О применении кватернионов в механике.

Категории, понятия, с которыми работает механика, являются скалярными, дуальными, комплексными, гиперкомплексными числами, векторами, тензорами, спинорами, и т.д. , для которых определено исчисление, позволяющее оперировать с ними по правилам алгебры. Первые систематические шаги в этом направлении были сделаны У.Гамильтоном (1805-1865). В поисках объектов, обобщающих комплексные числа, он открыл кватернионы. Х.Грассман (1809-1877) ввел понятия внешнего и внутреннего произведения для мультивекторов. У.Клиффорд (1845-1879) объединил эти две разные схемы в рамках единой алгебры. Векторное исчисление в пространстве трех измерений разработано в окончательном виде Дж.Гиббсом (1839-1903). Отметим, что различные математические методы, неразличимые с позиции алгебры, не вполне эквивалентны с точки зрения их отношения к реальности в том смысле, что новая форма записи известных результатов способствует открытию свойств, которые не были сформулированы прежде.

Изоморфизм кватернионов, векторов, матриц.

Некоторые понятия современной алгебры.

Группой называется множество G для любых элементов, которого определена бинарная ассоциативная операция $g_1 g_2 \in G$, $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3) \in G$; существует единичный элемент $e \in G$ такой, что $eg = ge = g$ для любого $g \in G$; для каждого $g \in G$ существует один и только один обратный элемент $g^{-1} \in G$ такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$, $\left(g^{-1}\right)^{-1} = g$.

Группа называется коммутативной (или абелевой), если $g_1 g_2 = g_2 g_1$ для всех $g_1, g_2 \in G$ и некоммутативной в противном случае. В случае коммутативной группы вместо $g_1 g_2 \in G$ пишут также $g_1 + g_2 \in G$ и тогда единичный элемент обозначают через 0 . При таком обозначении бинарной операции говорят, что группа задана в аддитивной записи.

Кольцом называется непустое множество K, для элементов которого определены две бинарные операции – сложение и умножение (обозначаемые соответственно $+$ и $*$).

Сложение коммутативно, ассоциативно и обратимо: $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c \quad a, b, c \in K$, $\quad a + x = b \rightarrow x = b - a \in K$. Элементы кольца образуют абелеву группу относительно сложения; она называется аддитивной группой кольца. Нуль "0" этой группы относительно умножения является "поглощающим" элементом, то есть $a * 0 = 0 * a = 0$ для любого элемента $a \in K$ кольца.

Умножение дистрибутивно относительно сложения

$$a * (b + c) = a * b + a * c, \quad (b + c) * a = b * a + c * a .$$

Кольцо может содержать делители нуля, то есть такие ненулевые элементы $a, b \in K$, что $a * b = 0$. Единицей кольца называется такой элемент $e \in K$, что $a * e = e * a = a$ для всех $a \in K$. Кольцо не обязано обладать единицей, но если она есть, то только одна.

Тело - кольцо, в котором каждое из уравнений $a * x = b, \quad y * a = b$ при $a \neq 0$ имеет единственное решение. Коммутативное, ассоциативное тело называется *полем* .

Поле - особый подкласс колец, множество, содержащее не менее двух элементов, на котором заданы две бинарные алгебраические операции – сложение и умножение, обе ассоциативны и коммутативны, связаны между собой законом дистрибутивности, то есть для любых $a, b, c \in \Pi$

$$a + b = b + a, \qquad (a + b) + c = a + (b + c),$$

$$a * b = b * a, \qquad (a * b) * c = a * (b * c), \qquad (a + b) * c = a * c + b * c.$$

В поле требуется существование нулевого элемента $0 \in \Pi$, единичного элемента $e \in \Pi$, для каждого элемента $a \in \Pi$ существование противоположного элемента $-a \in \Pi$ и для каждого ненулевого элемента $a \in \Pi$ существование обратного элемента $a^{=1} \in \Pi$, то есть

$$0 + a = a + 0 = 0, \qquad a * e = e * a = a,$$

$$a + (-a) = 0, \qquad a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

Отсюда следует, что в поле выполняется операция вычитания и операция деления на ненулевой элемент. Таким образом, все элементы поля образуют абелеву группу по сложению (аддитивная группа поля), а все ненулевые элементы – абелеву группу по умножению (мультипликативная группа поля)

Например, каждая из систем

комплексных чисел	$a + ib, \quad a, b \in R, \quad i^2 = -1,$
двойных чисел	$a + ib, \quad a, b \in R, \quad i^2 = 1,$
дуальных чисел	$a + ib, \quad a, b \in R, \quad i^2 = 0$

с законом сложения $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

и соответственно законом умножения

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac + bd) + i(ad + bc)$$

$$(a + ib)(c + id) = \quad ac \quad + i(ad + bc)$$

образует кольцо. Эти системы имеют $0 + i0$ - нуль и $1 + i0$ - единицу. Каждый элемент имеет противоположный. Любое комплексное число отличное от нуля имеет обратное. Двойное число имеет обратное, если $a^2 - b^2 \neq 0$. Дуальное число с отличной от нуля первой компонентой $a \neq 0$ также имеет обратное. Итак, из рассмотренных систем только комплексные числа образуют поле.

Алгеброй A размерности n над полем Π называется множество выражений вида $\qquad a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n,$

(где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Pi$, а $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n$ - некоторые символы) , снабженное операцией умножения на элементы поля $k \in \Pi$, выполняемой по формуле

$$k(a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n) = ka_1\mathbf{i}_1 + ka_2\mathbf{i}_2 + \ldots + ka_n\mathbf{i}_n;$$

операцией сложения: $(a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n) + (b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + \ldots + b_n\mathbf{i}_n) =$

$$= (a_1 + b_1)\mathbf{i}_1 + (a_2 + b_2)\mathbf{i}_2 + \ldots + (a_n + b_n)\mathbf{i}_n ;$$

и операцией умножения, задаваемой таблицей вида

$$\mathbf{i}_\alpha \mathbf{i}_\beta = p_{\alpha\beta,1}\mathbf{i}_1 + p_{\alpha\beta,2}\mathbf{i}_2 + \ldots + p_{\alpha\beta,n}\mathbf{i}_n , \qquad (*)$$

которая используется для нахождения произведений

$$(a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n) \cdot (b_1\mathbf{i}_1 + b_2\mathbf{i}_2 + \ldots + b_n\mathbf{i}_n) .$$

Алгебра полностью определяется своей «таблицей умножения» (*), то есть некоторым набором n^3 чисел $p_{\alpha\beta,\gamma}$. Эти числа не подчинены никаким условиям, любой набор их задает некоторую алгебру.

Если для любых двух элементов a,b алгебры A справедливо равенство $ab = ba$, то алгебра называется *коммутативной*; если для любых трех элементов a,b,c справедливо равенство $(ab)c = a(bc)$, то алгебра называется *ассоциативной*. Далее, если каждое из уравнений $ax = b, \quad ya = b \quad a,b \in A, \quad a \neq 0$ имеет единственное решение, то говорят, что A есть *алгебра с делением.* Элементы x,y, определяемые этими уравнениями, называются соответственно левым, правым частным от деления b на a. Если в алгебре A существует такой элемент e, что $ae = ea = a$ для любого $a \in A$, то этот элемент называется *единицей алгебры* A. В этом случае говорят, что A есть *алгебра с единицей* . Алгебра называется нормированной, если в ней можно так ввести скалярное произведение (a,b), что будет выполняться тождество $(ab,ab) = (a,a)(b,b)$.

Простейшим примером алгебры является одномерная алгебра с таблицей умножения $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 = \mathbf{i}_1$. Закон умножения имеет вид $(a_1\mathbf{i}_1)(b_1\mathbf{i}_1) = a_1 b_1 \mathbf{i}_1$, то есть сводится к умножению действительных чисел. Такую алгебру называют алгеброй действительных чисел.

Частным случаем алгебры является система гиперкомплексных чисел $a_o\mathbf{i}_o + a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + \ldots + a_n\mathbf{i}_n$, где $\mathbf{i}_o \equiv 1$, $\mathbf{i}_o\mathbf{i}_\alpha = \mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_o = \mathbf{i}_\alpha$, $\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\beta = p_{\alpha\beta,o} + p_{\alpha\beta,1}\mathbf{i}_1 + p_{\alpha\beta,2}\mathbf{i}_2 + \ldots + p_{\alpha\beta,n}\mathbf{i}_n$, $\alpha = \overline{1,n}$.

При $n = 1$ и таблице умножения

	1	i
1	1	i
i	i	$\mp 1,0$

имеем алгебру комплексных, двойных, дуальных чисел.

При $n = 3$ и таблице умножения

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

имеем алгебру кватернионов. В 1878 г. Фробениус (1849-1917) доказал, что единственное некоммутативное тело конечной размерности над R - тело кватернионов.

При $n=7$ и таблице умножения

	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
1	1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$
$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$
$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	-1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_1$	-1	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_4$
$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_7$	-1	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_1$	-1	$-\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	-1	$-\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_7$	$\mathbf{e}_7$	$-\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_1$	-1

имеем алгебру октав.
В отличии от комплексных чисел и кватернионов при умножении октав не выполняется ассоциативный закон. Например,

$$(\mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_2) * \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_3 * \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_7, \qquad \mathbf{e}_1 * (\mathbf{e}_2 * \mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_1 * \mathbf{e}_6 = -\mathbf{e}_7.$$

Для октав справедливы формулы $(ab)b = a(bb)$, $a(ab) = (aa)b$ - ослабленный вариант ассоциативности. Алгебры с таким свойством называют *альтернативными*.

Таблица умножения $\mathbf{i}_{\alpha\lambda}\mathbf{i}_{\mu\beta} = \delta_{\lambda\mu}\mathbf{i}_{\alpha\beta}$, где $\delta_{\lambda\mu}$ - символ Кроникера для элементов

$$\begin{aligned} a = \ & a_{11}\mathbf{i}_{11} + a_{12}\mathbf{i}_{12} + \ldots + a_{1n}\mathbf{i}_{1n} + \\ & + a_{21}\mathbf{i}_{21} + a_{22}\mathbf{i}_{22} + \ldots + a_{2n}\mathbf{i}_{2n} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + a_{n1}\mathbf{i}_{n1} + a_{n2}\mathbf{i}_{n2} + \ldots + a_{nn}\mathbf{i}_{nn} \end{aligned} \quad \text{или} \quad a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

определяет алгебру размерности n^2. Поскольку таблица умножения определяет также перемножение матриц, можно считать, что элементами алгебры являются квадратные матрицы порядка n. Итак, имеем ассоциативную алгебру квадратных матриц.

В определении алгебры наиболее сложным моментом является наличие операции умножения. Опуская закон умножения, получаем объекты, называемые $n-$***мерными векторами***, а соответствующая алгебра называется линейным, векторным пространством над полем Π. Линейное, векторное пространство -

математическое понятие, обобщающее понятие совокупности всех (свободных) векторов обычного трехмерного пространства.

Линейным, векторным пространством над полем Π называется множество $\mathbf{x},\mathbf{y},\ldots \in L$ элементов любой природы, называемых векторами, в котором определены операции сложения векторов и умножения векторов на элементы поля $\alpha,\beta,\ldots \in \Pi$.

Сложение коммутативно и ассоциативно: $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$, $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$. Имеется нуль-вектор $\mathbf{0}$ $(\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x})$, и для любого вектора $\mathbf{x}$ существует противоположный ему вектор $\mathbf{y}$ $(\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{0})$.

Умножение на элементы поля ассоциативно и дистрибутивно $\alpha(\beta\,\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$, $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\,\mathbf{x}+\beta\,\mathbf{x}$. Существует единица $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$. Умножение на векторы дистрибутивно $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\,\mathbf{x}+\alpha\,\mathbf{y}$.

