

УТВЕРЖДЕНО
Проректор по учебной работе
и экономическому развитию
Д.А. Зубцов
27 июня 2016 г.

ПРОГРАММА

по дисциплине: **Современные проблемы естествознания
и устойчивого развития. Методы теоретической
физики I**

по направлению подготовки:

03.04.01 «Прикладные математика и физика»

факультет: **все факультеты, кроме ФУПМ, ФИВТ**

кафедра: **теоретической физики**

курс I (магистратура)

семестр 1

Трудоемкость: вариативная часть – 3 зач. ед.

Лекции – 30 часов

Экзамен – 1 семестр

Практические (семинарские)

занятия – 30 часов

Дифф. зачет – нет

Лабораторные занятия – нет

Самостоятельная работа – 45 часов

Курсовые и контрольные работы – 4

ВСЕГО АУДИТОРНЫХ ЧАСОВ — 60

Программу и задание составил д.ф.-м.н., проф. Ю.М. Белоусов

Программа принята на заседании

кафедры теоретической физики

21 мая 2016 года

Заведующий кафедрой

Ю. М. Белоусов

Элементы классической электродинамики

1. Элементы специальной теории относительности

Принцип относительности и преобразования Лоренца. Четырехмерное псевдоевклидово пространство Минковского и математический аппарат теории относительности. Движение свободной релятивистской частицы и релятивистская кинематика.

2. Классическая система зарядов в электромагнитном поле

Скалярный и векторный потенциалы как компоненты 4-вектора. Электрическое и магнитное поля и их выражения через компоненты 4-потенциала. Калибровочная инвариантность. Лоренцева калибровка. Уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле, сила Лоренца. Гамильтонова форма уравнений движения, гамильтониан. Связь обобщенного импульса с кинематическим.

3. Уравнения Максвелла как обобщение опытных фактов

Фундаментальные законы Кулона, Био-Савара, Фарадея и их соответствие уравнениям Максвелла. Волновые уравнения, их вид в лоренцевой и кулоновской калибровках. Энергия электромагнитного поля, закон сохранения энергии, вектор Пойнтинга и тензор напряжений. Функция Грина волнового уравнения. Запаздывающие потенциалы.

4. Энергия системы зарядов в электромагнитном поле

Взаимодействие системы зарядов со статическим электрическим полем. Разложение энергии взаимодействия по мультиполям, дипольный и квадрупольный моменты. Поле, создаваемое системой зарядов на больших расстояниях, поле электрического диполя и квадруполья. Взаимодействие систем зарядов, находящихся на больших расстояниях друг от друга. Взаимодействие системы зарядов, совершающей финитное движение, с магнитным полем; гиромагнитное отношение и магнитный момент системы зарядов.

5. Свободное электромагнитное поле

Решение волновых уравнений свободного электромагнитного поля в виде плоской монохроматической волны, поляризация. Энергия свободного электромагнитного поля. Разложение свободного поля по нормальным колебаниям – плоским монохроматическим волнам. Гамильтониан свободного электромагнитного поля.

6. Излучение

Излучение электромагнитного поля системой зарядов, квазистационарная и волновая зоны. Электрическое дипольное, квадрупольное и магнитное дипольное излучения. Потеря энергии системой зарядов на излучение, сила радиационного трения.

Методы квантовой механики. Одночастичная теория

1. Постулаты квантовой механики. Векторная (дираковская) формулировка

Состояние и пространство состояний, физические величины (наблюдаемые) и операторы, принцип суперпозиции, полнота описания квантовой системы, уравнение Шредингера. Понятие представления, координатное и импульсное представления, волновая функция, матричные элементы операторов. Задача на собственные значения. Эрмитовское сопряжение и эрмитовы операторы, свойства их собственных векторов.

2. Гамильтониан и другие основные операторы

Гамильтоновы системы, классический и квантовый гамильтонианы. Эволюция физических величин во времени, скобки Пуассона. Квантовые скобки Пуассона – коммутаторы. Соответствие между физическими величинами и операторами. Соотношения неопределенностей для квантовых систем. Постулат коммутационного соотношения между операторами координаты и импульса. Представление операторов координаты и импульса в координатном и импульсном представлении. Функция от оператора, уравнение Шредингера в координатном и импульсном представлении.

2. Некоторые свойства операторов

Эволюция состояния во времени, оператор эволюции. Интегралы движения. Условия одновременной измеримости физических величин. Интегралы движения и полный набор физических величин. Вырождение спектра и неоднозначность выбора представления (способа описания) состояния квантовой системы. Понятие симметрии.

