вольт-амперная характеристика имеет вторую (логарифмическую) особенность при $U = |\Delta_1 - \Delta_2|/|e|$. При любой конечной температуре квазичастичный ток в этой точке обращается в бесконечность: $I_0 \sim \ln|eU - \Delta_1 + \Delta_2|$. Между двумя особыми точками вольт-амперная характеристика имеет падающий участок, как видно из рис. 4.

§ 3. Нестационарный эффект Джозефсона

Если считать, что к двум сверхпроводникам приложена заданная разность потенциалов и, кроме этого, волновые функции куперовских пар слева и справа от контакта имеют различные фазы, то можно снова произвести вычисление джозефсоновского тока.

В предыдущем разделе в качестве основного физического результата мы получили стационарный квазичастичный ток.

В случае нестационарного эффекта Джозефсона стационарный ток удаётся получить только при определённом соотношении между разностью фаз волновых функций куперовских пар слева и справа от контакта и разностью потенциалов, приложенной к контакту. Если же это условие не выполняется, то мы получим квантовые осцилляции, амплитуда которых существенно зависит от приложенной разности потенциалов.

Конкретные расчёты производятся на основании возможности обобщения соотношения (14):

$$\begin{aligned}
\langle j_{nst} \rangle \sim & \int_{-\infty}^t F_a^+(t, \tau_-) F_b(\tau_-, t) \exp(iU(t + \tau_-)) d\tau_- - \\
& - \int_{-\infty}^t F_a^+(t, \tau_+) F_b(\tau_+, t) \exp(iU(t + \tau_+)) d\tau_+ - \\
& - \int_{-\infty}^t F_b^+(t, \tau_-) F_a(\tau_-, t) \exp(-iU(t + \tau_-)) d\tau_- + \\
& + \int_{-\infty}^t F_b^+(t, \tau_+) F_a(\tau_+, t) \exp(-iU(t + \tau_+)) d\tau_+. \quad (52)
\end{aligned}$$

В результате мы получаем выражение, вполне аналогичное амплитуде джозефсоновского тока (14):

$$\begin{aligned}
J_{nst} = & 2i|u_q||v_q||u_p||v_p| \times \\
& \times \{ \exp(-i\varphi + i2Uet) [W(a, b; U) + W^*(a, b; -U)] - \\
& - \exp(i\varphi - i2Uet) [W(b, a; -U) + W^*(b, a; U)] \}, \quad (53)
\end{aligned}$$

где φ – разность фаз, относящихся к a - и b -сверхпроводнику, а функция W определяется аналогично (14): $W(a, b; U) =$

$$\begin{aligned}
= & \frac{n_F(E_p^a) n_F(E_q^b)}{E_p^a + E_q^b + i\delta - eU} + \frac{(1 - n_F(E_p^a)) (1 - n_F(E_q^b))}{-E_p^a - E_q^b + i\delta - eU} - \\
- & \frac{(n_F(E_p^a)) (1 - n_F(E_q^b))}{E_p^a - E_q^b + i\delta - eU} - \frac{(1 - n_F(E_p^a)) (n_F(E_q^b))}{-E_p^a + E_q^b + i\delta - eU}. \quad (54)
\end{aligned}$$

Действительная часть этого выражения определяет амплитуду джозефсоновского тока, который при заданной приложенной разности потенциала начинает зависеть от времени:

$$j_{nst}^{(j)}(U, t) = \sin(\varphi_a - \varphi_b + 2Uet) \nu_a \nu_b \times$$

$$\times \text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_a d\xi_b |\overline{T_{\vec{p}, \vec{q}}}|^2 \frac{|\Delta_a| |\Delta_b|}{2E_q^b E_p^a} [W(a, b; U) + W(a, b; -U)]. \quad (55)$$

Мнимая часть выражения (54) определяет так называемую интерференционную часть тока Джозефсона:

$$j_{nst}^{(int)}(U, t) = \cos(\varphi_a - \varphi_b + 2Uet) \nu_a \nu_b \times \\ \times \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_a d\xi_b |\overline{T_{\vec{p}, \vec{q}}}|^2 \frac{|\Delta_a| |\Delta_b|}{2E_q^b E_p^a} [-W(a, b; U) + W(a, b; -U)]. \quad (56)$$

Черта обозначает усреднение по углам векторов \vec{p} и \vec{q} , которые по модулю считаются равными импульсу Ферми.