Для линейного, векторного пространства имеет место понятие *базиса*, как конечного количества таких независимых векторов $\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_n$, что любой вектор $\mathbf{x}\in L$ допускает единственное разложение $\mathbf{x}=\mathbf{i}_1x_1+\mathbf{i}_2x_2+\ldots+\mathbf{i}_nx_n$. Элементы $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\Pi$ называют координатами вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\ldots,\mathbf{i}_n$. Говорят, что в $n-$мерном векторном пространстве, задано *скалярное произведение* $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, если каждым двум элементам базиса сопоставлен некоторый элемент $(\mathbf{i}_\alpha,\mathbf{i}_\beta)=g_{\alpha\beta}$ так, что $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum\limits_{\alpha\,\beta=1}^{n}g_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta\in\Pi$ и $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$ только при $\mathbf{x}=0$. Имеют место равенства $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})$, $\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\lambda\,\mathbf{x})\mathbf{y}=\mathbf{x}(\lambda\,\mathbf{y})$, $(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z})$.

Понятие линейного, векторного пространства позволяет рассматривать *Алгебру* как линейное, векторное пространство, в котором введена дополнительно операция умножения:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x}),\ \lambda(\mathbf{x}\mathbf{y})=(\lambda\,\mathbf{x})\mathbf{y}=\mathbf{x}(\lambda\,\mathbf{y}),\ (\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{y})+(\mathbf{x},\mathbf{z}).$$

Произведение базисных элементов $\mathbf{i}_\alpha,\mathbf{i}_\beta$ единственным образом записывается в виде

$$\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_\beta=p_{\alpha\beta,1}\mathbf{i}_1+p_{\alpha\beta,2}\mathbf{i}_2+\ldots+p_{\alpha\beta,n}\mathbf{i}_n.$$

Поскольку любая алгебра размерности $n-$ это векторное пространство, то принято называть две алгебры одной и той же размерности *подобными* друг другу или ***изоморфными***, если в них можно выбрать базисы с одинаковыми таблицами умножения. Изоморфные множества в математическом отношении не считаются различными.

Выше отмечалось, что любая гиперкомплексная система может рассматриваться как алгебра, в которой первый из базисных элементов является единицей алгебры : $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_\alpha=\mathbf{i}_\alpha\mathbf{i}_1=\mathbf{i}_\alpha$ для всех α. Таким образом, любая алгебра с единицей изоморфна некоторой гиперкомплексной системе.

Двумерное пространство.

Например, комплексным числам $a_1 + ia_2 \Leftrightarrow \mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2, \quad i^2 = -1$, образующим двумерное вещественное линейное пространство, можно сопоставить двумерные векторы, а последним - 2×2 матрицы. Вид матриц следует из покомпонентной записи произведения

$$z = x \cdot y = y \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} z_1 = x_1 y_1 - x_2 y_2 \\ z_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 & -z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & -x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$a + ib \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{i}_1 a + \mathbf{i}_2 b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} i \\ \mathbf{i}_2 \end{cases} \qquad i^2 - 1$$

перемножаются как $1, i$, или как векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$. Алгебры этих множеств изоморфны.

Рассмотрим двойные числа $a_1 + i\,a_2 \Leftrightarrow \mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2, \quad i^2 = 1$

$$z = x \cdot y = y \cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} z_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 \\ z_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$a + ib \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{i}_1 a + \mathbf{i}_2 b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} i \\ \mathbf{i}_2 \end{cases} \qquad i^2 = 1$$

перемножаются как $1, i$, или как векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$. Алгебры этих множеств изоморфны.

Наконец, рассмотрим алгебру дуальных чисел

$$a_1 + i\,a_2 \Leftrightarrow \mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2, \quad i^2 = 0$$

$$z = x\cdot y = y\cdot x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} z_1 = x_1 y_1 \\ z_2 = x_2 y_1 + x_1 y_2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ z_2 & z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_2 & y_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$a + ib \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{i}_1 a + \mathbf{i}_2 b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} a + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} i \\ \mathbf{i}_2 \end{cases} \qquad i^2 = 0$$

перемножаются как $1, i,$ или как векторы $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$. Алгебры этих множеств изоморфны.

Следует иметь в виду, что в комплексном пространстве базис может иметь также комплексную природу. Комплексное число $a = a_1 + ia_2$ может быть записано в виде

$$a = \frac{1}{2}(1-i)(a_1 - a_2) + \frac{1}{2}(1+i)(a_1 + a_2) = j^*\frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}} + j\frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}},$$

где $\quad j = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad j^* = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}, \quad j^2 = i, \quad j^{*2} = -i$

Сопоставляя комплексному числу вектор

$$\mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2, \quad \mathbf{i}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{i}_2 = i\mathbf{e}_2,$$

получаем $\quad \mathbf{e}_1 a_1 + i\mathbf{e}_2 a_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1\dfrac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}} + \boldsymbol{\varepsilon}_2\dfrac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}},$

где $\quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 = \dfrac{\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}, \ \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \dfrac{\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}, \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\,2} = \boldsymbol{\varepsilon}_2^{\,2} = 0 \qquad$ и

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{e}_2 = i\frac{\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2}{\sqrt{2}}.$$

Векторы, принадлежащие изотропным прямым $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_2$, имеют нулевую длину.

Элементам комплексного базиса можно сопоставить матрицы

$$\mathbf{e}_1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad i\mathbf{e}_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \qquad \mathbf{e}_1 a_1 + i\mathbf{e}_2 a_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} a_1 + \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} a_2,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 \frac{a_1 - a_2}{\sqrt{2}} + \boldsymbol{\varepsilon}_2 \frac{a_1 + a_2}{\sqrt{2}} = \begin{vmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix} \frac{a_1 - a_2}{2} + \begin{vmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{vmatrix} \frac{a_1 + a_2}{2}$$

При рассмотрении трехмерного пространства может быть выбран базис, состоящий из изотропных векторов $\boldsymbol{\varepsilon}_1$, $\boldsymbol{\varepsilon}_2$ и ортогонального к ним единичного вектора

$\mathbf{i}_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = -i\boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2, \quad (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \equiv \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2) -$ внешнее умножение,

$\boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \boldsymbol{\varepsilon}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_2 = 1, \quad (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \cdot \mathbf{e}_3 \equiv \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha \vee \mathbf{e}_3) -$ внутреннее умножение,

$$\mathbf{e}_3 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1-i \\ 1+i & 0 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Матрицы $\quad \pi_o = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \pi_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \pi_2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix}, \quad \pi_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

называются матрицами Паули.

Для любых вещественных или комплексных величин a, b, c, d матрица 2×2 может быть выражена в виде линейной комбинации матриц Паули

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a+d)\pi_o + \frac{1}{2}(b+c)\pi_1 + \frac{1}{2}i(b-c)\pi_2 + \frac{1}{2}(a-d)\pi_3 =$$

$$= \frac{1}{2}(a+d)\pi_o + \frac{c}{\sqrt{2}}\varepsilon_1 + \frac{b}{\sqrt{2}}\varepsilon_2 + \frac{1}{2}(a-d)\pi_3$$

Это тождество связывает матрицы Паули с трехмерной геометрией равенством

$$\begin{pmatrix} z & x-iy \\ x+iy & -z \end{pmatrix} = x\pi_1 + y\pi_2 + z\pi_3 = \frac{x+iy}{\sqrt{2}}\varepsilon_1 + \frac{x-iy}{\sqrt{2}}\varepsilon_2 + z\pi_3$$

Кватернионы

В 1843 году У.Гамильтон ввел понятие кватернионов как обобщение комплексных чисел на четырехмерное пространство. Аппарат кватернионов представляет собой пример четырехмерной алгебры, в которой для операции умножения однозначно определена обратная операция – деление. Особенность кватернионов состоит в правиле их умножения.

$$Z = X \circ Y = x_o y_o - (\bar{x} \cdot \bar{y}) + x_o \bar{y} + y_o \bar{x} + (\bar{x} \times \bar{y}).$$

Отсюда видно, что перемножение кватернионов не коммутативно.

Каждый кватернион определяет некоторое положительное число, равное норме кватерниона, единичный вектор $\bar{\tau} = \tau_1 \alpha_1 + \tau_2 \alpha_2 + \tau_3 \alpha_3$, где $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$, $\bar{\tau}^2 = -1$ и угол φ. Соотношения между этими величинами выражается формулой $A=\|A\|^{1/2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\bar{\tau}\sin\frac{\varphi}{2}\right)=\|A\|^{1/2}\exp\left(\bar{\tau}\frac{\varphi}{2}\right)$, что позволяет рассматривать функции комплексных переменных как неразвернутые функции кватернионов.

Кватернионам $Q=q_o+\tau_1 q_1+\tau_2 q_2+\tau_3 q_3$ можно сопоставить векторы $\mathbf{q}=\mathbf{i}_o q_o+\mathbf{i}_1 q_1+\mathbf{i}_2 q_2+\mathbf{i}_3 q_3$ как линейные комбинации базисных элементов $\mathbf{i}_o,\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,\mathbf{i}_3$, а векторам - 4×4 матрицы. Из покомпонентной записи произведения кватернионов

$$Z=X\circ Y \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{l} z_o=x_o y_o-x_1 y_1-x_2 y_2-x_3 y_3\\ z_1=x_1 y_o+x_o y_1+x_2 y_3-x_3 y_2\\ z_2=x_2 y_o+x_o y_2+x_3 y_1-x_1 y_3\\ z_3=x_3 y_o+x_o y_3+x_1 y_2-x_2 y_1 \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{c} z=Xy\\ z^T=x^T Y \end{array} \quad\Leftrightarrow$$

имеем

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} z_o\\ z_1\\ z_2\\ z_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_o & -x_1 & -x_2 & -x_3\\ x_1 & x_o & -x_3 & x_2\\ x_2 & x_3 & x_o & -x_1\\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_o\\ y_1\\ y_2\\ y_3 \end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} z_o\\ z_1\\ z_2\\ z_3 \end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix} x_o\\ x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix} y_o & y_1 & y_2 & y_3\\ -y_1 & y_o & -y_3 & y_2\\ -y_2 & y_3 & y_o & -y_1\\ -y_3 & -y_2 & y_1 & y_o \end{pmatrix} \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} z_o & -z_1 & -z_2 & -z_3\\ z_1 & z_o & -z_3 & z_2\\ z_2 & z_3 & z_o & -z_1\\ z_3 & -z_2 & z_1 & z_o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_o & -x_1 & -x_2 & -x_3\\ x_1 & x_o & -x_3 & x_2\\ x_2 & x_3 & x_o & -x_1\\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y_o & -y_1 & -y_2 & -y_3\\ y_1 & y_o & -y_3 & y_2\\ y_2 & y_3 & y_o & -y_1\\ y_3 & -y_2 & y_1 & y_o \end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} z_o & z_1 & z_2 & z_3\\ -z_1 & z_o & -z_3 & z_2\\ -z_2 & z_3 & z_o & -z_1\\ -z_3 & -z_2 & z_1 & z_o \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y_o & y_1 & y_2 & y_3\\ -y_1 & y_o & -y_3 & y_2\\ -y_2 & y_3 & y_o & -y_1\\ -y_3 & -y_2 & y_1 & y_o \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_o & x_1 & x_2 & x_3\\ -x_1 & x_o & -x_3 & x_2\\ -x_2 & x_3 & x_o & -x_1\\ -x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Итак, кватерниону можно сопоставить матрицу

$$Q_L = \begin{pmatrix} q_o & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_o & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_o & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_o \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} q_o + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} q_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} q_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} q_3$$

либо

$$Q_R = \begin{pmatrix} q_o & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_o & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_o & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_o \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} q_o + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} q_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} q_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} q_3 .$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_o \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_2 \\ \mathbf{i}_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_3 \\ \mathbf{i}_3 \end{cases}$$

либо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \\ \mathbf{i}_o \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_1 \\ \mathbf{i}_1 \end{cases},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_2 \\ \mathbf{i}_2 \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau_3 \\ \mathbf{i}_3 \end{cases}$$

перемножаются как кватернионные единицы $1, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ или элементы базиса $\mathbf{i}_o, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$.

