Лекция 2.2
Устойчивость равновесия и движения системы

Без нарушения общности отсчет независимых координат голономной системы можно вести от положения равновесия, то есть рассматривать координаты $q^s, \quad s=\overline{1,n}$ как отклонения от положения равновесия.

Определение. *Положение равновесия называется устойчивым, если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что для всех* $t \ge t_o$ *выполняются неравенства* $\left|q^s(t)\right| < \varepsilon, \quad \left|\dot q^s(t)\right| < \varepsilon, \quad s=\overline{1,n}$, *коль скоро в начальный момент* $\left|q^s(t_o)\right| < \delta, \quad \left|\dot q^s(t_o)\right| < \delta, \quad s=\overline{1,n}$.

Определение. *Положение равновесия называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и существует такое* $\delta_o > 0$, *что* $\lim\limits_{t\to\infty} q^s(t) = 0, \quad \lim\limits_{t\to\infty} \dot q^s(t) = 0, \quad s=\overline{1,n}$, *коль скоро в начальный момент* $\left|q^s(t_o)\right| < \delta_o, \quad \left|\dot q^s(t_o)\right| < \delta_o, \quad s=\overline{1,n}$.

Определение. *Положение равновесия называется неустойчивым, если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что в некоторый момент времени выполняется, по крайней мере, одно равенство вида* $\left|q^s(t)\right| = \varepsilon$ *или* $\left|\dot q^s(t)\right| = \varepsilon$, *коль скоро в начальный момент* $\left|q^s(t_o)\right| < \delta, \quad \left|\dot q^s(t_o)\right| < \delta, \quad s=\overline{1,n}$.

Отметим, что при изменении обобщенных координат устойчивое положение равновесия может стать неустойчивым.

Пример. Показать, что положение равновесия линейного осциллятора $m\ddot q + kq = 0$ устойчиво. Общее решение уравнения имеет вид

$$q = q_o \cos[\omega(t-t_o)] + \frac{\dot q_o}{\omega}\sin[\omega(t-t_o)], \quad \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Для любого $\varepsilon > 0$, из неравенств

$$\left|q(t)\right| \le \left|q_o\right| + \frac{1}{\omega}\left|\dot q_o\right| \le \varepsilon, \quad \left|\dot q(t)\right| \le \omega\left|q_o\right| + \left|\dot q_o\right| \le \varepsilon, \qquad \text{где} \qquad \left|q_o\right| < \delta, \quad \left|\dot q_o\right| < \delta$$

находим δ. Например, $\delta = \min\left(\dfrac{\omega\varepsilon}{2}, \dfrac{\varepsilon}{2\omega}\right)$.

Пример. Показать, что положение равновесия осциллятора с вязким трением $m\ddot q + f\,\dot q + kq = 0$ асимптотически устойчиво. Общее решение имеет вид

$$q = \exp(-ht)\left(C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t\right),$$

где $2h = \dfrac{f}{m}, \quad \omega^2 = \dfrac{k}{m} - h^2, \qquad C_1 = q_o, \quad C_2 = \dfrac{1}{\omega}\left(\dot q_o + hq_o\right).$

Отсюда при любом t $\qquad \left|q(t)\right| \le \left|C_1\right| + \left|C_2\right| \le \dfrac{\omega + h}{\omega}\left|q_o\right| + \dfrac{1}{\omega}\left|\dot q_o\right| < \varepsilon,$

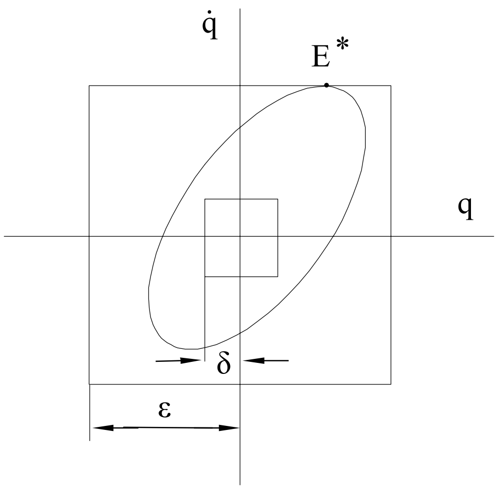
$$\left|\dot q(t)\right| \le (\omega + h)\left(\left|C_1\right| + \left|C_2\right|\right) \le \frac{(\omega + h)^2}{\omega}\left|q_o\right| + \frac{\omega + h}{\omega^2}\left|\dot q_o\right| < \varepsilon,$$

если $\left|q_o\right| < \delta, \quad \left|\dot q_o\right| < \delta$, где, например, $\delta = \min\left[\frac{\omega\varepsilon}{2}, \frac{\omega\varepsilon}{2(\omega + h)^2}\right]$

В этих примерах устойчивость установлена путем анализа общих решений уравнений. В более сложных ситуациях мы не имеем решений. Поэтому представляют интерес критерии устойчивости положения равновесия, не требующие интегрирования уравнений динамики.