3. Гармонический осциллятор как одна из точно решаемых моделей

Гамильтониан трехмерного и одномерного гармонического осциллятора. Осцилляторные единицы энергии, длины и импульса. Повышающий \hat{a}^+ и понижающий \hat{a} операторы и запись с их помощью гамильтониана. Решение задачи в энергетическом представлении, энергетический спектр осциллятора и состояния. Соотношение неопределенностей для координаты и импульса в осцилляторе и его минимизация в основном состоянии. Понятие когерентного состояния. Состояния осциллятора в координатном и импульсном представлении.

4. Момент импульса

Изотропия пространства и сохранение момента импульса. Оператор

поворота и его связь с оператором импульса системы. Коммутационные соотношения для проекций оператора импульса. Собственные состояния системы, обладающей определенным значением импульса. Значения, которые может принимать момент импульса. Координатное представление оператора момента, собственные функции. Полуцелые значения момента и понятие спина.

5. Центральное поле и атом водорода

Задача двух тел в классической и квантовой механике. Гамильтониан системы в случае центрального взаимодействия. Разделение радиальных и угловых переменных в сферической системе координат. Угловая часть волновой функции и собственная функция оператора момента импульса. Вырождение энергетического спектра частицы в центральном поле. Кулоновское поле и атом водорода. Кулоновская и атомная система единиц. Энергетический спектр и состояния атома водорода, вырождение спектра водородоподобного атома. Классификация состояний атома водорода и частицы в произвольном центральном поле.

Приближенные методы квантовой механики

1. Квазиклассическое приближение

Действие в классической механике и уравнение Гамильтона–Якоби. Волновая функция стационарного состояния и ее выражение через квантовое действие. Уравнение для квантового действия, квазиклассическое разложение по степеням \hbar . Критерии применимости квазиклассического приближения, классически разрешенные и запрещенные области, вид волновой функции. Правило квантования Бора–Зоммерфельда и проникновение частицы через потенциальный барьер. Понятие квазистационарных состояний, описание распада в квантовой механике.

2. Стационарная теория возмущений

Постановка задачи теории возмущений, стационарный случай. Функция Грина стационарного уравнения Шредингера и ряд стационарной теории возмущений. Поправки к состояниям и уровням энергии дискретного спектра. Случай вырожденного энергетического спектра. Непрерывный спектр. Функция Грина свободной частицы. Интегральное уравнение и задача о рассеянии. Общий вид волновой функции частицы в задаче о рассеянии, упругое рассеяние. Амплитуда рассеяния и дифференциальное сечение рассеяния. Борновское приближение, особенности рассеяния медленных и быстрых частиц.

Основная литература

1. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. – М.: Наука, 2004.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – М.: Наука, 2004.
3. *Белоусов Ю.М.* Методы теоретической физики. Часть 1. – М.: МФТИ, 2010.
4. *Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И.* Задачи по теоретической физике. – М.: ИД "Интеллект" 2012.
5. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Практическая математика. Руководство для начинающих изучать теоретическую физику. – Долгопрудный: ИД "Интеллект", 2009.

Дополнительная литература

1. *Мессиа А.* Квантовая механика. – М.: Наука; Т. 1, 1978; Т. 2, 1979.
2. *Белоусов Ю.М.* Курс квантовой механики. Нерелятивистская теория. – М.: МФТИ, 2006.
3. *Киселев В.В.* Квантовая механика. – М.: МЦНМО, 2009.
4. *Давыдов А.С.* Квантовая механика. – М.: Наука, 1973.
5. *Елютин П.В., Кривченков В.Д.* Квантовая механика с задачами. – М.: УНЦ довуз. образования, МГУ, 2001.
6. *Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И.* Задачи по квантовой механике. – М.: Наука, 1981, 1992.
7. *Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П.* Катехизис. Руководство по математике для начинающих изучать теоретическую физику. – М.: МФТИ, 2009.

ЗАДАНИЕ 1

Упражнения

1. Найдите обратное преобразование Лоренца (обратную матрицу) $(L^{-1})^i_k$ и убедитесь, что (2)

$$(L^{-1})^i_k = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}.$$

2^C Убедитесь, что два последовательно проведенных преобразования Лоренца относительно одной и той же оси $\widehat{L}(\beta_1)$ и $\widehat{L}(\beta_2)$ также определяются матрицей $\widehat{L}(\beta_{12})$. Получите релятивистский закон сложения скоростей. Покажите, что он эквивалентен закону сложения аргументов гиперболических функций. (1)

3. Запишите компоненты 4-потенциала A^i , создаваемого точечным зарядом в системе отсчета, где он покоится. Можно ли в условиях задачи положить $A^0 = \varphi = 0$? (2)

4. Запишите скалярный потенциал однородного статического электрического поля \mathbf{E} и векторный потенциал однородного магнитного поля \mathbf{H} (2).

