ЭЛЕМЕНТЫ ДИНАМИКИ В КВАТЕРНИОННОМ ОПИСАНИИ ЗАДАЧА ДАРБУ О ДВИЖЕНИИ ТВЁРДОГО ТЕЛА

Ю.И.Ханукаев (khan.yuri@gmail.com)

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Получено дифференциальное уравнение для кватерниона поворота.

На X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики в связи с применением кватернионов в механике вскрылась проблема: *выражение кватерниона поворота в виде ряда по степеням угла поворота твёрдого тела не удовлетворяет кинематическому уравнению при вращении тела вокруг неподвижной точки.* Решение этой проблемы означает, например, решение задачи Дарбу.

Задача Дарбу состоит в определении ориентации твёрдого тела с неподвижной точкой по известной его угловой скорости $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Определяя ориентацию тела кватернионом поворота, имеем

$$\lambda(t)=\lambda(0)\circ\left(\tau_0\cos\frac{\varphi}{2}+\bar{\tau}_\lambda\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\tau_0\frac{(\varphi/2)^{2n}}{(2n)!}+\bar{\tau}_\lambda\frac{(\varphi/2)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right),$$

где $\lambda(0)-$кватернион начального поворота тела, τ_0-единица, $\bar{\tau}_\lambda-$кватернионная единица, определяющая ось, относительно которой второй поворот тела на угол φ даёт его конечное положение.

С другой стороны кватернионы изоморфны матрицам, то есть

$$\tau_0 \quad\Leftrightarrow\quad \overset{=}{\tau}_o=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\bar{\tau}_\lambda=\alpha_x\tau_1+\alpha_y\tau_2+\alpha_z\tau_3 \quad\Leftrightarrow\quad \overset{=}{\tau}_\lambda=\begin{pmatrix}0&-\alpha_x&-\alpha_y&-\alpha_z\\ \alpha_x&0&-\alpha_z&\alpha_y\\ \alpha_y&\alpha_z&0&-\alpha_x\\ \alpha_z&-\alpha_y&\alpha_x&0\end{pmatrix}$$

и $$\bar{\tau}_\lambda^{\,2}=-\tau_0,\quad \bar{\tau}_\lambda^{\,3}=-\bar{\tau}_\lambda,\quad \bar{\tau}_\lambda^{\,4}=\tau_0,\quad \bar{\tau}_\lambda^{\,5}=\bar{\tau}_\lambda,\quad \ldots\,.$$

Таким образом, $$\lambda(t)=\lambda(0)\circ\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(\overset{=}{\tau}_\lambda\varphi/2\right)^m}{m!}=\lambda(0)\circ\exp\left(\overset{=}{\tau}_\lambda\varphi/2\right).$$

Кинематические уравнения получают дифференцированием кватерниона поворота по времени:

$$\frac{d\lambda}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\lambda(t+\Delta t)-\lambda(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\lambda(t)\circ\lambda(\Delta t)-\lambda(t)}{\Delta t}=\frac{1}{2}\lambda\circ\bar{\omega},$$

где $$\lambda(\Delta t)=\cos\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)+\bar{\tau}_\omega\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\approx 1+\left(\frac{\bar{\omega}\Delta t}{2}\right),$$

и $\overline{\omega} = p\tau_1 + q\tau_2 + r\tau_3 = \overline{\tau}_\omega \omega, \quad \overline{\tau}_\omega = \alpha_p \tau_1 + \alpha_q \tau_2 + \alpha_r \tau_3, \quad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ – угловая скорость тела, заданная своими компонентами в базисе, связанном с телом.