Еще Торричелли (1644) было известно, что положение системы тел в поле тяжести будет устойчивым, если центр тяжести системы занимает самое низкое из возможных положений. Лагранж обобщил этот принцип Торричелли на случай произвольных потенциальных сил. Строгое доказательство теоремы дал впервые Л.Дирихле.

Теорема Лагранжа-Дирихле. *Если в некотором положении консервативной системы потенциальная энергия имеет строгий минимум, то это положение является положением устойчивого равновесия системы.*



Из факта минимума потенциальной энергии следует:

- равенство нулю обобщенных сил $\frac{\partial \Pi}{\partial q^s} = -Q_s = 0,\ s = \overline{1,n}$;
- рассматриваемое положение является положением равновесия;

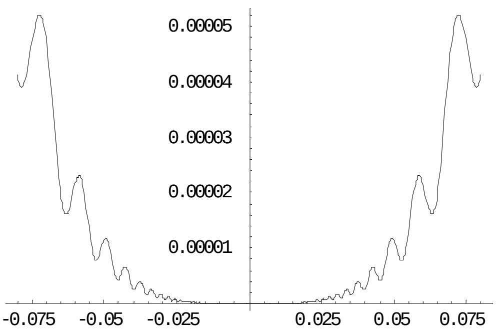
Минимум потенциальной энергии является строгим, следовательно, полная энергия $E(q.\dot q) \ge 0$ в положении равновесия также имеет строгий минимум. Поскольку граница области $\left|q^s\right| < \varepsilon, \quad \left|\dot q^s\right| < \varepsilon, \quad s = \overline{1,n}$ является замкнутым ограниченным множеством, то непрерывная функция E достигает на этой границе своего минимума E^*. В силу консервативности системы полная энергия является интегралом системы $E(q, \dot q) = E_o = const$ и все фазовые траектории, для которых $E_o < E^*$, не выходит за ε окрестность положения равновесия. Любая окрестность положения равновесия, для точек которой $E \le E_o < E^*$ может быть принята за δ окрестность. ***Теорема доказана.***

Теорема Лагранжа-Дирихле является достаточным условием. На основании этой теоремы нельзя, например, утверждать, что отсутствие минимума потенциальной энергии в положении равновесия означает его неустойчивость. Нельзя также утверждать, что положению устойчивого равновесия всегда соответствует минимум потенциальной энергии.

Теорема Лагранжа-Дирихле остается справедливой для неконсервативной системы, которая получается из консервативной добавлением гироскопических и диссипативных сил .

Во-первых, отметим, что наличие гироскопических или диссипативных сил не изменяет положение равновесия. Во-вторых, гироскопические силы не нарушают закона сохранения полной энергии, поэтому доказательство теоремы остается без изменения. Наличие диссипативных сил не увеличивают полную энергию $E \le E_o < E^*$, поэтому доказательство и в этом случае сохраняется.

В теореме Лагранжа-Дирихле не обсуждается характер минимума потенциальной энергии и возможны сюрпризы.



Пример. Потенциальная энергия системы, описываемая выражением $\Pi = x^4\left(1+\sin^2\frac{1}{x}\right)$, в положении $x=0$ имеет строгий, но не изолированный минимум. В любой окрестности нуля имеются области, которые система не сможет покинуть при соответствующем ограничении на скорость

Теорема об асимптотической устойчивости. *Если потенциальная энергия склерономной определенно-диссипативной системы в некотором положении равновесия имеет строгий минимум и это положение равновесия является изолированным, то положение равновесия асимптотически устойчиво.*

В силу теоремы Лагранжа-Дирихле для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что все движения протекают внутри области $\varepsilon-$окрестности начала координат, то есть положение равновесия устойчиво. Поскольку энергия $E(t)-$ непрерывная монотонно убывающая неотрицательная функция, существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} E(t) = E_\infty \ge 0$ и $E(t) \ge E_\infty$. Допустим, что $E_\infty \ne 0$, то есть $E_\infty\left(q^*, \dot{q}^*\right) > 0$ и точка $\left(q^*, \dot{q}^*\right)$ не совпадает с началом координат, где $E=0$. Поскольку в окрестности точки $E=0$ нет других точек равновесия, точка $\left(q^*, \dot{q}^*\right)$ не является положением равновесия. Система движется и хотя бы одна из обобщенных скоростей отлична от нуля, $dE/dt < 0$ и $E(t) < E_\infty$, а это невозможно, так как $E(t) \ge E_\infty$ при любом $t > t_o$. Итак, пришли к противоречию, предположив $E_\infty \ne 0$. Имеет место предел $E_\infty = 0$. Система стремится к положению равновесия. ***Теорема доказана.***