5. Запишите компоненты 4-потенциала A^i , создаваемого точечным зарядом, движущимся с произвольной скоростью \mathbf{v} (3).

6. Используя определение тензора, получите преобразование электрического и магнитного полей \mathbf{E} и \mathbf{H} при переходе в систему отсчета, движущуюся относительно лабораторной со скоростью $\mathbf{V}||x$. (3).

ЗАДАЧИ

1^C Для нейтрино, образующихся при распаде π -мезонов с энергией 6 ГэВ (масса π -мезона ≈ 140 МэВ, масса мюона ≈ 105 МэВ), определите энергетический спектр, их максимальную и среднюю энергии и угловое распределение, если известно, что в системе покоя π - мезона распад $\pi \rightarrow \mu + \nu$ происходит изотропно. Используя одну из стандартных вычислительных программ, постройте график углового распределения $f(\theta)$. (3)

2. Используя закон сохранения 4-импульса при столкновении частиц, определите изменение частоты плоской монохроматической волны (фотона) при рассеянии ее на электроны на угол θ относительно первоначального направления распространения \mathbf{k} . (3)

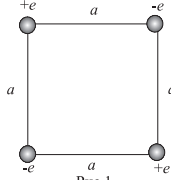


Рис.1

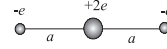


Рис.2

3^C Решите в четырехмерной форме задачу о движении релятивистской заряженной частицы в постоянных электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{H} полях в случае $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$. Найдите траекторию частицы, если в начальный момент времени она находилась в начале координат и имела импульс \mathbf{p}_0 . (2)

4. Определите электрическое поле, создаваемое системой зарядов, показанной на рис.1 и 2, на расстояниях много больших размеров системы $r \gg a$. Запишите выражение через квадрупольный момент.

Чему равна энергия этой системы зарядов, помещенной в однородное электрическое поле? (3)

5. Определите магнитный момент системы, состоящей из двух разноименно заряженных частиц ($e_1 = -e_2 = e$) с массами m_1 и m_2 соответственно вращающихся друг относительно друга на расстоянии r и обладающих моментом импульса \mathbf{M} . (2)

6^C Нерелятивистская частица с массой m и зарядом e , движущаяся со скоростью \mathbf{v} попадает в однородное магнитное поле $\mathbf{H} \perp \mathbf{v}$. Определите изменение энергии частицы во времени и ее траекторию. (2)

7. Электрон тормозится с постоянным ускорением, параллельным скорости ($\mathbf{w} \parallel \mathbf{v}$) за время τ в собственной системе отсчета. Определите длительность им пульса излучения, которую зафиксирует наблюдатель, находящийся на большом расстоянии и наблюдающий движение под углом θ к скорости. (3)

ЗАДАНИЕ 2

Упражнения

1. Найдите операторы, эрмитово сопряженные и обратные по отношению к операторам: а) инверсии \hat{I} и б) трансляции \hat{T}_a . (2)

2^C Найдите собственные значения и собственные состояния операторов инверсии \hat{I} и трансляции \hat{T}_a . (2)

3. Убедитесь в справедливости следующих соотношений (1):

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}, \quad [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}.$$

4. Раскройте следующие коммутаторы (3):

$$[\hat{x}_\alpha, \hat{\mathbf{p}}^2], \quad [U(\mathbf{r}), \hat{\mathbf{p}}], \quad [U(r), \hat{\mathbf{p}}^2], \\ [\hat{x}_\alpha, \hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma], \quad [\hat{p}_\alpha, \hat{x}_\beta \hat{p}_\gamma], \quad [\hat{x}_\alpha \hat{p}_\beta, \hat{x}_\gamma, \hat{p}_\nu],$$

5. Найдите явный вид оператора $e^{i\varphi \hat{I}}$. (2)

6. Постройте оператор, соответствующий физической величине $\varphi = (\mathbf{r}\mathbf{p})$, где \mathbf{r} и \mathbf{p} соответственно радиус-вектор и импульс частицы. (2)