Четная комбинация $\text{Re}[W(a, b; U) + W(a, b; -U)]$ с помощью перехода к гиперболическим функциям $n_F(E) = (1/2)[1 - \text{th}(E/2T)]$ преобразуется к линейной комбинации от $\text{th}(E_p/2T)$ и $\text{th}(E_q/2T)$:

$$\begin{aligned} \text{Re}[W(a, b; U) + W(a, b; -U)] &= \\ &= \left\{ \frac{n_p n_q - (1 - n_p)(1 - n_q)(1 - n_p)}{E_p + E_q - eU} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_p(1 - n_q) - n_q(1 - n_p)}{E_p - E_q - eU} \right\} + \{U \rightarrow -U\} = \\ &= -\frac{1}{2} \text{th}\left(\frac{E_p}{2T}\right) \left\{ \left[\frac{1}{E_p + E_q - eU} - \frac{1}{E_p - E_q - eU} \right] + \right. \\ &\quad \left. + [U \rightarrow -U] \right\} + (p \rightarrow q, \quad q \rightarrow p). \quad (57) \end{aligned}$$

Выражения в фигурных скобках допускают дальнейшее упрощение:

$$\begin{aligned} \text{Re}[W(a, b; U) + W(a, b; -U)] &= \\ &= -\text{th}\left(\frac{E_p}{2T}\right) \left\{ \left[\frac{Eq}{E_q^2 - (E_p - eU)^2} \right] + [U \rightarrow -U] \right\} - \\ &= -\text{th}\left(\frac{E_q}{2T}\right) \left\{ \left[\frac{Ep}{E_p^2 - (E_q - eU)^2} \right] + [U \rightarrow -U] \right\}. \quad (58) \end{aligned}$$

Полученное выражение необходимо разделить на произведение множителей $\sqrt{E_p^2 - |\Delta_a|^2}$ и $\sqrt{E_q^2 - |\Delta_b|^2}$, а затем проинтегрировать по переменным E_p и E_q . При этом внутренние интегралы легко вычисляются:

$$\int_{|\Delta_b|}^{\infty} \frac{dE_q}{\sqrt{E_q^2 - |\Delta_b|^2}} \frac{E_q}{E_q^2 - (E_p - eU)^2} = \pi \frac{\theta [|\Delta_b|^2 - (E_p - eU)^2]}{\sqrt{|\Delta_b|^2 - (E_p - eU)^2}}. \quad (59)$$

Производя аналогичное интегрирование по переменной E_p , получим

$$\begin{aligned} & \int_{|\Delta_a|}^{\infty} \frac{dE_p}{\sqrt{E_p^2 - |\Delta_a|^2}} \operatorname{th}\left(\frac{E_p}{2T}\right) \left\{ \frac{\theta [|\Delta_b|^2 - (E_p + eU)^2]}{\sqrt{|\Delta_b|^2 - (E_p + eU)^2}} \right\} + \\ & + \int_{|\Delta_b|}^{\infty} \frac{dE_q}{\sqrt{E_q^2 - |\Delta_b|^2}} \operatorname{th}\left(\frac{E_q}{2T}\right) \left\{ \frac{\theta [|\Delta_a|^2 - (E_q + eU)^2]}{\sqrt{|\Delta_a|^2 - (E_q + eU)^2}} \right\}. \quad (60) \end{aligned}$$

К этим выражениям следует добавить те же выражения, но с заменой ($U \rightarrow -U$).

§ 3.1. Температура $T \ll T_c$

В пределе $T = 0$ получаем полные эллиптические интегралы I рода.

Предположим для определённости, что $|\Delta_a| > |\Delta_b|$.

Вычисление первого интеграла

$$J_1 = \int_{|\Delta_a|}^{\infty} \frac{dE_p}{\sqrt{E_p^2 - |\Delta_a|^2}} \left\{ \frac{\theta [|\Delta_b|^2 - (E_p - |e|U)^2]}{\sqrt{|\Delta_b|^2 - (E_p - |e|U)^2}} \right\}$$

приводит к следующим результатам:

А. $J_1 = 0$, если $|e|U < |\Delta_a| - |\Delta_b|$.