Ляпунов обратил внимание на то, что при доказательстве теоремы Лагранжа-Дирихле можно вместо энергии $E(q,\dot{q})$ взять любую непрерывную функцию $V(q,\dot{q})$, имеющую в состоянии равновесия строгий минимум, равный нулю и не возрастающую при любом движении системы. Функцию $V(q,\dot{q})$ принято называть функцией Ляпунова. Рассмотрение энергии или какой-либо другой функции позволяет делать суждения о всех переменных системы сразу вместо рассмотрения каждой по отдельности. Доказательство теоремы

Лагранжа-Дирихле с использованием функции Ляпунова состоит в дословном ее повторении.

В положении равновесия производная по времени функции $V\left(q,\dot{q}\right)$ в силу уравнений движения $\dfrac{dV}{dt}=\sum_{k=1}^{n}\left[\dfrac{\partial V}{\partial q^k}\dot{q}^k+\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}^k}G\left(q,\dot{q}\right)\right]$ обращается в нуль. Доказательство асимптотической устойчивости для диссипативной системы будет более простым, если в положении равновесия производная dV/dt имеет строгий экстремум противоположного типа по отношению к экстремуму функции $V\left(q,\dot{q}\right)$. В положении равновесия dE/dt не имела строгого максимума, и пришлось говорить об его изолированности.

Итак, можно считать доказанной следующую теорему.

Обобщение теоремы Лагранжа-Дирихле. *Если дано положение равновесия склерономной системы, находящейся под действием сил, не зависящих явно от времени, и существует непрерывная вместе с частными производными первого порядка функция $V\left(q,\dot{q}\right)$, имеющая в данном состоянии равновесия строгий экстремум, в то время как производная dV/dt, вычисленная в силу уравнений движения, имеет в этом же положении экстремум противоположного типа, то рассматриваемое положение равновесия устойчиво . Если при этом экстремум производной также является строгим, то положение равновесия асимптотически устойчиво.*

В 1892 году М.Ляпунов в своей диссертации «Общая задача об устойчивости движения» поставил вопрос об обращении теоремы Лагранжа. Этот вопрос до сих пор полностью не решен. Частичное решение этого вопроса дают теоремы о неустойчивости.

Разложим кинетическую и потенциальную в ряд по степеням $q^s,\dot{q}^s,\quad s=\overline{1,n}$:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(0\right)\dot{q}^i\dot{q}^j+\left(*\right)=T_2+\left(*\right),$$

$$\Pi=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}q^iq^j+\left(*\right)=\Pi_2+\Pi_3+\ldots$$

Первая теорема Ляпунова о неустойчивости положения равновесия. *Если потенциальная энергия консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и это обстоятельство следует из членов второй степени Π_2, то данное положение равновесия неустойчиво.*

Две квадратичные формы $T_2\geq 0,\Pi_2$ одна из которых положительно-определенная неособенным линейным преобразованием переменных $q^s,\quad s=\overline{1,n}$ можно одновременно привести к сумме квадратов, после чего разложение T и Π примет вид $T=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\dot{\theta}^k\dot{\theta}^k+\left(*\right),\quad \Pi=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\theta^k\theta^k+\left(*\right).$

Поскольку потенциальная энергия не имеет минимума квадратичная форма Π_2 принимает отрицательные значения, то, по крайней мере, одно $\lambda_k<0$, и уравнения движения имеют вид

$$\ddot{\theta}^k = -\lambda_k \theta^k + (*), \quad k = \overline{1,n} \ .$$

Рассмотрим вспомогательную квадратичную форму

$$V = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \left[\left({\lambda_k}^2 + \lambda_k + \frac{\mu^2}{2} \right) \theta^k \theta^k + \mu(1-\lambda_k)\theta^k \dot{\theta}^k + \left(1 + \lambda_k + \frac{\mu^2}{2}\right) \dot{\theta}^k \dot{\theta}^k \right],$$

где $\sigma_k = 1$ при $\lambda_k \geq 0$ и $\sigma_k = -1$ при $\lambda_k < 0$ и $\mu > 0$.