Отметим ряд свойств матриц Q: $q_{is}q_{sj} = q_{si}q_{sj} = \delta_{ij}\left(q_o^{\,2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + q_3^{\,2}\right)$;

дополнение к элементу $q_{ij} = \pm q_k$ равно $\pm q_k\left(q_o^{\,2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + q_3^{\,2}\right)$;

$\det Q = \left(q_o^{\,2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + q_3^{\,2}\right)^2$. Итак, если $q_o^{\,2} + q_1^{\,2} + q_2^{\,2} + q_3^{\,2} = 1$, имеем дело с ортогональными матрицами поворота. Произведение этих коммутирующих матриц $S^T = Q_L Q_R = Q_R Q_L$ - также ортогональная матрица

$$S = \begin{pmatrix} \sum q_s^{\,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_o^{\,2} + q_1^{\,2} - q_2^{\,2} - q_3^{\,2} & 2(q_1q_2 + q_oq_3) & 2(q_1q_3 - q_oq_2) \\ 0 & 2(q_2q_1 - q_oq_3) & q_o^{\,2} - q_1^{\,2} + q_2^{\,2} - q_3^{\,2} & 2(q_2q_3 + q_oq_1) \\ 0 & 2(q_3q_1 + q_oq_2) & 2(q_3q_2 - q_oq_1) & q_o^{\,2} - q_1^{\,2} - q_2^{\,2} + q_3^{\,2} \end{pmatrix},$$

которая поворачивает векторную часть кватерниона, оставляя неизменной его скалярную часть.

Изоморфизм кватернионов и полученных матриц 4×4 означает, например, возможность описания ортогональных преобразований с помощью этих матриц. Векторам $\mathbf{R} = \mathbf{E}_i X_i$, $\mathbf{r} = \mathbf{e}_i x_i$ сопоставим матрицы

$$R_L = \begin{pmatrix} X_o & -X_1 & -X_2 & -X_3 \\ X_1 & X_o & -X_3 & X_2 \\ X_2 & X_3 & X_o & -X_1 \\ X_3 & -X_2 & X_1 & X_o \end{pmatrix}, \quad r_L = \begin{pmatrix} x_o & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_1 & x_o & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_o & -x_1 \\ x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix}$$

и кватернионы $R = X_o + \tau_i X_i$, $r = x_o + \tau_i x_i$.

Соответственно матричное и кватернионное выражения $R_L = Q_L r_L\, Q_L^{\,T}$

$R = Q \circ r \circ \widetilde{Q}$ дают одинаковый результат $X = S^T x$.

Аналогичным образом, если векторам $\mathbf{R} = \mathbf{E}_i X_i$, $\mathbf{r} = \mathbf{e}_i x_i$ сопоставить кватернионы $R = X_o + \tau_i X_i$, $r = x_o + \tau_i x_i$ и матрицы

$$R_R = \begin{pmatrix} X_o & X_1 & X_2 & X_3 \\ -X_1 & X_o & -X_3 & X_2 \\ -X_2 & X_3 & X_o & -X_1 \\ -X_3 & -X_2 & X_1 & X_o \end{pmatrix}, \quad r_R = \begin{pmatrix} x_o & x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_o & -x_3 & x_2 \\ -x_2 & x_3 & x_o & -x_1 \\ -x_3 & -x_2 & x_1 & x_o \end{pmatrix},$$

то матричное $R_R = Q_R r_R\, Q_R^{\,T}$ и кватернионное $R = Q \circ r \circ \widetilde{Q}$ равенства определяют преобразование $X = S^T\, x$. Выражения $R_L = Q_L r_L\, Q_L^{\,T}$, $R_R = Q_R r_R\, Q_R^{\,T}$ отражают тензорный характер преобразуемых объектов r_L, r_R, R_L, R_R.

Кватернионам $L=\lambda_o+\tau_1\lambda_1+\tau_2\lambda_2+\tau_3\lambda_3$ или векторам $\mathbf{L}=\mathbf{i}_o\lambda_o+\mathbf{i}_1\lambda_1+\mathbf{i}_2\lambda_2+\mathbf{i}_3\lambda_3$ можно сопоставить унитарную матрицу 2×2 Кэли (1821-1895)-Клейна (1849-1925):

$$L=\begin{pmatrix}\lambda_o-i\lambda_3 & -\lambda_2-i\lambda_1\\ \lambda_2-i\lambda_1 & \lambda_o+i\lambda_3\end{pmatrix}=\sigma_o\lambda_o+\sigma_1\lambda_1+\sigma_2\lambda_2+\sigma_3\lambda_3,$$

где матрицы

$$\sigma_o=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad \sigma_1=\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_3=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$$

подчиняются правилам умножения кватернионных единиц $1,\tau_1,\tau_2,\tau_3$. Это позволяет интерпретировать величины $\lambda_o,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ как компоненты вектора в пространстве, “ортами” которого являются матрицы σ_s, $s=0,1,2,3$.

Изоморфизм кватернионов и матриц Кэли - Клейна означает, например, возможность описания ортогональных преобразований с помощью матриц Кэли-Клейна. Векторам $\mathbf{R}=\mathbf{E}_iX_i$, $\mathbf{r}=\mathbf{e}_ix_i$ сопоставим матрицы

$$R=\begin{pmatrix}X_o-iX_3 & -X_2-iX_1\\ X_2-iX_1 & X_o+iX_3\end{pmatrix},\quad r=\begin{pmatrix}x_o-ix_3 & -x_2-ix_1\\ x_2-ix_1 & x_o+ix_3\end{pmatrix}$$

и проведем вычисления $R=L\circ r\circ\widetilde{L}$ $\quad(\widetilde{L}=L^{*T})$

$$X_o-iX_3=x_o-i\left[x_1 2(\lambda_3\lambda_1-\lambda_o\lambda_2)+x_2 2(\lambda_3\lambda_2+\lambda_o\lambda_1)+x_3\left(\lambda_o^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)\right],$$

$$\begin{aligned}X_2-iX_1=&\left[x_1 2(\lambda_2\lambda_1+\lambda_o\lambda_3)+x_2\left(\lambda_o^2-\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\right)+x_3 2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_o\lambda_1)\right]-\\ &-i\left[x_1\left(\lambda_o^2+\lambda_1^2-\lambda_o^2-\lambda_3^2\right)+x_2 2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_3\lambda_o)+x_3 2(\lambda_1\lambda_3+\lambda_o\lambda_2)\right],\end{aligned}$$

Итак, $\quad R=S^Tr$

Отметим, что векторная часть матрицы Кэли-Клейна

$$\begin{pmatrix}-i\lambda_3 & -\lambda_2-i\lambda_1\\ \lambda_2-i\lambda_1 & i\lambda_3\end{pmatrix}\ \xrightarrow{\lambda_k=ix_k}\ X=\begin{pmatrix}x_3 & x_1-ix_2\\ x_1+ix_2 & -x_3\end{pmatrix}$$

определяет спинор.

Матрица X является эрмитовой с равным нулю следом и ее можно представить в виде суммы $X=x_1\pi_1+x_2\pi_2+x_3\pi_3$, где $\pi_1=i\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$,

$\pi_2=i\sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$, $\pi_3=i\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ - матрицы Паули.

Спинором называется система двух величин

$$\xi_o=\pm\sqrt{\frac{x_1-ix_2}{2}},\quad \xi_1=\frac{x_1+ix_2}{x_3}\xi_o,$$

параметризующая изотропный вектор $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0)$, отнесенный к декартовой системе координат в трехмерном пространстве E_3:

$$x_1 = \xi_o^2 - \xi_1^2, \quad x_2 = i\left(\xi_o^2 + \xi_1^2\right), \quad x_3 = -2\xi_o\xi_1.$$

Вращение изотропного вектора на угол 2π вокруг оси Ox_3 приводит к изменению знака величин ξ_o, ξ_1. Спинор, таким образом, является как бы *ориентированным*, или *поляризованным* изотропным вектором.

Исходные равенства, определяющие спинор могут быть записаны в виде

$$\xi_o x_3 + \xi_1\left(x_1 - ix_2\right) = 0,$$
$$\xi_o\left(x_1 + ix_2\right) - \xi_1 x_3 = 0.$$

Матрица, образованная из коэффициентов этих уравнений

$$X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \pi_1 x_1 + \pi_2 x_2 + \pi_3 x_3$$

обладает рядом свойств: $\det X = -\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right), \quad X^2 = E\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right).$

Если рассматривать величины x_1, x_2, x_3 y_1, y_2, y_3 как составляющие векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, то $2\mathbf{xy} = XY + YX$. Это утверждение следует из равенств

$$\left(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}\right)^2 = \lambda^2\mathbf{x}^2 + \mu^2\mathbf{y}^2 + 2\lambda\mu\,\mathbf{xy},$$
$$\left(\lambda X + \mu Y\right)^2 = \lambda^2 X^2 + \mu^2 Y^2 + \lambda\mu\left(XY + YX\right).$$

Среди бесконечного многообразия всех алгебр некоторые алгебры занимают исключительное положение. Это - алгебра *C* всех комплексных чисел и алгебра *H* кватернионов. По сравнению с другими алгебрами указанные две наиболее близки к своей первооснове – алгебре R всех действительных чисел.

Приведем без доказательства ряд теорем.

Теорема Фробениуса (1849-1917).

Любая ассоциативная алгебра с делением изоморфна одной из трех: алгебре действительных чисел, алгебре комплексных чисел или алгебре кватернионов.

Обобщенная теорема Фробениуса.

Любая альтернативная алгебра с делением изоморфна одной из четырех алгебр: действительных чисел, комплексных чисел кватернионов или октав.

Теорема Гурвица (1858-1919).

Любая нормированная алгебра с единицей изоморфна одной из четырех алгебр: действительных чисел, комплексных чисел кватернионов или октав.

Итак, нормированными ассоциативными алгебрами с делением и единицей являются алгебры действительных чисел, комплексных чисел и кватернионов.

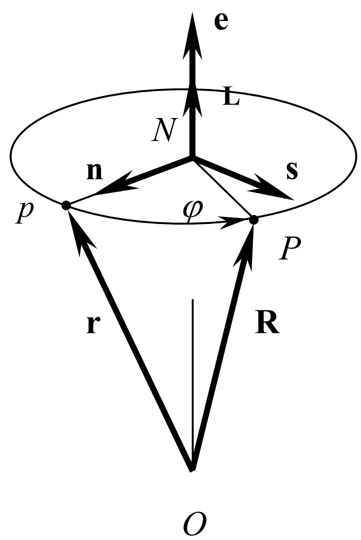
Далее рассмотрим некоторые вопросы ***применения кватернионов***.

Изоморфизм матриц поворота и кватернионов позволяет использовать последние для описания вращения твердого тела – трехмерной декартовой системы координат. Для этого полагают, что радиус-вектор **r** принадлежит четырехмерному пространству $\bar{r} \in H$, тогда отображение $H \to H$ по правилу

$$R = L \circ r \circ \widetilde{L}, \qquad \text{где} \qquad \|L\| = 1 \qquad (\alpha)$$

эквивалентно преобразованию поворота.

Векторная часть этого преобразования может быть получена прямым геометрическим построением.



