



## Приближенные методы квантовой механики

### 1. Стационарная теория возмущений

Постановка задачи теории возмущений, стационарный случай. Функция Грина стационарного уравнения Шредингера и ряд стационарной теории возмущений. Поправки к состояниям и уровням энергии дискретного спектра. Случай вырожденного энергетического спектра. Непрерывный спектр. Функция Грина свободной частицы. Интегральное уравнение и задача о рассеянии. Общий вид волновой функции частицы в задаче о рассеянии, упругое рассеяние. Амплитуда рассеяния и дифференциальное сечение рассеяния. Борновское приближение, особенности рассеяния медленных и быстрых частиц.

### 2. Нестационарная теория возмущений

Представление взаимодействия, ряд нестационарной теории возмущений, понятие хронологизованного произведения,  $T$ -схр. Функция Грина нестационарного уравнения Шредингера. Представление ряда теории возмущений в виде диаграмм Фейнмана. Вероятность перехода, критерии применимости нестационарной теории возмущений. Соотношение неопределенностей для энергии и времени в квантовой механике. Возмущения, действующие на системы с непрерывным спектром, вероятность переходов в единицу времени, «золотое правило» Ферми. Квазистационарные состояния, время жизни и мнимая поправка к дискретному уровню энергии.

## Методы описания многочастичных систем

### 1. Сложные (составные) системы

Состояние системы, состоящей из двух невзаимодействующих подсистем, связь между различными базисами. Действие операторов в составных системах. Сложение моментов, матрица коэффициентов Клебша–Гордана как матрица перехода между двумя представлениями. Описание слабо взаимодействующих систем, применение теории возмущений.

### 2. Методы описания тождественных частиц

Ферми- и бозе-частицы, их связь со спином. Связь многочастичного и одночастичного базисов, детерминант Слеттера, перманент. Разделение координатной и спиновой частей волновой функции системы невзаимодействующих тождественных частиц. Описание систем слабо взаимодействующих тождественных частиц. Основное состояние и понятие элементарных возбуждений. Описание систем тождественных частиц в представлении чисел заполнения. Представление чисел за-

полнения, операторы рождения и уничтожения. Гамильтониан системы тождественных частиц с парным взаимодействием.

### **3. Свободное электромагнитное поле и его взаимодействие с системами зарядов**

Гамильтониан свободного электромагнитного поля, представление в виде невзаимодействующих осцилляторов. Фотоны, операторы рождения и уничтожения фотонов. Произвольное состояние электромагнитного поля и его связь с основным состоянием или вакуумом. Гамильтониан системы зарядов с учетом свободного электромагнитного поля, оператор взаимодействия. Учет взаимодействия по теории возмущений для нерелятивистской системы. Невозмущенный гамильтониан и невозмущенные состояния. Переходы между состояниями невозмущенной системы, спонтанное и индуцированное излучение и поглощение электромагнитного поля. Время жизни возбужденного состояния системы зарядов. Электрическое дипольное излучение, правила отбора.

## **Равновесная статистическая физика**

### **1. Матрица плотности**

Матрица плотности, понятие чистых и смешанных состояний. Свойства матрицы плотности. Открытые системы и применение формализма матрицы плотности для их описания. Уравнение Лиувилля. Понятие сепарабельных и несепарабельных состояний. Роль смешанных состояний в современной физике.

### **2. Связь термодинамики и статистической физики**

Связь термодинамики и статистической физики. Необходимость описания статистической системы с помощью матрицы плотности. Равновесная матрица плотности. Канонический ансамбль. Статистическая сумма. Вывод первого и второго начала термодинамики из канонического распределения Гиббса. Флуктуация энергии и теплоемкость в каноническом ансамбле. Термодинамический предел. Микроканоническое распределение. Квазинезависимые подсистемы и условие идеальности газа. Преобразование термодинамических производных. Адиабатическое размагничивание.

### **3. Идеальный больцмановский газ**

Квантовый и квазиклассический способ вычисления статистической суммы. Аддитивность и принцип тождественности. Термодинамические потенциалы. Распределение Максвелла–Больцмана. Внутренние степени свободы атомов и молекул. Вращательная и колебательная теплоемкость газа из двухатомных молекул. Сравнение вращательных

и колебательных постоянных. Вращательные статсуммы орто- и параводорода. Закон равномерного распределения. Теорема об отсутствии диа- и парамагнетизма в классической статистике. Полная теплоемкость многоатомных газов.