Вычислим производную $\quad \dfrac{d}{dt}\left[\exp(-\mu t)V\right] =$

$$= \exp(-\mu \quad t)\left[\mu \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \left(\lambda_k + \frac{\mu^2}{4} \right) \left(\theta_k \theta_k + \dot{\theta}_k \dot{\theta}_k \right) + (*) \right].$$

Пусть $\lambda_1 < 0 -$ наибольшее из отрицательных λ_k . Положительное число $\mu > 0$ такое, что выполняются неравенства $\quad \lambda_1 + \dfrac{\mu^2}{4} < 0, \quad {\lambda_1}^2 + \lambda_1 + \dfrac{\mu^2}{2} > 0$. Из первого неравенства следует, что $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \left(\lambda_k + \frac{\mu^2}{4} \right)\left(\theta_k \theta_k + \dot{\theta}_k \dot{\theta}_k \right) \geq 0$ – положительно определенная квадратичная форма и при малых значениях $\left|\theta^k\right| < h, \ \left|\dot{\theta}^k\right| < h, \ k = \overline{1,n}$ вычисленная производная положительна, то есть

$$\frac{d}{dt}\left[\exp(-\mu t)V\right] > 0, \quad \to \quad V > V_o \exp\left[\mu(t - t_o)\right].$$

В силу второго неравенства можно обеспечить начальное значение $V_o > 0$. Но при этом изображающая точка обязательно выйдет за пределы окрестности $\left|\theta^k\right| < h, \ \left|\dot{\theta}^k\right| < h, \ k = \overline{1,n}$. ***Теорема доказана.***

Если в разложении потенциальной энергии первая отличная от нуля однородная форма имеет степень $m > 2$, то можно применять следующие две теоремы.

Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости положения равновесия. *Если потенциальная энергия Π консервативной системы в положении равновесия $q^k = 0, \quad k = \overline{1,n}$ имеет строгий максимум и это обстоятельство может быть определено из членов первой отличной от нуля степени $\Pi_m, \quad m \geq 2$, то это положение равновесия неустойчиво.*

Теорема Четаева о неустойчивости положения равновесия. *Если потенциальная энергия Π консервативной системы является однородной функцией отклонений $q^k, \quad k = \overline{1,n}$ и в положении равновесия $q^k = 0, \quad k = \overline{1,n}$ не имеет минимума, то это положение равновесия неустойчиво.*

Пусть движение механической системы описывается уравнениями $\dfrac{dx_i}{dt} = X_i\left(x_1, ..., x_n, t\right), \quad i = \overline{1,n}$, правые части которых удовлетворяют условиям существования и единственности решения. Частные решения $x_i^* = f_i(t), \quad i = \overline{1,n}$ этих уравнений, удовлетворяющие начальным условиям $x_{io} = f_i(t_o), \quad i = \overline{1,n}$, называют невозмущенным движением. Все другие движения $x_i(t)$ рассматриваемой системы называют возмущенным движением, а разности $y_i = x_i - f_i(t)$ - возмущениями. Переход к возмущениям в исходных уравнениях дает

$$\frac{dy_i}{dt} = Y_i(y_1,...,y_n,t) =$$

$$= X_i\left[y_1 + f_1(t),...,y_n + f_n(t),t\right] - X_i\left[f_1(t),...,f_n(t),t\right], \qquad i = \overline{1,n}$$

Эти уравнения имеют частное решение $y_i \equiv 0,\ \ Y_i(0),\ \ i = \overline{1,n}$, отвечающие невозмущенному движению. Если функции $Y_i(y)$ не зависят от t, то невозмущенное движение называют *установившимся*, в противном случае – *неустановившимся*.

Определение. *Невозмущенное движение называется устойчивым по отношению к переменным* $x_i,\ \ i = \overline{1,n}$, *если для любого сколь угодно малого числа* $\varepsilon > 0$ *существует положительное число* $\delta(\varepsilon)$ *такое, что для всех возмущенных движений, для которых в начальный момент времени* t_o *выполняются неравенства* $|y_i(t_o)| < \delta,\ \ i = \overline{1,n}$, *при всех* $t > t_o$ *выполняются неравенства* $|y_i(t)| < \varepsilon,\ \ i = \overline{1,n}$.

Определение. *Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым по отношению к переменным* $x_i,\ \ i = \overline{1,n}$, *если оно устойчиво и число* δ *можно выбрать настолько малым, что для всех возмущенных движений, удовлетворяющих неравенствам* $|y_i(t_o)| < \delta,\ \ i = \overline{1,n}$ *при всех* $t > t_o$ *выполняются условия* $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = 0,\ \ i = \overline{1,n}$.

Определение. *Невозмущенное движение называется устойчивым в целом, когда для любых возмущений при всех* $t > t_o$ *выполняются условия* $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = 0,\ \ i = \overline{1,n}$.