При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси точки тела описывают окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси вращения, а радиус-вектор $\mathbf{r}$ любой точки с началом на оси вращения описывает коническую поверхность и преобразуется в вектор $\mathbf{R}$. Поворот вокруг оси, совпадающей по направлению с единичным вектором $\mathbf{e} = \mathbf{e}_1\alpha_1 + \mathbf{e}_2\alpha_2 + \mathbf{e}_3\alpha_3$, на угол φ можно определить скаляром $\lambda_o = \cos\dfrac{\varphi}{2}$, вектором $\mathbf{L} = \mathbf{e}\sin\dfrac{\varphi}{2} = \mathbf{e}_1\lambda_1 + \mathbf{e}_2\lambda_2 + \mathbf{e}_3\lambda_3$,

где $\lambda_i = \alpha_i \sin\dfrac{\varphi}{2}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. Величины λ_i, $i = 0,1,2,3$ называются параметрами Эйлера, которые можно считать прямоугольными декартовыми координатами точки в четырехмерном пространстве. Точки на гиперсфере $\lambda_o^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ определяют конечное положение тела.

Выразим матрицу поворота через параметры Эйлера.

Пусть N общее основание перпендикуляров, опущенных из точек p и P на вектор $\mathbf{L}$. Единичный вектор вдоль отрезка Np обозначим через $\mathbf{n}$ и введем единичный вектор $\mathbf{s} = \mathbf{e} \times \mathbf{n}$. Разложим вектор $\mathbf{R}$ по трем взаимно ортогональным направлениям $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{s}$. $\mathbf{R} = \mathbf{e}ON + \mathbf{n}NP\cos\varphi + \mathbf{s}NP\sin\varphi$, где $ON = \mathbf{e}\cdot\mathbf{r}$, $NP = Np$. С другой стороны $\mathbf{n}Np = \mathbf{r} - \mathbf{e}ON$, $\mathbf{s}NP = \mathbf{e}\times\mathbf{n}Np = \mathbf{e}\times\mathbf{r}$ и, значит,

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}\cos\varphi + \mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})(1-\cos\varphi) + (\mathbf{e}\times\mathbf{r})\sin\varphi =$$

$$= \mathbf{r}\left(\cos^2\frac{\varphi}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) + 2\mathbf{e}(\mathbf{e}\cdot\mathbf{r})\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2(\mathbf{e}\times\mathbf{r})\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} =$$

$$= \mathbf{r}\left(\lambda_o^2 - \mathbf{L}^2\right) + 2\mathbf{L}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{r}) + 2\lambda_o(\mathbf{L}\times\mathbf{r}). \qquad (\beta)$$

Это выражение совпадает с векторной частью (α).

Формуле (β) можно придать другой вид введением вектора конечного поворота $\mathbf{F} = \mathbf{e}\, tg\frac{\varphi}{2}$

Равенства $\mathbf{s}NP = \mathbf{e}\times\mathbf{n}Np = \mathbf{e}\times\mathbf{r}$, $ON = \mathbf{e}\cdot\mathbf{r}$, $\mathbf{r} = \mathbf{e}ON + \mathbf{n}Np$ или $-\mathbf{n}Np = (\mathbf{r}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e} - \mathbf{r} = \mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{r})$ позволяют записать исходное выражение $\mathbf{R} = \mathbf{e}ON + \mathbf{n}NP\cos\varphi + \mathbf{s}NP\sin\varphi$ в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{e}ON + \mathbf{n}Np\frac{1-tg^2\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}} + (\mathbf{e}\times\mathbf{r})\frac{2tg\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}} = \mathbf{r} + \mathbf{e}\times(\mathbf{e}\times\mathbf{r})\frac{2tg^2\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}} + (\mathbf{e}\times\mathbf{r})\frac{2tg\frac{\varphi}{2}}{1+tg^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Итак, получили формулу Б.Родрига (1794-1851)

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \frac{2\mathbf{F}\times\left(\mathbf{r} + \left(\mathbf{F}\times\mathbf{r}\right)\right)}{1+\mathbf{F}^2} \qquad (\gamma)$$

Суперпозиция двух поворотов, описываемых двумя собственными кватернионами, дает результирующий кватернион $N = L\circ M$.
Кватернионы поворота, записанные в виде

$$N = \nu_o\left(1 + \overline{\nu}/\nu_o\right) = \nu_o\left(1+\overline{F}_\nu\right),$$
$$L = \lambda_o\left(1 + \overline{\lambda}/\lambda_o\right) = \lambda_o\left(1+\overline{F}_\lambda\right),$$
$$M = \mu_o\left(1 + \overline{\mu}/\mu_o\right) = \mu_o\left(1+\overline{F}_\mu\right)$$

устанавливают также связь между векторами конечного поворота

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{e}_\nu\, tg\frac{\varphi_\nu}{2}, \qquad \mathbf{F}_\lambda = \mathbf{e}_\lambda\, tg\frac{\varphi_\lambda}{2}, \qquad \mathbf{F}_\mu = \mathbf{e}_\mu\, tg\frac{\varphi_\mu}{2},$$

$$N = \nu_o\left(1+\overline{F}_\nu\right) = M\circ L = \mu_o\left(1+\overline{F}_\mu\right)\circ\lambda_o\left(1+\overline{F}_\lambda\right) =$$
$$= \mu_o\lambda_o\left(1 - \overline{F}_\mu\cdot\overline{F}_\lambda + \overline{F}_\mu + \overline{F}_\lambda + \overline{F}_\mu\times\overline{F}_\lambda\right) =$$
$$= \mu_o\lambda_o\left(1 - \overline{F}_\mu\cdot\overline{F}_\lambda\right)\left(1 + \frac{\overline{F}_\mu + \overline{F}_\lambda + \overline{F}_\mu\times\overline{F}_\lambda}{1 - \overline{F}_\mu\cdot\overline{F}_\lambda}\right).$$

Из этого равенства получаем правило сложения векторов поворота

$$\mathbf{F}_\nu = \frac{\mathbf{F}_\mu + \mathbf{F}_\lambda + \mathbf{F}_\mu\times\mathbf{F}_\lambda}{1 - \mathbf{F}_\mu\cdot\mathbf{F}_\lambda}, \qquad \nu_o = \mu_o\lambda_o\left(1 - \mathbf{F}_\mu\cdot\mathbf{F}_\lambda\right). \qquad (\delta)$$

Аппарат кватернионов может быть использован для описания метрики Г.Минковского (1864-1909),

$$s^2 = x\circ\widetilde{x} = \overline{r}_{//}^{\,2} + \overline{r}_{\perp}^{\,2} - c^2t^2 == \overline{R}_{//}^{\,2} + \overline{R}_{\perp}^{\,2} - c^2T^2 = X\circ\widetilde{X} = S^2,$$

инвариантной относительно преобразования Х.Лоренца (1853-1928)

Обозначим какое-либо событие в пространстве-времени кватернионом $X = X_o + \tau_\alpha X_\alpha$, где $X_o = icT$, $T -$ время, $c -$ скорость света (фундаментальная постоянная), $X_\alpha -$ декартовы координаты точки.

Формально преобразование Лоренца есть “жесткое” преобразование пространства-времени в себя и описывается ортогональной матрицей S:
$r = SR$. Рассмотрим преобразование $L \circ R \circ \widetilde{L}^*$, где

$$R = icT + \tau_1 X_1 + \tau_2 X_2 + \tau_3 X_3, \qquad \mathbf{V} = \mathbf{e}_1 \alpha_1 V + \mathbf{e}_2 \alpha_2 V + \mathbf{e}_3 \alpha_3 V,$$

$$L = \cos\frac{i\varphi}{2} + \tau_1 \alpha_1 \sin\frac{i\varphi}{2} + \tau_2 \alpha_2 \sin\frac{i\varphi}{2} + \tau_3 \alpha_3 \sin\frac{i\varphi}{2},$$

$$\cos i\varphi = ch\varphi = \gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}, \qquad \sin i\varphi = ish\varphi = i\frac{V}{c}\gamma = iV \Big/ c\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Запишем в явном виде произведение матриц

$$L \circ R \to \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_o & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_o \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

$$R \circ \widetilde{L}^* \to \begin{pmatrix} \lambda_o^* & \lambda_1^\bullet & \lambda_2^* & \lambda_3^* \\ -\lambda_1^* & \lambda_o^* & -\lambda_3^* & \lambda_2^* \\ -\lambda_2^* & \lambda_3^* & \lambda_o^* & -\lambda_1^\bullet \\ -\lambda_3^* & -\lambda_2^* & \lambda_1^\bullet & \lambda_o^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_o \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_o & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_o \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}.$$

В последнем равенстве учтено, что $\lambda_o^* = \lambda_o$ и $\lambda_\alpha^* = -\lambda_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$.
По сравнению с выражением (*) транспонированным оказался блок, соответствующий векторной части. Это понятно. Кватернионное и комплексное сопряжения совпадают, то есть $\widetilde{L}^* = L$, а произведение $R \circ \widetilde{L}^* = R \circ L$ отличается от произведения $L \circ R$ знаком векторного произведения.
Вычислим результирующую матрицу преобразования

$$S = \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & -\lambda_3 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_o & -\lambda_1 \\ \lambda_3 & -\lambda_2 & \lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_o & -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_o & \lambda_3 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & -\lambda_3 & \lambda_o & \lambda_1 \\ \lambda_3 & \lambda_2 & -\lambda_1 & \lambda_o \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_o{}^2 - \bar{\lambda}^2 & -2\lambda_o\lambda_1 & -2\lambda_o\lambda_2 & -2\lambda_o\lambda_3 \\ 2\lambda_o\lambda_1 & \lambda_o{}^2 - 2\lambda_1{}^2 + \bar{\lambda}^2 & -2\lambda_1\lambda_2 & -2\lambda_1\lambda_3 \\ 2\lambda_o\lambda_2 & -2\lambda_1\lambda_2 & \lambda_o{}^2 - 2\lambda_2{}^2 + \bar{\lambda}^2 & -2\lambda_2\lambda_3 \\ 2\lambda_o\lambda_3 & -2\lambda_1\lambda_3 & -2\lambda_2\lambda_3 & \lambda_o{}^2 - 2\lambda_3{}^2 + \bar{\lambda}^2 \end{pmatrix}.$$

В явном виде

$$S=\begin{pmatrix} \gamma & -i\frac{V_1}{c}\gamma & -i\frac{V_2}{c}\gamma & -i\frac{V_3}{c}\gamma \\ i\frac{V_1}{c}\gamma & 1+\alpha_1^{\,2}(\gamma-1) & \alpha_1\alpha_2(\gamma-1) & \alpha_1\alpha_3(\gamma-1) \\ i\frac{V_2}{c}\gamma & \alpha_2\alpha_1(\gamma-1) & 1+\alpha_2^{\,2}(\gamma-1) & \alpha_2\alpha_3(\gamma-1) \\ i\frac{V_3}{c}\gamma & \alpha_3\alpha_1(\gamma-1) & \alpha_3\alpha_2(\gamma-1) & 1+\alpha_3^{\,2}(\gamma-1) \end{pmatrix}.$$

Запишем само преобразование Лоренца

$$t=\left(T-\frac{\mathbf{V}\cdot\mathbf{R}}{c^2}\right)\gamma,\qquad \mathbf{r}=\mathbf{R}-\frac{\mathbf{V}}{V}\frac{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{V})}{V}+\left(\frac{\mathbf{V}}{V}\frac{(\mathbf{R}\cdot\mathbf{V})}{V}-\mathbf{V}T\right)\gamma,$$

$$t=\left(T-\frac{\overline{V}\cdot\overline{R}}{c^2}\right)\gamma,\quad \overline{r}_{//}=\left(\overline{R}_{//}-\overline{V}T\right)\gamma,\quad \overline{r}_{\perp}=\overline{R}_{\perp}.$$