В. Если $|\Delta_a| - |\Delta_b| < |e|U < |\Delta_a| + |\Delta_b|$, тогда

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{|\Delta_a \Delta_b|}} \operatorname{K} \left\{ \frac{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2}}{2\sqrt{|\Delta_a \Delta_b|}} \right\}. \quad (61)$$

С. Если $|\Delta_a| + |\Delta_b| < |e|U$, тогда

$$J_1 = \frac{2}{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2}} \text{K} \left\{ \frac{2\sqrt{|\Delta_a \Delta_b|}}{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2}} \right\}. \quad (62)$$

В предельном случае $T = 0$ значение интеграла

$$J_2 = \int_{|\Delta_a|}^{\infty} \frac{dE_p}{\sqrt{E_p^2 - |\Delta_a|^2}} \text{th}\left(\frac{E_p}{2T}\right) \left\{ \frac{\theta [|\Delta_b|^2 - (E_p + |e|U)^2]}{\sqrt{|\Delta_b|^2 - (E_p + |e|U)^2}} \right\} \quad (63)$$

при всех условиях равно нулю.

Далее рассмотрим J_3 :

$$J_3 = \int_{|\Delta_b|}^{\infty} \frac{dE_q}{\sqrt{E_q^2 - |\Delta_b|^2}} \text{th}\left(\frac{E_q}{2T}\right) \left\{ \frac{\theta [|\Delta_a|^2 - (E_q - |e|U)^2]}{\sqrt{|\Delta_a|^2 - (E_q - |e|U)^2}} \right\}. \quad (64)$$

Сначала рассмотрим область $|e|U < |\Delta_b|$. При этом возникает два случая: D. $|e|U < |\Delta_a| - |\Delta_b|$:

$$J_3 = \frac{2}{\sqrt{(|\Delta_a| + |\Delta_b|)^2 - (eU)^2}} \text{K} \left\{ \frac{\sqrt{(|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2 - (eU)^2}}{\sqrt{(|\Delta_a| + |\Delta_b|)^2 - (eU)^2}} \right\}. \quad (65)$$

Е. $|\Delta_a| - |\Delta_b| < |e|U < |\Delta_b|$:

$$J_3 = \frac{1}{\sqrt{|\Delta_a \Delta_b|}} \text{K} \left\{ \frac{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2}}{2\sqrt{|\Delta_a \Delta_b|}} \right\}. \quad (66)$$

Далее рассмотрим область $|\Delta_b| < |e|U$. При этом возникает два случая: F. $|\Delta_b| < |e|U < |\Delta_a| + |\Delta_b|$:

$$J_3 = \frac{2}{\sqrt{(|\Delta_a| + |\Delta_b|)^2 - (eU)^2}} \text{K} \left\{ \frac{\sqrt{(|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2 - (eU)^2}}{\sqrt{(|\Delta_a| + |\Delta_b|)^2 - (eU)^2}} \right\}. \quad (67)$$

G. $|\Delta_a| + |\Delta_b| < |e|U$:

$$J_3 = \frac{2}{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2}} \text{K} \left\{ \frac{2\sqrt{|\Delta_a \Delta_b|}}{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2}} \right\}. \quad (68)$$

Наконец, рассмотрим интеграл J_4 :

$$J_4 = \int_{|\Delta_b|}^{\infty} \frac{dE_q}{\sqrt{E_q^2 - |\Delta_b|^2}} \operatorname{th}\left(\frac{E_q}{2T}\right) \left\{ \frac{\theta [|\Delta_a|^2 - (E_q + |e|U)^2]}{\sqrt{|\Delta_a|^2 - (E_q + |e|U)^2}} + \right\}. \quad (69)$$

Здесь имеется только одна область $|e|U < |\Delta_a| - |\Delta_b|$, для которой имеем

$$J_4 = \frac{2}{\sqrt{(|\Delta_a| + |\Delta_b|)^2 - (eU)^2}} \operatorname{K} \left\{ \frac{\sqrt{(|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2 - (eU)^2}}{\sqrt{(|\Delta_a| + |\Delta_b|)^2 - (eU)^2}} \right\}. \quad (70)$$