#### **4. Статистика и термодинамика систем с переменным числом частиц**

Статистика и термодинамика системы с переменным числом частиц. Большое каноническое распределение Гиббса. Флуктуации энергии и числа частиц. «Первое» и «второе» термодинамические неравенства. Термодинамические потенциалы и их минимальность в состоянии равновесия. Термодинамическая теория флуктуаций. Термодинамический потенциал смеси. Химическое равновесие. Формула Саха.

#### **5. Идеальные ферми- и бозе-газы**

Тепловая длина волны и температура вырождения. Распределение Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна. Переход к распределению Больцмана. Неравновесные ферми- и бозе-газы. Конденсация Бозе–Эйнштейна. Теплоемкость и уравнение состояния идеального бозе-газа. Статистика и термодинамика черного излучения. Фононы и модель Дебая. Вырожденный ферми-газ; химический потенциал, уравнение состояния, теплоемкость. Парамагнетизм Паули и диамагнетизм Ландау.

#### **6. Фазовые переходы I и II рода**

Фазовые переходы I-го и II-го рода. Теория фазового перехода в модели Изинга (самосогласованное поле). Теория Ландау фазовых переходов II-го рода. Флуктуации параметра порядка. Флуктуационная теплоемкость.

#### **7. Элементарные возбуждения в конденсированных средах**

Вторичное квантование бозонов и фермионов. Вид операторов в представлении чисел заполнения. Квантовые корреляции в идеальном ферми-газе. Слабонеидеальный бозе-газ. Преобразование Боголюбова. Сверхтекучесть. Спиновые волны в ферромагнетике. Квантование длинноволновых возбуждений, фононы и плазмоны. Электрон-фононное взаимодействие. Деформационное и поляризационное взаимодействие, поляронный эффект. Рассеяние электрона на фононах и плазмонах. Взаимодействие частиц через фононы и плазмоны.

### **Основная литература**

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. – М.: Наука, 2004.
2. Белоусов Ю.М. Методы теоретической физики. Часть 1. – М.: МФТИ, 2010.

3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть 1. – М.: Наука, 2002.
4. Максимов Л.А., Михеенков А.В., Полищук И.Я. Лекции по статистической физике. – М.: МФТИ, 2011.
5. Белоусов Ю.М., Бурмистров С.Н., Тернов А.И. Задачи по теоретической физике. – М.: ИД «Интеллект», 2012.

### Дополнительная литература

1. Мессиа А. Квантовая механика. – М.: Наука, 1978. – Т. 1; 1979. – Т. 2.
2. Белоусов Ю.М. Курс квантовой механики. Нерелятивистская теория. – М.: МФТИ, 2006.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть 2. – М.: Наука, 2002.
4. Горелкин В.Н. Методы теоретической физики. Часть 2. – М.: МФТИ, 2010.
5. Зайцев Р.О. Введение в современную статистическую физику. Курс лекций. – М.: URSS, 2013.

## ЗАДАНИЕ 1

### Упражнения

1.<sup>C</sup> Используя понижающий оператор  $\hat{S}_-$ , постройте собственные функции операторов  $\hat{S}^2$  и  $\hat{S}_z$  двух бозонов со спинами  $s_1 = s_2 = 1$  ( $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2$ ,  $\hat{S}_- = \hat{s}_{1-} + \hat{s}_{2-}$ ). (1)

2. Вычислите средние значения операторов  $(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{s}})$ ,  $(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{j}})$  и  $(\hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{s}})$  в состоянии  $|l, s, j, m_j\rangle$ . (1)

3.<sup>C</sup> Найдите явный вид оператора взаимодействия изотропного гармонического осциллятора с однородным полем в представлении взаимодействия. (2)

## ЗАДАЧИ

1<sup>C</sup> Используя стационарную теорию возмущений, найдите поправки к уровням энергии и состояниям линейного гармонического осциллятора под действием следующих возмущений:

$$a) \hat{V} = \alpha x, \quad б) \hat{V} = Ax^3 + Bx^4.$$

В п. а) вычислите среднее значение координаты в основном состоянии. (3)

2<sup>C</sup> Определите расщепление уровня энергии атома водорода с главным квантовым числом  $n = 2$  в однородном электрическом поле (эффект Штарка). Как зависит энергия расщепления от напряженности поля? Найдите правильные волновые функции нулевого приближения. (3)