Правило сложения скоростей формируется законом композиции кватернионов, то есть результирующая скорость определяет результирующий кватернион так же как составляющие скорости определяют составляющие кватернионы . Пусть скоростям $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}$ соответствуют кватернионы

$$L(\psi_1)=\widetilde{L}_1^{\,*}(\psi_1)=ch\frac{\psi_1}{2}\left(+i\frac{\mathbf{V}_1}{V_1}th\frac{\psi_1}{2}\right)=\sqrt{\frac{\gamma_1+1}{2}}\left(1+i\frac{\mathbf{V}_1}{c}\frac{\gamma_1}{\gamma_1+1}\right),$$

$$L(\psi_2)=\widetilde{L}_2^{\,*}(\psi_2)=ch\frac{\psi_2}{2}\left(1+i\frac{\mathbf{V}_2}{V_2}th\frac{\psi_2}{2}\right)=\sqrt{\frac{\gamma_2+1}{2}}\left(1+i\frac{\mathbf{V}_2}{c}\frac{\gamma_2}{\gamma_2+1}\right),$$

$$L\ (\psi)=\widetilde{L}^{\,*}(\psi)=ch\frac{\psi}{2}\left(1+i\frac{\mathbf{V}}{V}th\frac{\psi}{2}\right)=\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\left(1+i\frac{\mathbf{V}}{c}\frac{\gamma}{\gamma+1}\right).$$

Кватернионы будем считать собственными, то есть заданными в системах координат, которые они преобразуют. Поскольку $L(\psi)=L(\psi_1)\circ L(\psi_2)$ имеем

$$\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}\left(1+i\frac{\mathbf{V}}{c}\frac{\gamma}{\gamma+1}\right)=\sqrt{\frac{\gamma_1+1}{2}}\sqrt{\frac{\gamma_2+1}{2}}\left(1+\frac{\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2}{c^2}\frac{\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1+1)(\gamma_2+1)}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1+i\frac{\frac{\mathbf{V}_1}{c}\frac{\gamma_1}{\gamma_1+1}+\frac{\mathbf{V}_2}{c}\frac{\gamma_2}{\gamma_2+1}+i\frac{\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2}{c^2}\frac{\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1+1)(\gamma_2+1)}}{1+\frac{\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2}{c^2}\frac{\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1+1)(\gamma_2+1)}}\right)$$

или $$\sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}=\sqrt{\frac{\gamma_1+1}{2}}\sqrt{\frac{\gamma_2+1}{2}}\left(1+\frac{\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2}{c^2}\frac{\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1+1)(\gamma_2+1)}\right),$$

$$\frac{\mathbf{V}}{c}\frac{\gamma}{\gamma+1}=\frac{\dfrac{\mathbf{V}_1}{c}\dfrac{\gamma_1}{\gamma_1+1}+\dfrac{\mathbf{V}_2}{c}\dfrac{\gamma_2}{\gamma_2+1}+i\dfrac{\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2}{c^2}\dfrac{\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1+1)(\gamma_2+1)}}{1+\dfrac{\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2}{c^2}\dfrac{\gamma_1\gamma_2}{(\gamma_1+1)(\gamma_2+1)}}.$$

Последние выражения представляют собой релятивистское обобщение правила сложения векторов поворота (δ) $\quad \mathbf{F}_\nu=\dfrac{\mathbf{F}_\mu+\mathbf{F}_\lambda+\mathbf{F}_\mu\times\mathbf{F}_\lambda}{1-\mathbf{F}_\mu\cdot\mathbf{F}_\lambda}$,

$$\nu_o=\mu_o\lambda_o\left(1-\mathbf{F}_\mu\cdot\mathbf{F}_\lambda\right), \qquad \text{где} \qquad \mathbf{F}_\alpha=i\frac{\mathbf{V}_\alpha}{V_\alpha}th\frac{\psi_\alpha}{2}=i\frac{\mathbf{V}_\alpha}{c}\frac{\gamma}{\gamma+1}.$$

В 1873 году У.Клиффорд (1845-1879) дал оригинальное описание движения твердого тела с помощью кватерниона, у которого компонентами являются величины $a+\varepsilon a^o$, где a, a^o – вещественные и комплексные числа и $\varepsilon^2=0$. Впоследствии величины $A=a+\varepsilon a^o$ Э.Штуди (1862-1930) назвал дуальными числами. А.Котельникову (1865-1944) в 1895 году удалось истолковать все формулы теории кватернионов, как “неразвернутые” формулы теории дуальных кватернионов, то есть установить полную аналогию тех и других формул. Применительно к кинематике эта аналогия устанавливает соотношение между движениями тела с одной неподвижной точкой и движениями произвольного вида.

Фигуру, образованную двумя скрещивающимися осями $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ и осью $\mathbf{E}$, пересекающей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ под прямым углом, называют дуальным углом. Для приведения единичного вектора $\mathbf{E}_1$ к совпадению с единичным вектором $\mathbf{E}_2$ необходимо оси $\mathbf{E}_1$ сообщить винтовое движение, состоящее из смещения φ^o вдоль оси $\mathbf{E}$ и поворота на угол φ вокруг оси $\mathbf{E}$. Дуальное число $\Phi=\varphi+\varepsilon\varphi^o$ принимают за меру дуального угла между осями $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$. Числа φ, φ^o считаются положительными, если вращение происходит в положительную сторону, а смещение - в положительном направлении оси винта $\mathbf{E}$.

Можем написать $\qquad \cos\Phi=\cos\varphi-\varepsilon\varphi^o\sin\varphi$,

$$\sin\Phi=\sin\varphi+\varepsilon\varphi^o\cos\varphi,$$

$$tg\Phi=\frac{\sin\varphi+\varepsilon\varphi^o\cos\varphi}{\cos\varphi-\varepsilon\varphi^o\sin\varphi}=\frac{\sin\varphi\cos\varphi+\varepsilon\varphi^o}{\cos^2\varphi}=tg\varphi+\varepsilon\varphi^o(1+tg^2\varphi).$$

Дуальный кватернион вводится равенством

$$\cos\frac{\Phi}{2}+\overline{E}\sin\frac{\Phi}{2}=\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\overline{E}\sin\frac{\varphi}{2}\right)+\varepsilon\frac{\varphi^o}{2}\left(-\sin\frac{\varphi}{2}+\overline{E}\cos\frac{\varphi}{2}\right)=$$

$$=\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\overline{E}\sin\frac{\varphi}{2}\right)\circ\left(1+\varepsilon\overline{E}\frac{\varphi^o}{2}\right)$$

и представляет собой произведение кватерниона поворота и соосного ему кватерниона сдвига. Кватернион сдвига $L^o = 1 + \varepsilon\,\overline{E}\,\dfrac{\varphi^o}{2}$ получается из кватерниона поворота простой заменой угла φ на смещение $\varepsilon\varphi^o$. Вектор Родрига $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{E} tg\dfrac{\varphi}{2}$ при такой замене переходит в $\boldsymbol{\theta}^o = \mathbf{E} tg\varepsilon\dfrac{\varphi^o}{2} = \varepsilon\,\mathbf{E}\dfrac{\varphi^o}{2}$ и
$1 + (\theta^o)^2 = 1, \quad \boldsymbol{\theta}^o \times (\boldsymbol{\theta}^o \times \mathbf{R}) = 0$.

Рассмотрим преобразование $L^o \circ \bar{f} \circ \widetilde{L}^o$, где $\bar{f}$ − произвольный вектор-кватернион $\left(1 + \varepsilon\,\overline{E}\,\dfrac{\varphi^o}{2}\right) \circ \bar{f} \circ \left(1 - \varepsilon\,\overline{E}\,\dfrac{\varphi^o}{2}\right) = \bar{f} + \varepsilon\,\varphi^o \overline{E} \times \bar{f}$.

Преобразование $\mathbf{f} + 2\dfrac{\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{f} + \boldsymbol{\theta}\times(\boldsymbol{\theta}\times\mathbf{f})}{1+\theta^2}$, эквивалентное $L \circ \bar{f} \circ \widetilde{L}$, при замене вектора $\boldsymbol{\theta}$ на вектор $\boldsymbol{\theta}^o$ сразу дает $\mathbf{f} + \varepsilon\varphi^o \mathbf{E} \times \mathbf{f}$.

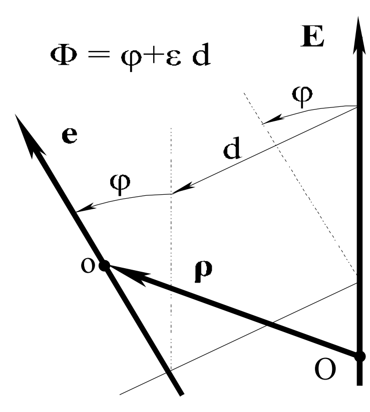
Итак, преобразуемый вектор заменяется совокупностью того же вектора и момента вектора относительно исходного полюса.

Поскольку скользящий вектор $\mathbf{f}$, приложенный в точке с радиус-вектором $\mathbf{r}$, эквивалентен в начале координат вектору $\mathbf{f}$ и моменту $\mathbf{r} \times \mathbf{f}$, то рассмотренное преобразование есть приведение скользящего вектора $\mathbf{f}$ к началу координат. Тогда преобразование $L \circ (\bar{f} + \varepsilon \bar{r} \times \bar{f}) \circ \widetilde{L}$, где $L = \lambda_o + \bar{\lambda}$, есть поворот вектора $\mathbf{f}$, приложенного в точке $\mathbf{r}$.

В общем случае движение твердого тела есть мгновенно-винтовое движение
$$\mathbf{V}_o = \mathbf{r}_{oc} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{V}_c, \quad \mathbf{V}_c \,//\, \boldsymbol{\omega}$$
$$(\mathbf{V}_i \equiv \mathbf{m}_i(\boldsymbol{\omega}), \quad \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{V}_o = \omega \cdot V_{//} \neq 0).$$

Ось винта проходит через точку C $\quad \boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_{oc} = \dfrac{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_o}{\boldsymbol{\omega}^2}$. Скорость точки C минимальна $\quad \mathbf{V}_c = \mathbf{V}_o + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}_o + \boldsymbol{\omega}\times\dfrac{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}_o}{\omega^2} = \boldsymbol{\omega}\left(\dfrac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{V}_o}{\omega^2}\right) = \dfrac{\boldsymbol{\omega}}{\omega}V_{//}$

и равна $\quad V_{//} = \dfrac{\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{V}_o}{\omega}$. Мгновенно - винтовому движению ставят в соответствие винт $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon\mathbf{V}_{//}$ либо мотор винта $\boldsymbol{\Omega}_o$ (винт, отнесенный к точке O):
$$\boldsymbol{\Omega}_o = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon\big(\mathbf{V}_{//} + \mathbf{m}_o(\boldsymbol{\omega})\big) = .$$
$$= \boldsymbol{\omega} + \varepsilon\big(\mathbf{V}_{//} + \boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\omega}\big) = \boldsymbol{\omega} + \varepsilon\mathbf{V}_o$$



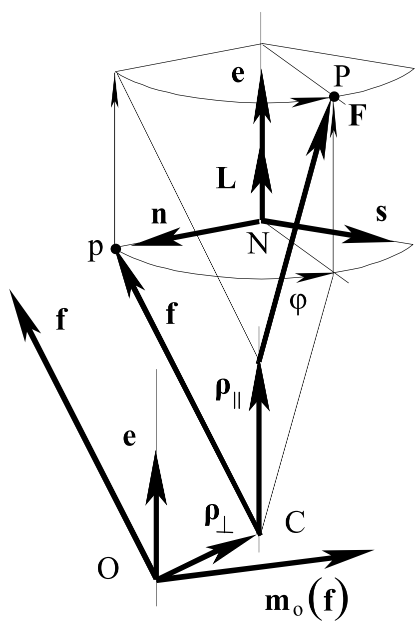
Кроме того, из начального положения в конечное тело можно перевести одним винтовым перемещением.