Собирая полученные результаты, имеем в области предельно малой разности потенциалов, когда $|e|U < |\Delta_a| - |\Delta_b|$:

$$j_1 = \frac{1}{|e|R} \frac{2|\Delta_a\Delta_b|}{\sqrt{(|\Delta_a| + |\Delta_b|)^2 - (eU)^2}} \times \\ \times \operatorname{K} \left\{ \frac{\sqrt{(|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2 - (eU)^2}}{\sqrt{(|\Delta_a| + |\Delta_b|)^2 - (eU)^2}} \right\}, \quad (71)$$

где множитель $1/R$ есть проводимость контакта в нормальном состоянии:

$$\frac{1}{R} = \frac{\pi e^2}{\hbar} \nu_1 \nu_2 |T_{\bar{p}, \bar{q}}|^2 \frac{V_1 V_2}{S}. \quad (72)$$

В пределе $|e|U \ll |\Delta_a| - |\Delta_b|$ имеем выражение (24) для амплитуды тока Джозефсона при нулевой разности потенциалов.

$$j_{j0} = \frac{2|\Delta_1\Delta_2|}{eR(|\Delta_1| + |\Delta_2|)} \operatorname{K} \left(\frac{(|\Delta_1| - |\Delta_2|)}{(|\Delta_1| + |\Delta_2|)} \right).$$

В промежуточной области $|\Delta_a| - |\Delta_b| < |e|U < |\Delta_a| + |\Delta_b|$ находим следующую амплитуду тока Джозефсона:

$$j_{j2} = \frac{1}{|e|R} \sqrt{|\Delta_a\Delta_b|} \operatorname{K} \left\{ \frac{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2}}{2\sqrt{|\Delta_a\Delta_b|}} \right\}. \quad (73)$$

При большой разности потенциалов $|e|U > |\Delta_a| + |\Delta_b|$ получим следующую амплитуду:

$$j_{j3} = \frac{1}{|e|R} \frac{2|\Delta_a\Delta_b|}{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2}} \times$$

$$\times K \left\{ \frac{2\sqrt{|\Delta_a \Delta_b|}}{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2}} \right\}. \quad (74)$$

В области $|e|U \approx s = |\Delta_a| + |\Delta_b|$ амплитуда тока Джозефсона логарифмически обращается в бесконечность (так называемая риделевская особенность):

$$i_{\max} \approx \frac{1}{2|e|R} \sqrt{|\Delta_a \Delta_b|} \ln \left\{ \frac{32|\Delta_a \Delta_b|}{(|\Delta_a| + |\Delta_b|) |U - (|\Delta_a| + |\Delta_b|)|} \right\}. \quad (75)$$

Можно проверить, что выражение $\text{Im}W(a, b; U) - \text{Im}W(a, b; -U)$ только множителем отличается от ядра квазичастичного тока. В соответствии с этим амплитуда интерференционного тока может быть выражена через интегралы от плотности состояний:

$$\begin{aligned} & \Delta_a \Delta_b \int_{\Delta_a}^{\infty} \int_{\Delta_b}^{\infty} \frac{\nu_a(E_a) \nu_b(E_b)}{4E_a E_b} \times \\ & \times \{ \delta(E_a - E_b + eU) [(1 - n_a)n_b - n_a(1 - n_b)] + \\ & + \delta(E_a - E_b - eU) [(1 - n_b)n_a - n_b(1 - n_a)] + \\ & + \delta(E_a + E_b + eU) [(1 - n_a)(1 - n_b) - n_a n_b] + \\ & + \delta(E_a + E_b - eU) [n_b n_a - (1 - n_b)(1 - n_a)] \} dE_a dE_b. \quad (76) \end{aligned}$$

Если ввести специальные функции плотности

$$g_k(\epsilon) = \theta \left(\epsilon^2 - \Delta_k^2 \right) \frac{|\Delta_k|}{2\sqrt{\epsilon^2 - |\Delta_k|^2}}, \quad (77)$$