3. Найдите в борновском приближении дифференциальные и полные сечения рассеяния частицы в полях:

$$a) V(r) = \frac{\alpha}{r} e^{-\varkappa r}, \quad б) V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

В случае а) покажите, что в пределе  $\varkappa \rightarrow 0$  дифференциальное сечение принимает вид Резерфордского сечения рассеяния заряженной частицы на отталкивающем кулоновском центре. Запишите критерии применимости борновского приближения для рассматриваемых случаев. (3)

4<sup>C</sup> Найдите уровни энергии и волновые функции стационарных состояний двух невзаимодействующих тождественных частиц в потенциальном ящике:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \infty, & x < 0, x > a, \end{cases}$$

если этими частицами являются: а) ферми-частицы со спинами  $s = 1/2$ ; б) бозе-частицы со спинами  $s = 0$ ; в) бозе-частицы со спинами  $s = 1$ . Чему равна в каждом из этих случаев энергия основного состояния  $N$  частиц? (2)

5\* Найдите, пользуясь вариационным методом, энергию основного состояния гелие-подобного атома с зарядом ядра  $Z$ . В качестве пробной функции возьмите

$$a) \psi(r_1, r_2) \sim e^{-\alpha(r_1+r_2)}, \\ б) \psi(r_1, r_2) \sim e^{-\alpha r_1 - \beta r_2} + e^{-\beta r_1 - \alpha r_2}.$$

В случае б) воспользуйтесь численной процедурой минимизации матричного элемента от гамильтониана по параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ . Воспользовавшись полученными результатами, установите, существует ли стабильный ион водорода  $\text{H}^+$ , а также вычислите диамагнитную восприимчивость атома гелия в основном состоянии. (5)

6<sup>C</sup> Выразите дифференциальное сечение рассеяния:

а)  $\alpha$ -частиц на  $\alpha$ -частицах,

б) протонов на протонах,

через амплитуду рассеяния двух точечных заряженных частиц друг на друге. (3)

7\* Может ли распадаться на две  $\alpha$ -частицы нестабильное ядро  ${}^8\text{Be}^*$ , находящееся в состоянии с полным угловым моментом  $J = 1$ ? (5)

8. Нейтрон находится в однородном магнитном поле  $\mathbf{H}_0 \parallel z$ . Определите время жизни состояния с проекцией спина на направление поля  $m_s = +1/2$ . Получите численное значение времени жизни для  $H_0 = 1$  кГс. (3)

## ЗАДАНИЕ 2

### Упражнения

1.  $N$  молекул идеального газа находятся в объеме  $V$ . Определите вероятность того, что в объеме  $v < V$  находится  $n$  молекул. Получите приближенное выражение, когда  $v \ll V$  (распределение Пуассона). Найдите среднее число частиц  $\bar{n}$  в объеме  $v$ , его среднюю абсолютную и относительную флуктуации. Найдите вид распределения в случае  $v \ll V$ ,  $\bar{n} \gg 1$  (распределение Гаусса). (2)

2\* На примере системы, состоящей из  $N$  молекул идеального газа, показать, что каноническое распределение Гиббса по энергиям в пределе  $N \gg 1$  переходит в микроканоническое распределение. (3)

3. Определите  $C_p - C_v$  в переменных: а)  $V, T$ ; б)  $p, T$ . Вычислите  $C_p - C_v$  для идеального газа и газа Ван-дер-Ваальса. (2)

4.<sup>C</sup> Используя принцип Больцмана, найдите флуктуации  $\frac{\Delta E^2}{\Delta N^2}$ ,  $\frac{\Delta S^2}{\Delta P^2}$ ,  $\frac{\Delta S \Delta P}{\Delta V \Delta P}$ ,  $\frac{\Delta V \Delta P}{\Delta S \Delta T}$ ,  $\frac{\Delta T^2}{\Delta V^2}$ ,  $\frac{\Delta T \Delta V}{\Delta T \Delta P}$ ,  $\frac{\Delta S \Delta V}{\Delta S \Delta V}$ . (2)

5. Вычислите температурную зависимость химического потенциала идеального вырожденного ферми-газа при  $T \ll \epsilon_F$ . (2)

6. Вычислите температурную зависимость химического потенциала идеального бозе-газа вблизи температуры бозе-конденсации  $|T - T_0|/T_0 \ll 1$ . (2)

## ЗАДАЧИ

1.<sup>C</sup> Система состоит из  $N$  независимых частиц, каждая из которых может находиться в одном из двух состояний с энергиями 0 и  $\varepsilon_0$ . Определить энтропию  $S$ -состояния системы с энергией  $E = n\varepsilon_0$  ( $N > n \gg 1$ ). Определить понятие температуры.