Для простоты будем рассматривать установившиеся движения.
В основе прямого метода Ляпунова лежат соображения, использованные Дирихле в его доказательстве теоремы Лагранжа об устойчивости положения равновесия консервативной системы. Еще раз несколько слов о функции Ляпунова. В области $|y_i(t)| < h,\ \ i = \overline{1,n}$, где $h > 0$ – достаточно малое число, рассматриваются однозначные, непрерывно дифференцируемые функции $V(y)$, обращающиеся в нуль в начале координат $y_i = 0,\ \ i = \overline{1,n}$. Производной по времени функции $V(y)$ в силу уравнений возмущенного движения называется выражение $\dfrac{dV}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial V(y)}{\partial y_k} Y_k(y)$. Следовательно, производная dV/dt также является непрерывной функцией переменных $y_i,\ \ i = \overline{1,n}$, которая обращается в

0 в начале координат. Функции Ляпунова обладают некоторыми специальными свойствами.

Функцию $V(y)$ назовем *положительно определенной* в области $\left|y_i(t)\right| < h, \quad i = \overline{1,n}$, если всюду в этой области, кроме начала координат, где она равняется нулю, выполняется неравенство $V(y) > 0$. Если же выполняется неравенство $V(y) < 0$, то функция называется *отрицательно определенной.* В том и другом случае функция называется *знакоопределенной.*

Функцию $V(y)$ назовем *знакопостоянной* (*положительно постоянной*, *отрицательно постоянной*)в области $\left|y_i(t)\right| < h, \quad i = \overline{1,n}$, если имеются точки кроме начала координат, где она равняется нулю, а в остальных точках она одного знака, то есть выполняется неравенства $V(y) \geq 0$, $V(y) \leq 0$.

Если в области $\left|y_i(t)\right| < h, \quad i = \overline{1,n}$ функция $V(y)$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то она называется *знокопеременной* в этой области.

Например, $V = y_1^6 + y_2^3 -$ знакопеременная;

$V = 5y_1^4 - 4y_1^2 y_2 + y_2^2 -$ определенно-положительная

(выполнен критерий Сильвестра: $\Delta_1 = 5 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$) ;

$V = y_1^6 + 3y_2^2 -$ определенно-положительная;

$V = y_1 - y_2^3 -$ знакопеременная.

При достаточно малых значениях $|C|$ поверхность знакоопределенной функции $V(y) = C$ замкнута и содержит внутри себя начало координат. Это семейство поверхностей стягивается в точку, совпадающую с началом координат, если $C \to 0$.

Теорема Ляпунова об устойчивости движения. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений является или знакопостоянной функцией противоположного знака с V, или тождественно равной нулю, то невозмущенное движение устойчиво* .

Пусть, например, $V(y)$ определенно-положительная. Тогда в окрестности $|y_i| < h, \quad i = \overline{1,n}$ точка $y_i = 0, \quad i = \overline{1,n}$ будет точкой строгого локального минимума функции $V(y)$. Так как $\dot{V}(y) \leq 0$ на траекториях уравнений возмущенного движения в рассматриваемой области $V(y)$ будет не возрастающей функцией. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы Лагранжа-Дирихле. ***Теорема доказана.***

Пример. Рассмотрим устойчивость перманентного вращения твердого тела с неподвижной точкой, в котором $p = \omega = const, \quad q = 0, \quad r = 0$. Это движение соответствует вращению вокруг главной оси с моментом инерции A. Динамические уравнения Эйлера

$$A\dot{p}+(C-B)qr=0,\quad B\dot{q}+(A-C)rp=0,\quad C\dot{r}+(B-A)pq=0$$

имеют интегралы

$$U_1=2T=Ap^2+Bq^2+Cr^2=const,\quad U_2=K^2=A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=const\,.$$

Введем возмущения $p=\omega+x,\quad q=y,\quad r=z$.

Уравнения возмущенного движения также имеют интегралы

$$U_1=Ax^2+By^2+Cz^2+2A\omega x,\quad U_2=A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2+2A^2\omega x\,.$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде $V=U_1^{\,2}+U_2^{\,2}$. Значения функции $V(x,y,z)$ неотрицательны. Если $A-$ наименьший или наибольший из моментов инерции, то функция $V(x,y,z)$ определенно положительна. Для этого достаточно показать, что при малых x,y,z система уравнений $U_1=0,\ U_2=0$ имеет единственное решение $x=y=z=0$. Из выражения $AU_1-U_2\equiv B(A-B)y^2+C(A-C)z^2=0$, если $A<B<C$ или $A>B>C$, то имеем $y=z=0$. При этих значениях y,z уравнения $U_1=Ax^2+2A\omega x=0,\quad U_2=A^2x^2+2A^2\omega x=0$ дают $x=0$ либо $x=-2\omega$, и при достаточно малых x,y,z имеем единственное решение $x=y=z=0$.