тогда можно записать все четыре слагаемых с помощью одной формулы, если в первом слагаемом считать, что интегрирование ведётся в бесконечных пределах:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_a(E_a) g_b(E_b) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \{ \delta(E_a - E_b + eU) [(1 - n_a)n_b - n_a(1 - n_b)] \} dE_a dE_b = \\
& = \int_{-\infty}^{\infty} g_a(E - eU) g_b(E) \{ [n_b(E) - n_a(E - eU)] \} dE. \quad (78)
\end{aligned}$$

Таким образом, для интерференционного тока получаем такую же простую формулу, как и для квазичастичного тока:

$$\begin{aligned}
j_{int}(U, t) &= \cos(\varphi_a - \varphi_b + 2Uet) \nu_a \nu_b \times \\
& \times \int_{-\infty}^{\infty} g_a(E - eU) g_b(E) \{ [n_b(E) - n_a(E - eU)] \} dE. \quad (79)
\end{aligned}$$

Отсюда можно заключить, что как функция приложенного напряжения амплитуда интерференционного тока имеет те же особенности, что и изображённые на рис. 3.

Таким образом, среднее значение от оператора тока, вычисленное с точностью до второго порядка по интегралам перегиба, содержит два слагаемых: $I_a = I_0 + I_J$.

Величина I_0 — так называемый квазичастичный ток, который наблюдается и в нормальной фазе. Последовательное вычисление величины туннельного тока дано в § 2:

$$I_0(U) = \int dE \nu_1(E) \nu_2(E - eU) [n_F(E - eU) - n_F(E)] / eR_n, \quad (80)$$

где R_n — сопротивление контакта в нормальном состоянии.

Сверхпроводящий ток, протекающий через контакт, может быть стационарным только при условии точной компенсации между разностью фаз φ_2 и φ_1 , с одной стороны, и величиной $2etU$ — с другой:

$$I_J = J_1(U) \sin \varphi + J_2(U) \cos \varphi, \quad (81)$$

где φ — полная разность фаз, вообще говоря, зависящая от времени. Величина $J_1(U)$ называется амплитудой джозефсоновского тока, и при $U = 0$ она переходит в своё термодинамическое

значение. Величина $J_2(U)$ называется амплитудой интерференционного тока. В пределе $T = 0$ её наблюдение возможно только при условии $|eU| > |\Delta_a| + |\Delta_b|$. При выполнении этого условия имеем

$$J_2(U) = \frac{1}{eR_n} \int_{\Delta_a}^{(|eU| - \Delta_b)} \frac{\Delta_a \Delta_b d\epsilon}{\sqrt{[\epsilon^2 - \Delta_a^2] [(|eU| - \epsilon)^2 - \Delta_b^2]}}. \quad (82)$$

Этот интеграл сводится к эллиптическому интегралу I рода:

$$J_2(U) = \frac{2}{|e|R_n} \frac{|\Delta_a \Delta_b|}{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| - |\Delta_b|)^2}} \times \\ \times K \left\{ \frac{\sqrt{(eU)^2 - (|\Delta_a| + |\Delta_b|)^2}}{\sqrt{((eU)^2 - |\Delta_a| - |\Delta_b|)^2}} \right\}. \quad (83)$$

Вычисление этого интеграла рассмотрено в Приложении.

При минимальной разности потенциалов $|eU| = |\Delta_a| + |\Delta_b|$ амплитуда интерференционного тока имеет максимальное значение, совпадающее с минимальным значением туннельного тока: $J_2(\max) = \pi / \left\{ 2|e|R_n \sqrt{|\Delta_a \Delta_b|} \right\}$.

С повышением разности потенциалов амплитуда интерференционного тока уменьшается, так что в области $|eU| \gg |\Delta_a| + |\Delta_b|$ имеем

$$J_2 \approx \frac{|\Delta_a \Delta_b|}{e^2 |U| R} \ln \frac{4(eU)^2}{|\Delta_a \Delta_b|}. \quad (84)$$

При конечной температуре амплитуда интерференционного тока $J_2(eU)$ имеет логарифмические особенности того же типа, что и квазичастичный ток.