Если вращение происходит вокруг неизменной оси, то $\overline{\tau}_\lambda = \overline{\tau}_\omega = const$ и

$$2\widetilde{\lambda} \circ \frac{d\lambda}{dt} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-\overline{\tau}_\lambda \varphi/2\right)^m}{m!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\left(\overline{\tau}_\lambda \varphi/2\right)^{m-1}}{(m-1)!} \overline{\tau}_\lambda \dot{\varphi} = \overline{\tau}_\omega \omega \quad \rightarrow \quad \overline{\tau}_\lambda \varphi = \overline{\tau}_\omega \int_0^t \omega(t) dt.$$

Формальное дифференцирование даёт тот же результат:

$$\varphi\dot{\varphi} = \overline{\varphi} \cdot \dot{\overline{\varphi}} = \alpha_x \varphi \alpha_p \omega + \alpha_y \varphi \alpha_q \omega + \alpha_z \varphi \alpha_r \omega \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \overline{\tau}_\lambda \cdot \overline{\tau}_\omega \omega = -\overline{\tau}_\lambda \circ \overline{\tau}_\omega \omega,$$

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{\tau}_\lambda \sin\frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{\dot{\varphi}}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \overline{\tau}_\lambda \frac{\dot{\varphi}}{2}\cos\frac{\varphi}{2} =$$

$$= \overline{\tau}_\lambda \circ \overline{\tau}_\omega \frac{\omega}{2}\sin\frac{\varphi}{2} + \overline{\tau}_\lambda \circ \left(-\overline{\tau}_\lambda \circ \overline{\tau}_\omega\right)\frac{\omega}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{\tau}_\lambda \sin\frac{\varphi}{2}\right) \circ \frac{\overline{\omega}}{2}.$$

Если вращение происходит вокруг точки, то из-за отсутствия коммутативности сомножителей $\frac{d}{dt}\left(\frac{\overline{\tau}_\lambda \varphi}{2}\right)^m \neq m\left(\frac{\overline{\tau}_\lambda \varphi}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{\overline{\tau}_\lambda \dot{\varphi}}{2}\right)$, и $\frac{d\lambda}{dt} = ?$

Кватернион поворота представим матричной экспонентой при любом вращении тела вокруг точки:

$$\overline{\overline{\lambda(t)}} = \overline{\overline{\lambda(0)}} \exp\left[\int_{t_0}^{t} \left(\overline{\overline{\omega(t)}}/2\right) dt\right], \text{ где } \int_{t_0}^{t} \overline{\overline{\omega(t)}} dt = \overline{\overline{\tau}}_\lambda \varphi,$$

$$\overline{\overline{\omega(t)}} = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & -r & q \\ q & r & 0 & -p \\ r & -q & p & 0 \end{pmatrix} = \overline{\overline{\tau}}_\omega \omega = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_p & -\alpha_q & -\alpha_r \\ \alpha_p & 0 & -\alpha_r & \alpha_q \\ \alpha_q & \alpha_r & 0 & -\alpha_p \\ \alpha_r & -\alpha_q & \alpha_p & 0 \end{pmatrix} \omega,$$

$$\overline{\tau}_\omega{}^2 = -\tau_0, \quad \overline{\tau}_\omega{}^3 = -\overline{\tau}_\omega, \quad \overline{\tau}_\omega{}^4 = \tau_0, \quad \overline{\tau}_\omega{}^5 = \overline{\tau}_\omega, \quad \ldots$$

$$\int_{t_0}^{t} p dt = \alpha_x \varphi, \quad \int_{t_0}^{t} q dt = \alpha_y \varphi, \quad \int_{t_0}^{t} r dt = \alpha_z \varphi, \quad \varphi = \sqrt{\left(\int_{t_o}^{t} p dt\right)^2 + \left(\int_{t_o}^{t} q dt\right)^2 + \left(\int_{t_o}^{t} r dt\right)^2}.$$

Из этих соотношений следует

$$\varphi\dot{\varphi} = \overline{\varphi} \cdot \dot{\overline{\varphi}} = \alpha_x \varphi \alpha_p \omega + \alpha_y \varphi \alpha_q \omega + \alpha_z \varphi \alpha_r \omega \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \overline{\tau}_\lambda \cdot \overline{\tau}_\omega \omega = \left(-\overline{\tau}_\lambda \circ \overline{\tau}_\omega + \overline{\tau}_\lambda \times \overline{\tau}_\omega\right)\omega$$