Итак, функция $V(x,y,z)$ положительно определенная, ее производная равна нулю. Следовательно, перманентные вращения твердого тела в случае Эйлера вокруг оси наименьшего или наибольшего из моментов инерции устойчивы в смысле Ляпунова по отношению к возмущениям скоростей p,q,r .

Пример. Рассмотрим устойчивость вращения вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью тяжелого тела с неподвижной точкой в случае Лагранжа ($A=B,\quad a=b=0$) .

Уравнения движения

$$\dot{p}=\frac{A-C}{A}qr+\frac{Gc}{A}\gamma_2,\quad \dot{q}=\frac{C-A}{A}rp-\frac{Gc}{A}\gamma_1,\quad \dot{r}=0$$

$$\dot{\gamma}_1=r\gamma_2-q\gamma_3,\qquad \dot{\gamma}_2=p\gamma_3-r\gamma_1,\qquad \dot{\gamma}_3=q\gamma_1-p\gamma_2$$

имеют частное решение

$$p=0,\quad q=0,\quad r=r_o=const,\quad \gamma_1=0,\quad \gamma_2=0,\quad \gamma_3=1\,.$$

Полагая, $p=x_1,\quad q=x_2,\quad r=r_o+x_3,\quad \gamma_1=x_4,\quad \gamma_2=x_5,\quad \gamma_3=1+x_6$,

получаем уравнения возмущенного движения

$$\dot{x}_1=\frac{A-C}{A}x_2(r_o+x_3)+\frac{Gc}{A}x_5,\quad \dot{x}_2=\frac{C-A}{A}(r_o+x_3)x_1-\frac{Gc}{A}x_4,\quad \dot{x}_3=0,$$

$$\dot{x}_4=(r_o+x_3)x_5-x_2(1+x_6),\quad \dot{x}_5=x_1(1+x_6)-(r_o+x_3)x_4,\quad \dot{x}_6=x_2x_4-x_1x_5$$

Функцию Ляпунова будем искать в виде суммы квадратичных форм

$$V=f(x_1,x_4)+f(x_2,x_5)+f\left(\frac{C}{A}x_3,x_6\right),$$

где $f(x,y)=Ax^2+2\lambda Axy-(Gc+\lambda Cr_o)y^2\,.$

По критерию Сильвестра квадратичные формы $f(x,y)$ положительно определенные при выполнении условий

$$\begin{vmatrix} A & \lambda A \\ \lambda A & -Gc-\lambda Cr_o \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} C^2/A & \lambda C \\ \lambda C & -Gc-\lambda Cr_o \end{vmatrix} > 0 \qquad \text{или}$$

$$A\lambda^2 + Cr_o\lambda + Gc < 0.$$

Не представляет труда подобрать постоянную λ, но она должна быть вещественной, что имеет место только тогда, когда $C^2 r_o^{\ 2} > 4AGc$. Это неравенство называют условием Маиевского-Четаева.

Теперь надо исследовать скорость изменения функции Ляпунова

$$\frac{df(x_1,x_4)}{dt} = 2Ax_1\dot{x}_1 + 2\lambda A\dot{x}_1 x_4 + 2\lambda Ax_1\dot{x}_4 - 2\left(Gc+\lambda Cr_o\right)x_4\dot{x}_4,$$

$$\frac{df(x_2,x_5)}{dt} = 2Ax_2\dot{x}_2 + 2\lambda A\dot{x}_2 x_5 + 2\lambda Ax_2\dot{x}_5 - 2\left(Gc+\lambda Cr_o\right)x_5\dot{x}_5,$$

$$\frac{df(x_3,x_6)}{dt} = 2\frac{C^2}{A}x_3\dot{x}_3 + 2\lambda C\dot{x}_3 x_6 + 2\lambda Cx_3\dot{x}_6 - 2\left(Gc+\lambda Cr_o\right)x_6\dot{x}_6.$$

Формальная подстановка выражений $\dot{x}_i$, $i=\overline{1,6}$ дает $\dot{V}=0$. Условия теоремы Ляпунова выполнены. Рассматриваемое движение устойчиво.

Обратимся к полученному условию. Если $c<0$, центр тяжести ниже точки подвеса, результат тривиальный. Если $c>0$, центр тяжести выше точки подвеса, выполнение условия имеет место при угловой скорости $r_o > \dfrac{2}{C}\sqrt{AGc}$.

Каждому ребенку известно, что не вращающийся волчок падает и, чтобы его ось сохраняла вертикальное положение его нужно закрутить. Точно так же все артиллеристы знают, что не вращающийся продолговатый снаряд, выстрелянный из гладкоствольного орудия, кувыркается. Возникает вопрос: какую угловую скорость нужно сообщить снаряду, чтобы он не кувыркался. Полученное условие дает ответ на этот вопрос, поскольку вращательное движение снаряда, центр тяжести которого перемещается по пологой траектории, и движение волчка около вертикали описываются одинаковыми уравнениями.