При конечном значении приложенной разности потенциалов амплитуда джозефсоновского тока имеет скачок при $U = |\Delta_1 - \Delta_2|/|e|$. При дальнейшем повышении разности потенциалов амплитуда растёт и обращается в бесконечность в точке $U = |\Delta_1 + \Delta_2|/|e|$: $J_1 \sim \ln|eU - \Delta_1 - \Delta_2|$. При самых больших потенциалах $|eU| \gg |\Delta_1 + \Delta_2|$ амплитуда тока Джозефсона спадает по закону:

$$J_1 \sim (eU)^{-1} \text{th}(2eU/2T). \quad (85)$$

При $T = 0$ амплитуда интерференционного тока во всей области $eU < \Delta_a + \Delta_b$ равна нулю.

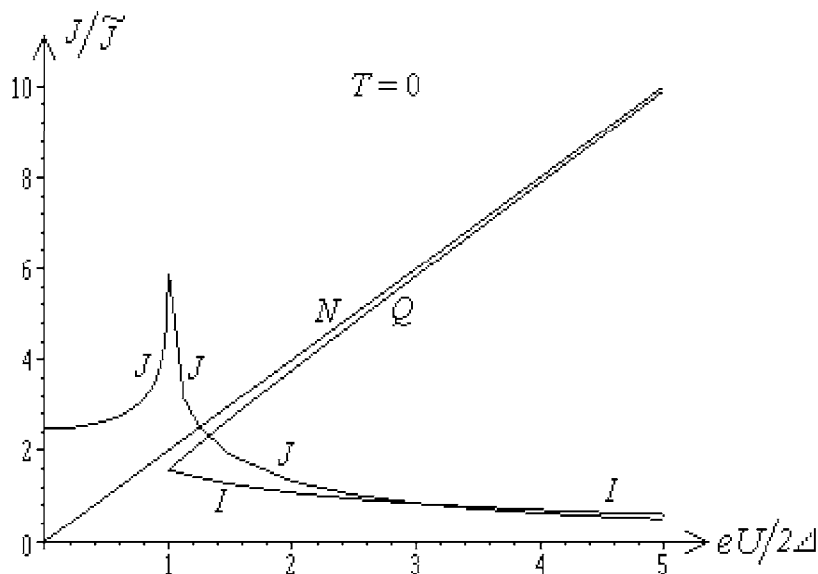


Рис. 5. Амплитуды контактных токов для двух одинаковых сверхпроводников при $T = 0$:

J – амплитуда тока Джозефсона,
 I – амплитуда интерференционного тока,
 Q – амплитуда туннельного (квазичастичного) тока

При $eU = \Delta_a + \Delta_b$ амплитуда имеет скачок, а при больших значениях разности потенциала амплитуда монотонно уменьшается. Для одинаковых сверхпроводников имеем

$$J_1 = \frac{\Delta}{2R} K(y), \quad J_2 = 0, \quad \text{если } y = \frac{|eU|}{2\Delta} < 1; \quad (86)$$

если же $y > 1$, тогда находим

$$J_1 = \frac{\Delta}{2eRy} K\left(\frac{1}{y}\right), \quad J_2 = \frac{2\Delta}{eR(1+y)} K\left(\frac{y-1}{y+1}\right), \quad (87)$$

где K – полный эллиптический интеграл I рода.

Необходимо отметить, и это видно из рис. 5, что при заданном значении приложенной разности потенциалов амплитуда джозефсоновского тока не всегда больше амплитуды интерференционного тока. При больших значениях параметра y имеется достаточно широкая область, где амплитуда интерференционного тока превышает амплитуду тока Джозефсона. Однако в этой области квазичастичный ток значительно больше интерференционного. Отсюда заключаем, что при любом приложенном напряжении интерференционный ток остаётся ненаблюдаемым.

П р и л о ж е н и е.
Вычисление эллиптических интегралов

Рассмотрим простейший интеграл:

$$J = \int_c^t \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-g)}}, \quad g < c < t < b < a. \quad (\text{П.1})$$

Для приведения его к каноническому виду произведём замену переменных:

$$z^2 = \beta \frac{(x-c)}{(x-g)}, \quad 2zdz = \beta \frac{(c-g)}{(x-g)^2} dx, \quad x = \frac{gz^2 - \beta c}{z^2 - \beta}, \quad (\text{П.2})$$

где $\beta = (b-g)/(b-c)$.