и формально $\frac{\delta}{\delta t}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{\tau}_\lambda \sin\frac{\varphi}{2}\right) = \left(-\sin\frac{\varphi}{2} + \overline{\tau}_\lambda \cos\frac{\varphi}{2}\right)\frac{\dot{\varphi}}{2} =$

$$= \left(-\sin\frac{\varphi}{2} + \overline{\tau}_\lambda \cos\frac{\varphi}{2}\right) \cdot \left(-\overline{\tau}_\lambda \circ \overline{\tau}_\omega + \overline{\tau}_\lambda \times \overline{\tau}_\omega\right)\frac{\omega}{2} = \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \overline{\tau}_\lambda \sin\frac{\varphi}{2}\right) \circ \frac{\overline{\omega}}{2} - \overline{\tau}_\lambda \sin\frac{\varphi}{2} \times \frac{\overline{\omega}}{2}. \qquad (*)$$

В выражении $\tau_0 \cos\frac{\varphi}{2} + \overline{\tau}_\lambda \sin\frac{\varphi}{2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\overline{\overline{\tau}}_\lambda \varphi/2\right)^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\left(\overline{\overline{\varphi}}/2\right)^{2n}}{(2n)!} + \frac{\left(\overline{\overline{\varphi}}/2\right)^{2n}}{(2n+1)!}\frac{\overline{\overline{\varphi}}}{2}\right)$

чётная степень $\overline{\overline{\varphi}}$ пропорциональна $\overline{\overline{\tau}}_o$, поэтому $\left(\overline{\overline{\varphi}}/2\right)^2$ коммутирует с любым сомножителем.

Так как $\quad d\left(\bar{\bar\varphi}\bar{\bar\varphi}\right)/dt=\bar{\bar\omega}\bar{\bar\varphi}+\bar{\bar\varphi}\bar{\bar\omega}=-\bar{\bar\tau}_o 2\left(\bar\varphi\cdot\bar\omega\right)=2\left(\bar{\bar\varphi}\bar{\bar\omega}-\overline{\overline{\bar\varphi\times\bar\omega}}\right)$

получаем
$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\tau_0\cos\frac{\varphi}{2}+\bar\tau_\lambda\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\right)^{n-1}\bar{\bar\tau}_o\left(-\frac{\bar\varphi}{2}\cdot\frac{\bar\omega}{2}\right)\frac{2n}{(2n)!}+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\right)^{n-1}\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\bar{\bar\tau}_o\left(-\frac{\bar\varphi}{2}\cdot\frac{\bar\omega}{2}\right)\frac{2n}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\right)^{n}\frac{\bar{\bar\omega}}{2}\frac{1}{(2n+1)!}\right].$$

Рассмотрим первую сумму:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\right)^{n-1}\frac{\bar{\bar\tau}_o}{(2n-1)!}\left(-\frac{\bar\varphi}{2}\cdot\frac{\bar\omega}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\right)^{2n-2}\left(\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\frac{\bar{\bar\omega}}{2}-\overline{\overline{\frac{\bar\varphi}{2}\times\frac{\bar\omega}{2}}}\right)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\right)^{2n-1}\frac{\bar{\bar\omega}}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overline{\frac{1}{(2n-1)!}\left(\frac{\bar\varphi}{2}\right)^{2n-1}\times\frac{\bar\omega}{2}}}=\bar\tau_\lambda\sin\frac{\varphi}{2}\circ\frac{\bar\omega}{2}-\bar\tau_\lambda\sin\frac{\varphi}{2}\times\frac{\bar\omega}{2}.$$

Вторая сумма преобразуется к виду
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\right)^{n-1}\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\bar{\bar\tau}_o\left(-\frac{\bar\varphi}{2}\cdot\frac{\bar\omega}{2}\right)\frac{2n}{(2n+1)!}=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\right)^{2n-2}\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\left(\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\frac{\bar{\bar\omega}}{2}-\overline{\overline{\frac{\bar\varphi}{2}\times\frac{\bar\omega}{2}}}\right)\frac{2n}{(2n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\right)^{2n}\frac{\bar{\bar\omega}}{2}\frac{2n}{(2n+1)!}$$

и совместно с третьей суммой даёт $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\bar{\bar\varphi}}{2}\right)^{2n}\frac{\bar{\bar\omega}}{2}\frac{2n+1}{(2n+1)!}=\tau_0\cos\frac{\varphi}{2}\circ\frac{\bar\omega}{2}$.