Построение дуальной матрицы поворота этого движения состоит в вычислении косинусов дуальных углов $\Phi_{ij} = \varphi_{ij} + \varepsilon d_{ij}$ между осями системы отсчета $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$ и осями $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, связанными с телом

$$\cos\Phi_{ij} = \cos(\varphi_{ij} + \varepsilon d_{ij}) = \cos\varphi_{ij} - \varepsilon d_{ij} \sin\varphi_{ij} =$$
$$= \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{e}_i - \varepsilon(\mathbf{E}_j \times \mathbf{e}_i) \cdot \boldsymbol{\rho} = [\mathbf{e}_i + \varepsilon(\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{e}_i)] \cdot \mathbf{E}_j$$

В этом выражении φ_{ij} – угол между осями, возникающий при сдвиге какой-либо из осей до их пересечения, а $d_{ij} = (\mathbf{E}_j \times \mathbf{e}_i) \cdot \boldsymbol{\rho} = -(\boldsymbol{\rho} \times \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{E}_j$ - расстояние между скрещивающимися осями (проекция вектора $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_{Oo}$ на перпендикуляр к осям). Итак,

$$S(\Phi) = \begin{pmatrix} (\mathbf{e}_1 + \varepsilon\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{E}_1 & (\mathbf{e}_1 + \varepsilon\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{E}_2 & (\mathbf{e}_1 + \varepsilon\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{e}_1)\cdot\mathbf{E}_3 \\ (\mathbf{e}_2 + \varepsilon\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{E}_1 & (\mathbf{e}_2 + \varepsilon\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{E}_2 & (\mathbf{e}_2 + \varepsilon\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{e}_2)\cdot\mathbf{E}_3 \\ (\mathbf{e}_3 + \varepsilon\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{E}_1 & (\mathbf{e}_3 + \varepsilon\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{E}_2 & (\mathbf{e}_3 + \varepsilon\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{e}_3)\cdot\mathbf{E}_3 \end{pmatrix}$$



Произведение двух строк и двух столбцов этой матрицы равно символу Кроникера, каждый элемент матрицы S равен своему дополнению, $\det S = 1$ и существует вектор $\mathbf{U}$ такой, что $(S - \lambda E)\mathbf{U} = 0, \quad \Rightarrow$

$$\det(S - \lambda E) = -\lambda^3 + SpS\,\lambda^2 - SpS\,\lambda + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda = 1.$$

Дуальный кватернион этого винта - суперпозиция сдвига $\boldsymbol{\rho}_{//} = \mathbf{e}\rho_{//}$ в направлении оси винта и поворота вокруг оси $\mathbf{e}$, проходящей через точку C, радиус-вектор которой - $\boldsymbol{\rho}_\perp$, либо просто поворот вокруг оси $\mathbf{e}$, проходящей через точку O, мотора

$$\mathbf{f} + \varepsilon\,\boldsymbol{\rho}\times\mathbf{f} = \mathbf{f} + \varepsilon\,(\boldsymbol{\rho}_\perp + \boldsymbol{\rho}_{//})\times\mathbf{f} = \mathbf{f} + \varepsilon\,\mathbf{m}_o(\mathbf{f}).$$

Непосредственными вычислениями убеждаемся в том, что

$$\Lambda(\Phi) = \Lambda(\varphi)\circ\Lambda(\rho_{//}) = \Lambda(\rho_{//})\circ\Lambda(\varphi),$$
$$\Lambda(\Phi)\circ\bar{f}\circ\tilde{\Lambda}(\Phi) = \Lambda(\varphi)\circ\left(\bar{f} + \varepsilon\,\overline{m}_c(\mathbf{f})\right)\circ\tilde{\Lambda}(\varphi),$$
$$\Lambda(\rho)\circ\Lambda(\varphi) = \Lambda(\rho_\perp)\circ\Lambda(\rho_{//})\circ\Lambda(\varphi) = \Lambda(\rho_\perp)\circ\Lambda(\Phi),$$
$$\Lambda(\Phi)\circ(\bar{f} + \varepsilon\,\overline{m}_o(\mathbf{f}))\circ\tilde{\Lambda}(\Phi) = \Lambda(\varphi)\circ\left(\bar{f} + \varepsilon\,\overline{m}_o(\mathbf{f})\right)\circ\tilde{\Lambda}(\varphi).$$

О применении кватернионов при описании электромагнитного поля.

1. В четырехмерном пространстве с псевдоевклидовой метрикой

$$G_{oo} = G^{oo} = 1, \quad G_{\alpha\alpha} = G^{\alpha\alpha} = -1, \quad G_{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha, \beta = 1,2,3$$

введем в рассмотрение изоморфный гиперкомплексному числу-кватерниону $V = iV^o + E_\alpha V^\alpha$, $V^o, V^\alpha \in R$ вектор-кватернион $\mathbf{V} = \mathbf{E}_o iV^o + \mathbf{E}_\alpha V^\alpha$. Для элементов базиса $\mathbf{E}_\alpha$, $\alpha = 0,1,2,3$ будем рассматривать следующие правила скалярного и кватернионного умножения

$$\mathbf{E}_o \cdot \mathbf{E}_o = 1, \quad \mathbf{E}_o \cdot \mathbf{E}_\alpha = 0, \quad \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{E}_\beta = -\delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1,2,3$$

$$\mathbf{E}_o \circ \mathbf{E}_o = \mathbf{E}_o, \quad \mathbf{E}_o \circ \mathbf{E}_\alpha = \mathbf{E}_\alpha \circ \mathbf{E}_o = \mathbf{E}_\alpha, \quad \mathbf{E}_\alpha \circ \mathbf{E}_\alpha = -\mathbf{E}_o, \quad \mathbf{E}_\alpha \circ \mathbf{E}_\beta = \delta_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{E}_\gamma,$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символы Кроникера, $\delta_{\alpha\beta\gamma}$ – дискриминантный тензор кососимметричный по любым двум индексам.

Кватернионному сопряжению соответствует инверсия базиса: $\tilde{\mathbf{E}}_o = \mathbf{E}_o$, $\tilde{\mathbf{E}}_\alpha = -\mathbf{E}_\alpha$, $\tilde{\mathbf{E}}_o \circ \tilde{\mathbf{E}}_\alpha = \tilde{\mathbf{E}}_\alpha \circ \tilde{\mathbf{E}}_o = \tilde{\mathbf{E}}_\alpha$, $\tilde{\mathbf{E}}_\alpha \circ \tilde{\mathbf{E}}_\beta = -\delta_{\alpha\beta\gamma} \tilde{\mathbf{E}}_\gamma$, $\alpha, \beta = 1,2,3,$ $\tilde{\mathbf{V}} = \tilde{\mathbf{E}}_o iV^o + \tilde{\mathbf{E}}_\alpha V^\alpha = \mathbf{E}_o iV^o - \mathbf{E}_\alpha V^\alpha$, а комплексному сопряжению – замена i на $-i$: $\mathbf{V}^* = \mathbf{E}_o i^* V^o + \mathbf{E}_\alpha V^\alpha = -\mathbf{E}_o iV^o + \mathbf{E}_\alpha V^\alpha$.

Два вектора-кватерниона, записанные в виде $\mathbf{AB}$, образуют тензор-кватернион: $\mathbf{AB} = -\mathbf{E}_o \mathbf{E}_o A^o B^o + i\mathbf{E}_o \mathbf{E}_\beta A^o B^\beta + i\mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_o A^\alpha B^o + \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta A^\alpha B^\beta$,

где $A^\alpha B^\beta$ обычные произведения вещественных чисел.

Любому кватерниону можно сопоставить матрицу (см. приложение), которую в свою очередь можно трактовать, как тензор-кватернион, например, ${}_L\mathbf{W} = \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta\, {}_L W^{\alpha\beta}$ или ${}_R\mathbf{W} = \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta\, {}_R W^{\alpha\beta}$, где

$${}_L W^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} iW^o & -W^1 & -W^2 & -W^3 \\ W^1 & iW^o & -W^3 & W^2 \\ W^2 & W^3 & iW^o & -W^1 \\ W^3 & -W^2 & W^1 & iW^o \end{pmatrix}, \quad {}_R D^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} iW^o & W^1 & W^2 & W^3 \\ -W^1 & iW^o & -W^3 & W^2 \\ -W^2 & W^3 & iW^o & -W^1 \\ -W^3 & -W^2 & W^1 & iW^o \end{pmatrix}.$$

Кватернионному произведению двух векторов-кватернионов соответствует скалярное произведение соответствующих тензоров-кватернионов.
Двум кватернионам можно сопоставить коммутатор $[\mathbf{A} \circ \mathbf{B}] = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} - \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$ и антикоммутатор $\{\mathbf{A} \circ \mathbf{B}\} = \mathbf{A} \circ \mathbf{B} + \mathbf{B} \circ \mathbf{A}$

2. Произвольной точке пространства сопоставим вектор-кватернион $\mathbf{X} = \mathbf{E}_o iX^o + \mathbf{E}_\alpha X^\alpha$, $X^o \equiv cT$, изоморфные ему тензоры-кватернионы ${}_L\mathbf{X} = \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta\, {}_L X^{\alpha\beta}$, ${}_R\mathbf{X} = \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta\, {}_R X^{\alpha\beta}$, где

$${}_L X^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} iX^o & -X^1 & -X^2 & -X^3 \\ X^1 & iX^o & -X^3 & X^2 \\ X^2 & X^3 & iX^o & -X^1 \\ X^3 & -X^2 & X^1 & iX^o \end{pmatrix}, \quad {}_R X^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} iX^o & X^1 & X^2 & X^3 \\ -X^1 & iX^o & -X^3 & X^2 \\ -X^2 & X^3 & iX^o & -X^1 \\ -X^3 & -X^2 & X^1 & iX^o \end{pmatrix},$$

и операторы набла $\nabla = \mathbf{E}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} + \mathbf{E}_\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}$, $\qquad \nabla^* = -\mathbf{E}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} + \mathbf{E}_\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}$,

$$\tilde{\nabla} = \mathbf{E}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} - \mathbf{E}_\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}, \qquad \tilde{\nabla}^* = -\mathbf{E}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} - \mathbf{E}_\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha},$$

$$_L\nabla = \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\alpha \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} - \mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta \frac{\partial}{\partial X^\beta} + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_o \frac{\partial}{\partial X^\alpha} + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\beta\delta_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial X^\gamma},$$

$$_L\nabla^* = -\mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\alpha \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} - \mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta \frac{\partial}{\partial X^\beta} + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_o \frac{\partial}{\partial X^\alpha} + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\beta\delta_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial X^\gamma},$$

$$_L\tilde{\nabla} = \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\alpha \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} + \mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta \frac{\partial}{\partial X^\beta} - \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_o \frac{\partial}{\partial X^\alpha} + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\beta\delta_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial X^\gamma},$$

$$_L\tilde{\nabla}^* = -\mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\alpha \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} + \mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta \frac{\partial}{\partial X^\beta} - \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_o \frac{\partial}{\partial X^\alpha} + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\beta\delta_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial X^\gamma},$$

$$_R\nabla = \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\alpha \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} + \mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta \frac{\partial}{\partial X^\beta} - \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_o \frac{\partial}{\partial X^\alpha} + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\beta\delta_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial X^\gamma},$$

$$_R\nabla^* = -\mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\alpha \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} + \mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta \frac{\partial}{\partial X^\beta} - \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_o \frac{\partial}{\partial X^\alpha} + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\beta\delta_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial X^\gamma},$$

$$_R\tilde{\nabla} = \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\alpha \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} - \mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta \frac{\partial}{\partial X^\beta} + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_o \frac{\partial}{\partial X^\alpha} + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\beta\delta_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial X^\gamma},$$

$$_R\tilde{\nabla}^* = -\mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\alpha \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} - \mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta \frac{\partial}{\partial X^\beta} + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_o \frac{\partial}{\partial X^\alpha} + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\beta\delta_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial X^\gamma}.$$