Определение. *Областью $V>0$ назовем какую-либо область окрестности $|y_i|<h$, $i=\overline{1,n}$, в которой $V(y_{1,\dots,}y_n)>0$. Поверхность $V(y_{1,\dots,}y_n)=0$ назовем границей области $V>0$.*

Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости движения. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует знакоопределенная функция V, производная которой $\dot{V}$ в силу этих уравнений есть знакоопределенная функция противоположного знака с V, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.*

В предыдущей теореме $\dot{V}(y)$ была знакопостоянной функцией, а в этой теореме $\dot{V}(y)-$ знакоопределенная функция противоположного с $V(y)$ знака.

Если условия теоремы выполнены, то выполнены условия предыдущей теоремы и невозмущенное движение устойчиво.

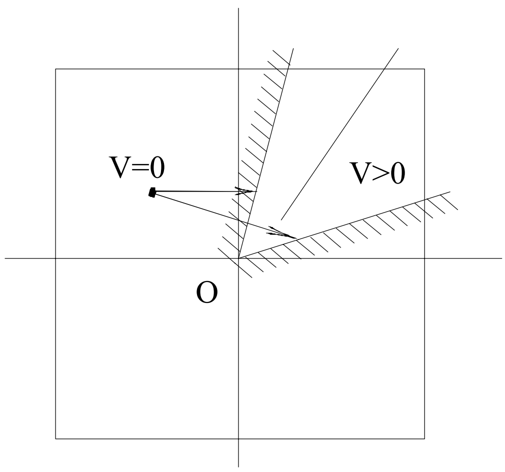
Будем считать, что функция $V(y)$ положительно определенной, тогда в области $|y_i| < h, \quad i = \overline{1,n} \quad V(y) > 0, \quad \dot{V}(y) < 0$. Функции $V(y), \dot{V}(y)$ обращаются в нуль только в точке $y_i = 0, \quad i = \overline{1,n}$. Для начальных условий $y_i \neq 0, \quad i = \overline{1,n}$ в силу единственности решения уравнений возмущенного движения $\dot{V}(y) < 0$ и функция $V(y)$ монотонно убывает, оставаясь положительной. Поскольку функция $V(y)$ ограничена, существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} V(y) = V_\infty$. Траектория возмущенного движения стремится к поверхности V_∞, оставаясь вне этой поверхности $V_o > V(y) > V_\infty$. Допустим, что $V_\infty \neq 0$ и $-\alpha$ есть точная верхняя грань функции $\dot{V}(y)$ в замкнутой области, границами которой являются поверхности V_o и V_∞. В этой области $\dot{V}(y) \leq -\alpha$ и $V(y) = V_o + \int\limits_{t_o}^{t} \dot{V} dt \leq V_o - \alpha(t - t_o)$. Получили противоречие, с ростом интервала времени $t - t_o$ положительно определенная функция $V(y)$ становится отрицательной. Противоречие означает, что $V_\infty = 0$, поверхность $V(y)$ вырождается в точку $\lim\limits_{t\to\infty} y_i = 0, \quad i = \overline{1,n}$. ***Теорема доказана.***

Пример. Твердое тело вращается вокруг неподвижной точки в среде, создающей момент сопротивления $M = -f(\omega)\omega$, где $f(\omega) > 0$. Динамические уравнения Эйлера

$$A\dot{p} + (C - B)qr = -f(\omega)p,$$
$$B\dot{q} + (A - C)rp = -f(\omega)q,$$
$$C\dot{r} + (B - A)pq = -f(\omega)r$$

имеют частное решение $p = q = r = 0$, отвечающее покою тела. Рассмотреть устойчивость этого частного движения по отношению к переменным p, q, r.

Так как в невозмущенном движении $p = q = r = 0$, то динамические уравнения Эйлера будут дифференциальными уравнения возмущенного движения. В качестве функции Ляпунова возьмем кинетическую энергию тела



$V = \frac{1}{2}\left(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2\right)$. Для производной функции V получаем выражение $\dot{V} = -f(\omega)\left(p^2 + q^2 + r^2\right)$. V – положительно определенная, а $\dot{V}$ – отрицательно определенные функции и, согласно тереме Ляпунова, равновесие асимптотически устойчиво по отношению к переменным p, q, r.