7. Воспользовавшись повышающим и понижающим операторами \hat{a}^+ и \hat{a} , найдите средние значения операторов \hat{x}^2 , \hat{x}^4 и \hat{x}^{2k+1} в n -м стационарном состоянии линейного гармонического осциллятора. (2)

8. Раскройте следующие коммутаторы (3):

$$[\hat{l}_\alpha, \hat{x}_\beta], \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{p}_\beta], \quad [\hat{l}_\alpha, \hat{\mathbf{r}}^2], \quad [\hat{l}_\alpha, (\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{p}})], \\ [\hat{l}_\alpha, f(r)], \quad [\hat{l}_z, f(\rho)], \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

9. Постройте матрицы операторов углового момента \hat{j}_x , \hat{j}_y , \hat{j}_z , а также $\hat{\mathbf{j}}^2$, \hat{j}_+ и \hat{j}_- для квантовой системы с угловым моментом $j = 1$. Как выглядят собственные векторы операторов $\hat{\mathbf{j}}^2$ и \hat{j}_z ? (3)

10^C Воспользовавшись явным видом матриц Паули, докажите справедливость следующих соотношений:

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} + i e_{klm} \sigma_m,$$

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\mathbf{b}) + i(\boldsymbol{\sigma}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]),$$

где \mathbf{a} и \mathbf{b} – произвольные векторы. (2)

11^C Найдите явный вид оператора $e^{i\alpha(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})}$. (1)

12^C Найдите собственные значения и собственные векторы спинового оператора $\hat{\sigma}_n = (\hat{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n})$, где \mathbf{n} – единичный вектор с составляющими:

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta).$$

Обсудите случаи, когда вектор \mathbf{n} направлен вдоль осей x , y и z . (2)

13. Пусть электрон находится в состоянии с проекцией спина на ось z , равной $1/2$. Найдите вероятность того, что проекция спина этого электрона на направление \mathbf{n} равна $1/2$ (или $-1/2$). (1)

ЗАДАЧИ

1. Частица массы m совершает финитное движение в одномерной “прямоугольной” потенциальной яме конечной глубины:

$$U(x) = \begin{cases} -U_0, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

Найдите уровни энергии E_n и волновые функции $\psi_n(x)$ стационарных состояний. Исследуйте, существуют ли связанные состояния в “прямоугольной” потенциальной яме фиксированной ширины $2a$, если $U_0 \rightarrow 0$? Согласуется ли результат с соотношением неопределенностей?

Используя одну из стандартных вычислительных программ, постройте графическое решение задачи.

Воспользуйтесь полученными результатами для оценки числа уровней электрона в металлическом образце (глубина потенциала $U_0 = 10$ эВ примерно равна работе выхода), если $a = 0.1$ нм (“атом”); $b) a = 10$ нм (“наночастица”); $в) a = 1$ см (“макроскопический образец”). (4)

2. Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний для частицы массы m в одномерной потенциальной яме следующего вида:

$$U(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ -U_0, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a. \end{cases}$$

Что здесь можно сказать о связанных состояниях при фиксированном a и $U_0 \rightarrow 0$? (2)

3. Частица массы m свободно движется вдоль оси x с энергией E и в области $x > 0$ попадает в область действия потенциала, который имеет вид: $a)$ прямоугольной потенциальной ямы ширины a и глубины U_0 , $б)$ прямоугольного потенциального барьера ширины a и высоты U_0 . Найдите коэффициенты прохождения $T(E)$ и отражения $R(E)$ частицы от указанных потенциалов; нарисуйте графики. Существуют ли энергии, при которых ямы и барьеры полностью прозрачны для падающих частиц? Если “да”, то сформулируйте, чем определяются эти энергии.

Используя одну из стандартных вычислительных программ, постройте графики коэффициентов прохождения и отражения. (4)

4.^C Частица массы m совершает финитное движение в одномерной модельной потенциальной яме, вид которой может быть представлен δ -функцией:

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa_0}{m} \delta(x),$$

где κ_0 – параметр ямы. Покажите, что в этой яме имеется только одно связанное состояние; найдите энергию уровня и волновую функцию частицы в координатном представлении. Вычислите $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle$ и $\langle (\Delta p)^2 \rangle$ в этом состоянии. (1)

5. Частица массы m свободно движется вдоль оси x с энергией E и попадает в область действия δ -потенциала (см. задачу 4). Найдите коэффициенты прохождения $T(E)$ и отражения $R(E)$ частицы; нарисуйте графики. (2)

6.^C Частица массы m совершает финитное движение в одномерном потенциальном поле вида

$$U(x) = -\frac{\hbar^2 \kappa_0}{m} (\delta(x+a) + \delta(x-a)),$$

где κ_0 – параметр потенциала. Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний. Как зависит число связанных состояний от параметров a и κ_0 ?