Найти равновесную долю частиц с энергией  $\varepsilon_0$  при температуре  $T$  и поведение энтропии при  $T = 0$ . Обсудить случай, когда каждое из состояний имеет конечную кратность вырождения  $g_0$  и  $g_{\varepsilon_0}$ . (2)

2.<sup>C</sup> Газ атомов с моментом  $J$ , спином  $S$  и орбитальным моментом  $L$  помещен в слабое магнитное поле  $H$ , температура и расщепление в магнитном поле малы по сравнению с интервалом тонкой структуры. Найти свободную энергию, вычислить  $\chi$  и исследовать случаи:

а) расщепление в магнитном поле  $\gg T$ ;

б) расщепление в магнитном поле  $\ll T$ .

Найти изменение температуры  $\Delta T$  при адиабатическом включении поля от  $H = H_0$  до нуля. (2)

3. Классический идеальный газ магнитных диполей  $\mu$  находится в магнитном поле  $H$  при температуре  $T$ . Найти намагниченность  $M(T)$  и магнитную восприимчивость  $\chi(T)$ . (3)

4.\* Построить графики зависимости вращательной теплоемкости молекул водорода, образующих статистическую смесь пара- и ортоводорода от температуры. Сравнить ее с равновесным поведением теплоемкости. (3)

5.\* Считая  $\text{He}^4$  идеальным бозе-газом, вычислить его химический потенциал при нормальных условиях ( $T = 273 \text{ K}$ ,  $P = 1 \text{ атм.}$ )

При плотности жидкого  $\text{He}^4$ :  $n = 0,022 \text{ (\AA)}^{-3}$  оценить температуру  $T$ , при которой становятся существенными квантовые эффекты. Построить зависимость химического потенциала от температуры. (3)

6. Построить кривые изотерм идеальных ферми- и бозе-газов. (2)

7.<sup>C</sup> Найти спиновую магнитную восприимчивость вырожденного электронного газа (парамагнетизм Паули свободных электронов в металле) при условии, что  $\mu_0 H$  ( $\mu_0$ -магнитный момент электрона) много меньше граничной энергии Ферми.

Найти поправочный член к этой формуле для температур, отличных от нуля, но малых по сравнению с энергией Ферми. (2)

8.\* Найти диамагнитную восприимчивость газа свободных электронов (диамагнетизм Ландау) в классическом  $T \gg \varepsilon_F$  и квантовом  $\varepsilon_F \gg T \gg \mu_0 H$  пределах. (4)

9. Найти равновесную плотность акустических фононов в кристалле при  $T \gg \Theta_D$  и  $T \ll \Theta_D$ ,  $\Theta_D$  – дебаевская температура. (3)



10<sup>C</sup> Гамильтониан ферромагнетика в модели Изинга имеет вид

$$\hat{H} = \sum_i \mu_0 \mathcal{H} s_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{i,j} s_i s_j,$$

где переменные  $s_i$  принимают значения  $\pm 1$ , индексы  $i, j$  нумеруют узлы кристаллической решетки. В приближении самосогласованного поля определить точку фазового перехода  $T_0$  и температурную зависимость магнитной восприимчивости  $\chi$  и спонтанной намагниченности вблизи  $T_0$ . (2)

11.\* Найти флуктуационную поправку к теплоемкости вблизи фазового перехода. (4)

12.\* Найти зависимость от температуры теплоемкости спиновых волн ( $T \ll J$ ). (4)

13.\* Получить в первом исчезающем порядке теории возмущений выражение для эффективной массы полярона в ионном кристалле. (4)

Срок сдачи первого задания 20–26 марта 2017 г.

Срок сдачи второго задания 08–14 мая 2017 г.

<sup>1</sup> В скобках указано количество баллов за соответствующие упражнения и задачи. За первое задание базовый балл равен **21** и дополнительный балл – **10**. Максимально возможный балл за первое задание равен **31**. За второе задание базовый балл равен **26** и дополнительный балл – **25**. Максимально возможный балл за второе задание равен **51**.

Подписано в печать 09.01.2017. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 0,75. Уч.-изд. л. 0,6. Тираж 50 экз. Заказ № .

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Московский физико-технический институт (государственный университет)»

141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mipt.ru

---

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»

141700, Моск. обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mipt.ru