После подстановки выражений (2) в исходный интеграл получим

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{\sqrt{\beta}} \int_0^{z(t)} \frac{dz(x-g)}{\sqrt{(a-x)(b-x)}} = \\ &= \frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{(a-g)(b-g)}} \int_0^{z(t)} \frac{dz}{\sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}}, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

где

$$A^2 = \beta \frac{a-c}{a-g}, \quad B^2 = \beta \frac{b-c}{b-g}, \quad (A > B). \quad (\text{П.4})$$

В результате естественной замены переменной $z = B \sin \varphi$ получим

$$J = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-g)}} F(\lambda, q),$$

$$\lambda = \arcsin \sqrt{\frac{(a-c)(b-t)}{(b-c)(a-t)}}, \quad q = \sqrt{\frac{(b-c)(a-g)}{(a-c)(b-g)}}. \quad (\text{П.5})$$

Далее рассмотрим более сложный интеграл:

$$J_1 = \int_c^t \frac{xdx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-g)}}, \quad g < c < t < b < a. \quad (\text{П.6})$$

Для приведения его к каноническому виду произведём ту же замену переменных (П.2).

В результате получим подынтегральное выражение, зависящее только от z^2 :

$$J_1 = \frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{(a-g)(b-g)}} \int_0^{z(t)} \frac{(gz^2 - \beta c) dz}{(z^2 - \beta) \sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}}. \quad (\text{П.7})$$

После разложения подынтегрального выражения на простейшие множители получим выражение, непосредственно выражающееся через эллиптические интегралы:

$$J_1 = \frac{2g\sqrt{\beta}}{\sqrt{(a-g)(b-g)}} \int_0^{z(t)} \frac{dz}{\sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}} +$$

$$+ \frac{2\beta(c-g)\sqrt{\beta}}{\sqrt{(a-g)(b-g)}} \int_0^{z(t)} \frac{dz}{(\beta - z^2) \sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}}, \quad (\text{П.8})$$

При этом

$$\int_0^{z(t)} \frac{dz}{\sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}} = \frac{1}{|A|} F(\lambda, q);$$

$$\int_0^{z(t)} \frac{dz}{(\beta - z^2) \sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}} = \frac{1}{|A|\beta} \Pi(\lambda, \frac{B^2}{\beta}, q). \quad (\text{П.9})$$

Здесь соответственно $F(\lambda, q)$ и $\Pi(\lambda, B^2/\beta, q)$ – эллиптические интегралы I и III рода.

Наиболее сложным оказывается вычисление интеграла:

$$J_2(t) = \int_c^t \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a-x)(b-x)(x-c)(x-g)}}, \quad (\text{П.10})$$

который будем вычислять при условии $g < c < t < b < a$.

В результате замены переменных (П.2) получим подынтегральное выражение, зависящее только от z^2 :

$$J_2 = \frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt{(a-g)(b-g)}} \int_0^{z(t)} \frac{(gz^2 - \beta c)^2 dz}{(z^2 - \beta)^2 \sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}}, \quad (\text{П.11})$$

которое снова разлагаем на простейшие множители:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{2g^2\sqrt{\beta}}{\sqrt{(a-g)(b-g)}} \int_0^{z(t)} \frac{dz}{\sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}} + \\ &+ \frac{4\beta g(c-g)\sqrt{\beta}}{\sqrt{(a-g)(b-g)}} \int_0^{z(t)} \frac{dz}{(\beta - z^2) \sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}} + \\ &+ \frac{2\beta^2(c-g)^2\sqrt{\beta}}{\sqrt{(a-g)(b-g)}} \int_0^{z(t)} \frac{dz}{(\beta - z^2)^2 \sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}}. \end{aligned} \quad (\text{П.12})$$

Два первых интеграла непосредственно выражаются через эллиптические интегралы I и III рода.