Итак, $\displaystyle\frac{\delta}{\delta t}\left(\tau_0\cos\frac{\varphi}{2}+\bar\tau_\lambda\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\left(\tau_0\cos\frac{\varphi}{2}+\bar\tau_\lambda\sin\frac{\varphi}{2}\right)\circ\frac{\bar\omega}{2}-\bar\tau_\lambda\sin\frac{\varphi}{2}\times\frac{\bar\omega}{2}$, что совпадает с равенством (*), при построении которого символ $\bar\tau_\lambda$ не дифференцировался.

Таким образом,
$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\delta\lambda}{\delta t}+\frac{1}{2}\left(\lambda-\tilde\lambda\right)\times\frac{\bar\omega}{2}=\frac{1}{2}\lambda\circ\bar\omega. \qquad (\alpha)$$

Угловая скорость тела может быть задана в неподвижном базисе. Тогда кинематические уравнения имеют вид
$$\frac{d\lambda}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\lambda(t+\Delta t)-\lambda(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\lambda(\Delta t)\circ\lambda(t)-\lambda(t)}{\Delta t}=\frac{1}{2}\overline{\Omega}\circ\lambda,$$
где $\quad\displaystyle\lambda(\Delta t)=\cos\left(\frac{\Omega\Delta t}{2}\right)+\bar\tau_\omega\sin\left(\frac{\Omega\Delta t}{2}\right)\approx 1+\left(\frac{\overline{\Omega}\Delta t}{2}\right)$.

При вращении тела вокруг точки
$$\varphi\dot\varphi=\bar\varphi\cdot\dot{\bar\varphi}=\alpha_x\varphi\alpha_p\Omega+\alpha_y\varphi\alpha_q\Omega+\alpha_z\varphi\alpha_r\Omega\quad\rightarrow\quad\dot\varphi=\bar\tau_\lambda\cdot\bar\tau_\Omega\Omega=\left(-\bar\tau_\Omega\circ\bar\tau_\lambda+\bar\tau_\Omega\times\bar\tau_\lambda\right)\Omega$$
и формальное дифференцирование даёт
$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\bar\tau_\lambda\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\left(-\sin\frac{\varphi}{2}+\bar\tau_\lambda\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\frac{\dot\varphi}{2}=$$

$$= \left(-\bar{\tau}_\Omega \circ \bar{\tau}_\lambda + \bar{\tau}_\Omega \times \bar{\tau}_\lambda\right)\frac{\Omega}{2} \cdot \left(-\sin\frac{\varphi}{2} + \bar{\tau}_\lambda \cos\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\overline{\Omega}}{2} \circ \left(\cos\frac{\varphi}{2} + \bar{\tau}_\lambda \sin\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{\overline{\Omega}}{2} \times \bar{\tau}_\lambda \sin\frac{\varphi}{2}.$$

То же самое имеем при матричном представлении кватерниона.

Итак, $$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{\delta\lambda}{\delta t} + \frac{\overline{\Omega}}{2} \times \frac{1}{2}\left(\lambda - \tilde{\lambda}\right) = \frac{\Omega}{2} \circ \lambda \qquad (\beta)$$

Слагаемые $\frac{1}{2}\left(\lambda - \tilde{\lambda}\right) \times \frac{\overline{\omega}}{2}$, $\frac{\overline{\Omega}}{2} \times \frac{1}{2}\left(\lambda - \tilde{\lambda}\right)$ соответственно в (α) и (β) можно интерпретировать как производные вектор-кватерниона $\bar{\tau}_\lambda$, то есть

$$\frac{d\tau_\lambda}{dt} = \frac{1}{2}\left(\lambda - \tilde{\lambda}\right) \times \frac{\overline{\omega}}{2} \qquad \text{либо} \qquad \frac{d\tau_\lambda}{dt} = \frac{\overline{\Omega}}{2} \times \frac{1}{2}\left(\lambda - \tilde{\lambda}\right).$$