Теорема Четаева о неустойчивости движения. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения* *таковы, что существует функция V такая, что в сколь угодно малой окрестности $|y_i| < h, \quad i = \overline{1,n}$ существует область $V > 0$, во всех точках которой производная $\dot{V}$ в силу этих уравнений принимает положительные значения, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Так как граница области $V > 0$ проходит через точку $y_i = 0, \quad i = \overline{1,n}$, то начальную точку можно взять сколь угодно близко к началу координат. В области $V > 0$ производная положительна и вдоль выбранной траектории функция V монотонно возрастает $V(y) > V_o > 0$. Траектория не может выйти из области $V > 0$ через ее границу $V = 0$ и с течением времени выйдет из окрестности. $|y_i| < h, \quad i = \overline{1,n}$. Предположим обратное, тогда она находится в области $V > 0$. Функция V в окрестности $|y_i| < h, \quad i = \overline{1,n}$ ограничена, то есть $V \le A$, где $A -$положительное число. В области, являющейся пересечением областей $V > 0$ и $V > V_o$, производная $\dot{V}$ положительна и тоже ограничена $\dot{V} \ge \alpha > 0$. Тогда $V \ge V_o + \alpha(t - t_o)$, то есть с течением времени будет нарушено условие $V \le A$. Противоречие означает, что траектория выйдет из окрестности $|y_i| < h, \quad i = \overline{1,n}$. ***Теорема доказана.***

Пример. Твердое тело с неподвижной точкой в случае Эйлера вращается вокруг оси, соответствующей среднему по величине моменту инерции. Рассмотреть устойчивость этого движения.

Вводя возмущения по формулам $p = x, \quad q = \omega + y, \quad r = z$, получаем из динамических уравнений Эйлера уравнения возмущенного движения

$$\dot{x} = \frac{B - C}{A}(\omega + y)z, \quad \dot{y} = \frac{C - A}{B}zx, \quad \dot{z} = \frac{A - B}{C}x(\omega + y).$$

Производная функции $V = xz$ в силу этих уравнений имеет вид

$$\dot{V} = (\omega + y)\left(\frac{B - C}{A}z^2 + \frac{A - B}{C}x^2\right).$$

Если $\omega + y > 0$, то в области $V > 0$, определяемой неравенством $x > 0, \quad z > 0$, производная $\dot{V} > 0$. Перманентное вращение вокруг средней оси неустойчиво.

Первая теорема Ляпунова о неустойчивости движения. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция V такая, что ее производная $\dot{V}$ в силу этих уравнений есть функция знакоопределенная, а сама функция V не является знакопостоянной, противоположного с $\dot{V}$ знака, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Заметим, что выполняются условия теоремы Четаева о неустойчивости. Пусть функция $\dot{V}$ является положительно определенной. Поскольку V не является знакопостоянной, то существует область $V > 0$, расположенная сколь угодно близко к началу координат, и в этой области $\dot{V} > 0$. ***Теорема доказана***

Вторая теорема Ляпунова о неустойчивости движения. *Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что существует функция V такая, что ее производная $\dot{V}$ в силу этих уравнений, в* *области* $|y_i| < h, \quad i = \overline{1,n}$ *может быть представлена в виде* $\dot{V} = \alpha V + W$, *где* $\alpha -$ *положительная постоянная, а* W *или тождественно обращается в нуль, или представляет собой знакопостоянную функцию, и если в последнем случае функция* V *не является знакопостоянной, противоположного с* W *знака, то невозмущенное движение неустойчиво.*

Для доказательства достаточно проверить выполнение условий теоремы Четаева о неустойчивости. Если $W \equiv 0$, то сразу имеем $\dot{V} > 0$ в области $V > 0$.

Если W знакопостоянная функция, например положительная, то в любой сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $V > 0$ и из условия $\dot{V} = \alpha V + W$ следует, что во всей окрестности $|y_i| < h, \quad i = \overline{1,n}$ $\dot{V} \geq \alpha V$. Следовательно, в области $V > 0$ производная $\dot{V}$ также положительна. Условия теоремы Четаева выполнены. ***Теорема доказана.***

А.Барбашину и Н.Красовскому принадлежит теорема, определяющая достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости при наличии целого многообразия, в точках которого система находится в равновесии.

Теорема Барбашина-Красовского. *Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения можно найти положительно определенную функцию* $V(y)$, *производная которой, вычисленная в силу этих уравнений* $\dot{V}(y) < 0$ *вне* K *и* $\dot{V}(y) = 0$ *на* K , *где* $K -$ *многообразие точек, содержащее единственное решение* $y(t) \equiv 0$, *то невозмущенное движение асимптотически устойчиво, если функция* $V(y)$ *отрицательно определена, то невозмущенное движение асимптотически неустойчиво.*

Доказательство ничем не отличается от доказательств теорем Ляпунова и Четаева, так как на многообразии K $y(t) \equiv 0$, то нестандартное поведение функции $\dot{V}(y)$ не нарушает выводов упомянутых теорем.