Согласно теореме Лежандра [5] задача вычисления интегралов типа

$$J_3(t) = \int_0^t \frac{dz}{(\beta - z^2)^k \sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}} \quad (\text{П.13})$$

для любого целого положительного k может быть решена с помощью построения рекуррентных соотношений, уменьшающих число k до значения единицы.

Для доказательства достаточно продифференцировать, а затем проинтегрировать полную производную от выражения:

$$z \frac{\sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}}{(\beta - z^2)^{k-1}}. \quad (\text{П.14})$$

При этом оказывается, что возникающие интегралы могут быть выражены через один из трёх эллиптических интегралов:

$$\begin{aligned} W_1(t) &= \int_0^t \frac{dz}{\sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}} = \frac{1}{|A|} F(\lambda, q), \\ W_2(t) &= \int_0^t \frac{z^2 dz}{\sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}} = |A| \{F(\lambda, q) - E(\lambda, q)\}, \\ W_3(t) &= \int_0^t \frac{dz}{(\beta - z^2) \sqrt{(B^2 - z^2)(A^2 - z^2)}} = \frac{1}{|A|\beta} \Pi(\lambda, \frac{B^2}{\beta}, q), \end{aligned} \quad (\text{П.15})$$

где $F(\lambda, q)$, $E(\lambda, q)$ и $\Pi(\lambda, B^2/\beta, q)$ – эллиптические интегралы I, II и III рода соответственно.

Непосредственные вычисления показывают, что в нашем простейшем случае ($k = 2$) дело сводится к нахождению четырёх неопределённых коэффициентов L , N , G и V в разложении следующего вида:

$$J_3(t) = L \frac{t \sqrt{(B^2 - t^2)(A^2 - t^2)}}{(\beta - t^2)} + NW_1(t) + GW_2(t) + VW_3(t). \quad (\text{П.16})$$

Дифференцируя формулу (П.16) по t , получим уравнение для нахождения неизвестных коэффициентов. Фактически дело сводится к приравниванию к нулю коэффициентов при различных степенях полинома. В результате получим четыре линейных

уравнения:

$$\begin{aligned} -G + L &= 0, & N + 3L\beta - 2G\beta &= 0, \\ -2N\beta + G\beta^2 - L [2(A^2 + B^2)\beta - A^2B^2] - V &= 0, \\ N\beta^2 + V\beta + \beta LA^2B^2 &= 1. \end{aligned} \quad (\text{П.17})$$

Отсюда находим коэффициенты:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2\beta(\beta - A^2)(\beta - B^2)}, & N &= -L\beta, & G &= L, \\ V &= \frac{3\beta^2 - 2\beta(A^2 + B^2) + A^2B^2}{2\beta(\beta - A^2)(\beta - B^2)}. \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Учитывая связь интегралов $W_1(t)$, $W_2(t)$ и $W_3(t)$ с функциями (П.15), находим окончательный результат:

$$J_3\left(\lambda, \frac{B^2}{\beta}, q\right) = R(t) + XF(\lambda, q) + YE(\lambda, q) + Z\Pi\left(\lambda, \frac{B^2}{\beta}, q\right), \quad (\text{П.19})$$

где $\lambda = \arcsin(t/|B|)$, $q = |B|/|A|$, а постоянные коэффициенты имеют следующий вид:

$$R(t) = \frac{t\sqrt{(A^2 - t^2)(B^2 - t^2)}}{2\beta(\beta - A^2)(\beta - B^2)(\beta - t^2)}, \quad (\text{П.20})$$

$$X = \frac{1}{2A\beta(B^2 - \beta)}, \quad Y = -LA, \quad Z = \frac{V}{A\beta}. \quad (\text{П.21})$$

Формулы (П.17) – (П.21) решают поставленную задачу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Josephson B. D.* // Phys. Lett. 1960. **1**, 251; Rev. Mod. Phys. 1964. **36**, 216.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. – М.: Физматлит, 2001. – 536 с.
3. *Зайцев Р.О.* Введение в современную статистическую физику. – М.: УРСС, 2005. – 396 с.
4. *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов. – М.: Наука, 1987. – 420 с.
5. *Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н.* Курс современного анализа. Ч. II – М.: ФМЛ, 1963. – 515 с.