Введем операции $\nabla \cdot \mathbf{V}$, $\nabla \circ \mathbf{V}$, $\nabla\mathbf{V}$, $_L\nabla \cdot \mathbf{W}$, $_R\nabla \cdot \mathbf{W}$, $_L\nabla \circ \mathbf{W}$, $_R\nabla \circ \mathbf{W}$, где $\mathbf{V}$ – вектор-кватернион и $\mathbf{W}$ – тензор-кватернион. Действие оператора набла состоит в вычислении соответствующей производной компонент выражения, стоящего за оператором набла, с последующим выполнением действия над элементами базиса. Например,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \left(-\mathbf{E}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} + \mathbf{E}_\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha}\right) \cdot \left(\mathbf{E}_o i V^o + \mathbf{E}_\beta V^\beta\right) =$$

$$= -\frac{i}{c}\mathbf{E}_o \cdot \left(\mathbf{E}_o i \frac{\partial V^o}{\partial T} + \mathbf{E}_\beta \frac{\partial V^\beta}{\partial T}\right) + \mathbf{E}_\alpha \cdot \left(\mathbf{E}_o i \frac{\partial V^o}{\partial X^\alpha} + \mathbf{E}_\beta \frac{\partial V^\beta}{\partial X^\alpha}\right) = \frac{1}{c}\frac{\partial V^o}{\partial T} - \frac{\partial V^\alpha}{\partial X^\alpha}$$

и далее

$$\nabla\circ\mathbf{V}=-\frac{i}{c}\mathbf{E}_o\circ\left(\mathbf{E}_o i\frac{\partial V^o}{\partial T}+\mathbf{E}_\beta\frac{\partial V^\beta}{\partial T}\right)+\mathbf{E}_\alpha\circ\left(\mathbf{E}_o i\frac{\partial V^o}{\partial X^\alpha}+\mathbf{E}_\beta\frac{\partial V^\beta}{\partial X^\alpha}\right)=$$

$$=\mathbf{E}_o\left(\frac{1}{c}\frac{\partial V^o}{\partial T}-\frac{\partial V^1}{\partial X^1}-\frac{\partial V^2}{\partial X^2}-\frac{\partial V^3}{\partial X^3}\right)+\mathbf{E}_1\left(-\frac{i}{c}\frac{\partial V^1}{\partial T}+i\frac{\partial V^o}{\partial X^1}+\frac{\partial V^3}{\partial X^2}-\frac{\partial V^2}{\partial X^3}\right)+$$

$$+\mathbf{E}_2\left(-\frac{i}{c}\frac{\partial V^2}{\partial T}+i\frac{\partial V^o}{\partial X^2}+\frac{\partial V^1}{\partial X^3}-\frac{\partial V^3}{\partial X^1}\right)+\mathbf{E}_3\left(-\frac{i}{c}\frac{\partial V^3}{\partial T}+i\frac{\partial V^o}{\partial X^3}+\frac{\partial V^2}{\partial X^1}-\frac{\partial V^1}{\partial X^2}\right)=$$

$$=\mathbf{E}_o\left(\frac{1}{c}\frac{\partial V^o}{\partial T}-div\overline{V}\right)+i\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{V}}{\partial T}+grad\,V^o\right)+rot\overline{V}\ ,$$

$$\nabla\mathbf{V}=-\frac{i}{c}\mathbf{E}_o\left(\mathbf{E}_o i\frac{\partial V^o}{\partial T}+\mathbf{E}_\beta\frac{\partial V^\beta}{\partial T}\right)+\mathbf{E}_\alpha\left(\mathbf{E}_o i\frac{\partial V^o}{\partial X^\alpha}+\mathbf{E}_\beta\frac{\partial V^\beta}{\partial X^\alpha}\right)=$$

$$\begin{aligned}=\quad &\mathbf{E}_o\mathbf{E}_o\frac{1}{c}\frac{\partial V^o}{\partial T} && -\mathbf{E}_o\mathbf{E}_1\frac{i}{c}\frac{\partial V^1}{\partial T} && -\mathbf{E}_o\mathbf{E}_2\frac{i}{c}\frac{\partial V^2}{\partial T} && -\mathbf{E}_o\mathbf{E}_3\frac{i}{c}\frac{\partial V^3}{\partial T}+\\ &+\mathbf{E}_1\mathbf{E}_o i\frac{\partial V^o}{\partial X^1} && +\mathbf{E}_1\mathbf{E}_1\frac{\partial V^1}{\partial X^1} && +\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2\frac{\partial V^2}{\partial X^1} && +\mathbf{E}_1\mathbf{E}_3\frac{\partial V^3}{\partial X^1}+\\ &+\mathbf{E}_2\mathbf{E}_o i\frac{\partial V^o}{\partial X^2} && +\mathbf{E}_2\mathbf{E}_1\frac{\partial V^1}{\partial X^2} && +\mathbf{E}_2\mathbf{E}_2\frac{\partial V^2}{\partial X^2} && +\mathbf{E}_2\mathbf{E}_3\frac{\partial V^3}{\partial X^2}+\\ &+\mathbf{E}_3\mathbf{E}_o i\frac{\partial V^o}{\partial X^3} && +\mathbf{E}_3\mathbf{E}_1\frac{\partial V^1}{\partial X^3} && +\mathbf{E}_3\mathbf{E}_2\frac{\partial V^2}{\partial X^3} && +\mathbf{E}_3\mathbf{E}_3\frac{\partial V^3}{\partial X^3},\end{aligned}$$

$${}_L\nabla\cdot\mathbf{W}=-\frac{i}{c}\mathbf{E}_o\cdot\left(-\mathbf{E}_o\mathbf{E}_o\frac{\partial W^{oo}}{\partial T}+i\mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta\frac{\partial W^{o\beta}}{\partial T}+i\mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_o\frac{\partial W^{\beta o}}{\partial T}+\mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_\gamma\frac{\partial W^{\beta\gamma}}{\partial T}\right)+$$

$$+\mathbf{E}_\alpha\cdot\left(-\mathbf{E}_o\mathbf{E}_o\frac{\partial W^{oo}}{\partial X^\alpha}+i\mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta\frac{\partial W^{o\beta}}{\partial X^\alpha}+i\mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_o\frac{\partial W^{\beta o}}{\partial X^\alpha}+\mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_\gamma\frac{\partial W^{\beta\gamma}}{\partial X^\alpha}\right)=$$

$$=\mathbf{E}_o i\left(\frac{1}{c}\frac{\partial W^{oo}}{\partial T}-\frac{\partial W^{\alpha o}}{\partial X^\alpha}\right)+\mathbf{E}_\alpha\left(\frac{1}{c}\frac{\partial W^{o\alpha}}{\partial T}-\frac{\partial W^{\beta\alpha}}{\partial X^\beta}\right),$$

$${}_R\nabla\cdot\mathbf{W}=-\left(-\mathbf{E}_o\mathbf{E}_o\frac{\partial W^{oo}}{\partial T}+i\mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta\frac{\partial W^{o\beta}}{\partial T}+i\mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_o\frac{\partial W^{\beta o}}{\partial T}+\mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_\gamma\frac{\partial W^{\beta\gamma}}{\partial T}\right)\cdot\frac{i}{c}\mathbf{E}_o+$$

$$+\left(-\mathbf{E}_o\mathbf{E}_o\frac{\partial W^{oo}}{\partial X^\alpha}+i\mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta\frac{\partial W^{o\beta}}{\partial X^\alpha}+i\mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_o\frac{\partial W^{\beta o}}{\partial X^\alpha}+\mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_\gamma\frac{\partial W^{\beta\gamma}}{\partial X^\alpha}\right)\cdot\mathbf{E}_\alpha=$$

$$=\mathbf{E}_o i\left(\frac{1}{c}\frac{\partial W^{oo}}{\partial T}-\frac{\partial W^{o\alpha}}{\partial X^\alpha}\right)+\mathbf{E}_\alpha\left(\frac{1}{c}\frac{\partial W^{\alpha o}}{\partial T}-\frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial X^\beta}\right),$$

$$
\begin{aligned}
{}_L\nabla \circ \mathbf{W} = &-\frac{i}{c}\mathbf{E}_o \circ \left(-\mathbf{E}_o\mathbf{E}_o \frac{\partial W^{oo}}{\partial T} + i\mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta \frac{\partial W^{o\beta}}{\partial T} + i\mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_o \frac{\partial W^{\beta o}}{\partial T} + \mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_\gamma \frac{\partial W^{\beta\gamma}}{\partial T} \right) + \\
&+ \mathbf{E}_\alpha \circ \left(-\mathbf{E}_o\mathbf{E}_o \frac{\partial W^{oo}}{\partial X^\alpha} + i\mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta \frac{\partial W^{o\beta}}{\partial X^\alpha} + i\mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_o \frac{\partial W^{\beta o}}{\partial X^\alpha} + \mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_\gamma \frac{\partial W^{\beta\gamma}}{\partial X^\alpha} \right) = \\
&= \mathbf{E}_o\mathbf{E}_o \left(\frac{i}{c}\frac{\partial W^{oo}}{\partial T} - i\frac{\partial W^{\alpha o}}{\partial X^\alpha} \right) + \mathbf{E}_o\mathbf{E}_\alpha i \left(-\frac{i}{c}\frac{\partial W^{o\alpha}}{\partial T} + i\frac{\partial W^{\beta\alpha}}{\partial X^\beta} \right) + \\
&+ \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_o i \left(-\frac{i}{c}\frac{\partial W^{\alpha o}}{\partial T} + i\frac{\partial W^{oo}}{\partial X^\alpha} + \delta_{\beta\gamma\alpha}\frac{\partial W^{\gamma o}}{\partial X^\beta} \right) + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\beta \left(-\frac{i}{c}\frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial T} + i\frac{\partial W^{o\beta}}{\partial X^\alpha} + \delta_{\delta\gamma\alpha}\frac{\partial W^{\gamma\beta}}{\partial X^\delta} \right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_R\nabla \circ \mathbf{W} = &-\left(-\mathbf{E}_o\mathbf{E}_o \frac{\partial W^{oo}}{\partial T} + i\mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta \frac{\partial W^{o\beta}}{\partial T} + i\mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_o \frac{\partial W^{\beta o}}{\partial T} + \mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_\gamma \frac{\partial W^{\beta\gamma}}{\partial T} \right) \circ \frac{i}{c}\mathbf{E}_o + \\
&+ \left(-\mathbf{E}_o\mathbf{E}_o \frac{\partial W^{oo}}{\partial X^\alpha} + i\mathbf{E}_o\mathbf{E}_\beta \frac{\partial W^{o\beta}}{\partial X^\alpha} + i\mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_o \frac{\partial W^{\beta o}}{\partial X^\alpha} + \mathbf{E}_\beta\mathbf{E}_\gamma \frac{\partial W^{\beta\gamma}}{\partial X^\alpha} \right) \circ \mathbf{E}_\alpha \\
&= \mathbf{E}_o\mathbf{E}_o \left(\frac{i}{c}\frac{\partial W^{oo}}{\partial T} - i\frac{\partial W^{o\alpha}}{\partial X^\alpha} \right) + i\mathbf{E}_o\mathbf{E}_\alpha \left(-\frac{i}{c}\frac{\partial W^{o\alpha}}{\partial T} + i\frac{\partial W^{oo}}{\partial X^\alpha} + \delta_{\beta\gamma\alpha}\frac{\partial W^{o\beta}}{\partial X^\gamma} \right) - \\
&+ i\mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_o \left(-\frac{i}{c}\frac{\partial W^{\alpha o}}{\partial T} + i\frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial X^\beta} \right) + \mathbf{E}_\alpha\mathbf{E}_\beta \left(-\frac{i}{c}\frac{\partial W^{\alpha\beta}}{\partial T} + i\frac{\partial W^{\alpha o}}{\partial X^\beta} + \delta_{\gamma\delta\beta}\frac{\partial W^{\alpha\gamma}}{\partial X^\delta} \right) \quad .
\end{aligned}
$$

3. Декартовым координатам можно сопоставить криволинейные координаты $X^s = X^s(q^1, q^2, q^3)$, $\det\left(\dfrac{\partial X^s}{\partial q^k}\right) \neq 0$, $s, k = 1,2,3$, а вектору $\mathbf{X} = \mathbf{E}_o iX^o + \mathbf{E}_\alpha X^\alpha$ - вектор $\mathbf{X} = \mathbf{e}_o iq^o + \mathbf{e}_s q^s$, $q^o \equiv X^o \equiv ct$. Базис криволинейной системы координат определяется равенствами $\mathbf{e}_s = \mathbf{E}_k \dfrac{\partial X^k}{\partial q^s}$, где $\dfrac{\partial X^\alpha}{\partial q^s}\dfrac{\partial X^\alpha}{\partial q^k} = g_{sk}$. Тогда $\mathbf{E}_\alpha = \mathbf{e}_s \dfrac{\partial q^s}{\partial X^\alpha}$, $\dfrac{\partial q^s}{\partial X^\alpha}\dfrac{\partial q^s}{\partial X^\beta} = g^{\alpha\beta}$, $g_{s\alpha}g^{\alpha k} = \delta_s^k$.