Покажите, что в предельном случае сильной связи $\kappa_0 a \gg 1$ связанные состояния представляют собой дублет близко расположенных уровней. В этом же пределе $\kappa_0 a \gg 1$ найдите вероятность нахождения частицы в момент t в правой яме ($x = a$), если при $t = 0$ она находилась в левой яме ($x = -a$). (2)

7.^C Частица массы m движется в одномерном периодическом поле вида

$$U(x) = \frac{\hbar^2 \kappa_0}{m} \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(x - na),$$

где κ_0 и a – параметры потенциала. Покажите, что имеются зоны “разрешенных” и “запрещенных” энергий. Определите зависимость энергии от квазиимпульса частицы (закон дисперсии) вблизи краев разрешенных зон энергии. (2)

8.^C Частица массы m находится в связанном состоянии в δ -потенциале (см. задачу 4). В момент $t = 0$ происходит мгновенное

изменение параметра ямы от κ_0 до κ_1 . Найдите вероятность “ионизации”. Обсудите эволюцию волновой функции частицы сразу после ионизации в случае, когда $\kappa_1 = 0$. (2)

9* Частица массы m движется в мелкой двумерной потенциальной яме с “плоским” дном:

$$U(\rho) = \begin{cases} -U_0, & \rho < a, \\ 0, & \rho > a. \end{cases}$$

Покажите, что при сколь угодно малом U_0 существует связанное стационарное состояние частицы в этом потенциале. Найдите энергию этого состояния.

Существует ли аналогичное связанное состояние в мелкой трехмерной потенциальной яме с “плоским” дном? Если “нет”, то каким должно быть U_0 для появления связанного состояния? (6)

10. Частица массы m движется в трехмерной потенциальной яме с “плоским” дном и бесконечно высокими стенками:

$$U(r) = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \infty, & r > a. \end{cases}$$

Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных s -состояний. (3)

11.* Решите предыдущую задачу для состояний с произвольным орбитальным моментом. Сравните последовательность уровней $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 3d \dots$ в этой задаче с тем, что получалось для трехмерного изотропного осциллятора и атома водорода. (6)

12^C Частица массы m совершает финитное движение в одномерном потенциале $U(x)$. Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите уровни энергии и волновые функции связанных состояний для случаев

$$\begin{aligned} a) \quad & U(x) = m\omega^2 x^2/2, \\ б) \quad & U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ m\omega^2 x^2/2, & x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

В случае a) (одномерный гармонический осциллятор) приведите волновые функции в квазиклассическом приближении к такому виду, чтобы было ясно, что они обладают нужной четностью. Для первых трех состояний постройте графики волновых функций, найденных в квазиклассическом приближении, и сравните их с графиками точных волновых функций. (3)

13.* Частица массы m с энергией E “заперта” в области $r < r_0$, где $U(r) = -U_0$, высоким потенциальным барьером:

$$U(r) = 2Ze^2/r, \quad r > r_0; \quad E \ll 2Ze^2/r_0.$$

Воспользовавшись квазиклассическим приближением, найдите коэффициент прохождения сквозь барьер и определите время жизни частицы в области потенциальной ямы $r < r_0$.

Обсудите связь этой задачи с элементарной теорией α -распада и получите закон Гейгера–Неттола. (4)

14.^C Используя стационарную теорию возмущений, найдите поправки к уровням энергии и состояниям линейного гармонического осциллятора под действием следующих возмущений:

$$a) \hat{V} = \alpha x, \quad б) \hat{V} = Ax^3 + Bx^4.$$

В п. а) вычислите среднее значение координаты в основном состоянии. (3)

Срок сдачи первого задания 3–8 октября 2016 г.

Срок сдачи второго задания 12–17 декабря 2016 г.

¹ В скобках указано количество баллов за соответствующие упражнения и задачи. За первое задание базовый балл равен **31**, дополнительных баллов нет.

За второе задание базовый балл равен **54** и дополнительный балл – **16**.

Максимально возможный балл за второе задание равен **70**.

Редактор Волкова И.А.

Подписано в печать 27.06.2016. Формат 60 x 84¹/16.

Усл. печ. л. 0,75. Тираж 50 экз. экз. Заказ № 222.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)» +7(495)408-58-22 E-mail: rio@mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

+7(495)408-84-30 E-mail: polygraph@mipt.ru