Криволинейные координаты с базисом $\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$ допускают взаимный базис $\mathbf{e}^\alpha$, $\alpha = 1,2,3$, отличный от исходного: $\mathbf{e}_o = \mathbf{e}^o$, $\mathbf{e}_\beta \times \mathbf{e}_\gamma = \delta_{\beta\gamma\alpha}\sqrt{g_{\dots}}\,\mathbf{e}^\alpha$, $g_{\dots} = \det(g_{\alpha\beta})$, $\mathbf{e}^\beta \times \mathbf{e}^\gamma = \delta_{\beta\gamma\alpha}\sqrt{g^{\cdots}}\,\mathbf{e}_\alpha$, $g^{\cdots} = \det(g^{\alpha\beta})$. Таким образом, имеем два представления вектор - кватерниона и четыре представления тензор - кватерниона:

$\mathbf{V} = \mathbf{e}_o iv^o + \mathbf{e}_\alpha v^\alpha = \mathbf{e}^o iv_o + \mathbf{e}^\beta v_\beta$,

$$\mathbf{W} = -\mathbf{e}_o\mathbf{e}_o w^{oo} + \mathbf{e}_o\mathbf{e}_\alpha i w^{o\alpha} + \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_o i w^{\alpha o} + \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta w^{\alpha\beta} =$$
$$= -\mathbf{e}_o\mathbf{e}^o w^o{}_o + \mathbf{e}_o\mathbf{e}^\alpha i w^o{}_\alpha + \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^o i w^\alpha{}_o + \mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}^\beta w^\alpha{}_\beta =$$
$$= -\mathbf{e}^o\mathbf{e}_o w_o{}^o + \mathbf{e}^o\mathbf{e}_\alpha i w_o{}^\alpha + \mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}_o i w_\alpha{}^o + \mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}_\beta w_\alpha{}^\beta =$$
$$= -\mathbf{e}^o\mathbf{e}^o w_{oo} + \mathbf{e}^o\mathbf{e}^\alpha i w_{o\alpha} + \mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}^o i w_{\alpha o} + \mathbf{e}^\alpha\mathbf{e}^\beta w_{\alpha\beta}.$$

Для ортогональных криволинейных координат правила перемножения элементов базиса $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_k$ повторяют правила перемножения элементов $\mathbf{E}_s, \mathbf{E}_k$:

$$\mathbf{e}_o \cdot \mathbf{e}_o = 1, \quad \mathbf{e}_o \cdot \mathbf{e}_\alpha = 0, \quad \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = -g_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1,2,3,$$
$$\mathbf{e}^o \cdot \mathbf{e}^o = 1, \quad \mathbf{e}^o \cdot \mathbf{e}^\alpha = 0, \quad \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = -g^{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1,2,3,$$
$$\mathbf{e}_o \cdot \mathbf{e}^o = 1, \quad \mathbf{e}_o \cdot \mathbf{e}^\alpha = 0, \quad \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}^\beta = -\delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = 1,2,3,$$
$$\mathbf{e}_o \circ \mathbf{e}_o = \mathbf{e}_o, \quad \mathbf{e}_o \circ \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha \circ \mathbf{e}_o = \mathbf{e}_\alpha, \quad \mathbf{e}_\alpha \circ \mathbf{e}_\alpha = -g_{\alpha\alpha}\mathbf{e}_o,$$
$$\mathbf{e}^o \circ \mathbf{e}^o = \mathbf{e}^o, \quad \mathbf{e}^o \circ \mathbf{e}^\alpha = \mathbf{e}^\alpha \circ \mathbf{e}^o = \mathbf{e}^\alpha, \quad \mathbf{e}^\alpha \circ \mathbf{e}^\alpha = -g^{\alpha\alpha}\mathbf{e}^o,$$
$$\mathbf{e}_o \circ \mathbf{e}^o = \mathbf{e}^o \circ \mathbf{e}_o = \mathbf{e}_o = \mathbf{e}^o, \qquad \mathbf{e}_o \circ \mathbf{e}^\alpha = \mathbf{e}^\alpha \circ \mathbf{e}_o = \mathbf{e}^\alpha,$$
$$\mathbf{e}_\alpha \circ \mathbf{e}^o = \mathbf{e}^o \circ \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_\alpha, \qquad \mathbf{e}_\alpha \circ \mathbf{e}^\alpha = \mathbf{e}^\alpha \circ \mathbf{e}_\alpha = -\mathbf{e}_o = -\mathbf{e}^o,$$

$$\mathbf{e}_\alpha \circ \mathbf{e}_\beta = \sqrt{\frac{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}}{g_{\gamma\gamma}}}\delta_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}_\gamma = \frac{\sqrt{g_{\dots}}}{g_{\gamma\gamma}}\delta_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}_\gamma = \sqrt{g_{\dots}}\delta_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}^\gamma,$$
$$\mathbf{e}^\alpha \circ \mathbf{e}^\beta = \sqrt{\frac{g^{\alpha\alpha}g^{\beta\beta}}{g^{\gamma\gamma}}}\delta_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}^\gamma = \frac{\sqrt{g^{\dots}}}{g^{\gamma\gamma}}\delta_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}^\gamma = \sqrt{g^{\dots}}\delta_{\alpha\beta\gamma}\mathbf{e}_\gamma,$$
$$\mathbf{e}_\alpha \circ \mathbf{e}^\beta = g^{\beta\gamma}\frac{\sqrt{g_{\dots}}}{g_{\delta\delta}}\delta_{\alpha\gamma\delta}\mathbf{e}_\delta = g^{\beta\gamma}\sqrt{g_{\dots}}\delta_{\alpha\gamma\delta}\mathbf{e}^\delta =$$
$$= g_{\alpha\gamma}\frac{\sqrt{g^{\dots}}}{g^{\delta\delta}}\delta_{\gamma\beta\delta}\mathbf{e}^\delta = g_{\alpha\gamma}\sqrt{g^{\dots}}\delta_{\gamma\beta\delta}\mathbf{e}_\delta,$$
$$\mathbf{e}^\alpha \circ \mathbf{e}_\beta = g_{\beta\gamma}\frac{\sqrt{g^{\dots}}}{g^{\delta\delta}}\delta_{\alpha\gamma\delta}\mathbf{e}^\delta = g_{\beta\gamma}\sqrt{g^{\dots}}\delta_{\alpha\gamma\delta}\mathbf{e}_\delta =$$
$$= g^{\alpha\gamma}\frac{\sqrt{g_{\dots}}}{g_{\delta\delta}}\delta_{\gamma\beta\delta}\mathbf{e}_\delta = g^{\alpha\delta}\sqrt{g_{\dots}}\delta_{\gamma\beta\delta}\mathbf{e}^\delta.$$

Опускание и поднятие индексов происходит по обычному правилу с помощью метрических тензоров:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_o = i v_o, \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}_\alpha = -v_\alpha = -g_{\alpha\beta}v^\beta, \quad \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}_\alpha = v_\alpha,$$
$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{e}^o = i v^o, \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{e}^\alpha = -v^\alpha = -g^{\alpha\beta}v_\beta, \quad \tilde{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{e}^\alpha = v^\alpha,$$
$$w_{\alpha\beta} = -g_{\alpha k}w^k{}_\beta = g_{\alpha k}w^{ks}g_{s\beta}, \quad w^{\alpha\beta} = -g^{\alpha k}w_k{}^\beta = g^{\alpha k}w_{ks}g^{s\beta}.$$

Аналогичным образом на вектор-кватернионы и тензор-кватернионы переносится ковариантное и контравариантное дифференцирование:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\beta} = \mathbf{E}_k \frac{\partial^2 X^k}{\partial q^\beta \partial q^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial q^\alpha},$$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma} = -\frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\gamma}\mathbf{e}_\beta - \mathbf{e}_\alpha \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial q^\gamma}, \quad -\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{e}_\beta}{\partial q^\alpha}\mathbf{e}_\gamma + \mathbf{e}_\beta \frac{\partial \mathbf{e}_\gamma}{\partial q^\alpha}, \quad -\frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} = \frac{\partial \mathbf{e}_\gamma}{\partial q^\beta}\mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\gamma \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\beta},$$

$$-\Gamma_{\alpha\beta,\gamma} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\right) = \mathbf{e}_\gamma \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\beta}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\beta} = \mathbf{e}^\gamma \Gamma_{\alpha\beta,\gamma},$$

$$-\Gamma^s_{\alpha\beta} = \frac{g^{s\gamma}}{2}\left(-\frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial q^\alpha} - \frac{\partial g_{\gamma\alpha}}{\partial q^\beta} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial q^\gamma}\right) = \mathbf{e}^s \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\beta}, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\alpha}{\partial q^\beta} = \mathbf{e}_s \Gamma^s_{\alpha\beta}.$$

Для ортогональной криволинейной системы координат оператор набла принимает вид

$$\nabla = -\mathbf{E}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial T} + \mathbf{E}_\alpha \frac{\partial}{\partial X^\alpha} = -\mathbf{e}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_s \frac{\partial q^s}{\partial X^\alpha}\frac{\partial q^\beta}{\partial X^\alpha}\frac{\partial}{\partial q^\beta} =$$

$$= -\mathbf{e}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{e}_s \frac{\delta_{s\beta}}{g_{s\beta}}\frac{\partial}{\partial q^\beta} = -\mathbf{e}_o \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{g_{\beta\beta}}\mathbf{e}_\beta \frac{\partial}{\partial q^\beta}.$$

4. Изложенное выше применим для описания электромагнитного поля. Введем вектор-кватернион-потенциал $\mathbf{A} = \mathbf{E}_o \frac{i}{c}\varphi + \mathbf{E}_\alpha A^\alpha$ и тензор-кватернион-потенциал ${}_L\mathbf{A} = \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta \; {}_L A^{\alpha\beta}$ или ${}_R\mathbf{A} = \mathbf{E}_\alpha \mathbf{E}_\beta \; {}_R A^{\alpha\beta}$, где

$${}_L A^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{i}{c}\varphi & -A^1 & -A^2 & -A^3 \\ A^1 & \frac{i}{c}\varphi & -A^3 & A^2 \\ A^2 & W^3 & \frac{i}{c}\varphi & -W^1 \\ A^3 & -A^2 & A^1 & \frac{i}{c}\varphi \end{pmatrix}, \quad {}_R A^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \frac{i}{c}\varphi & A^1 & A^2 & A^3 \\ -A^1 & \frac{i}{c}\varphi & -A^3 & A^2 \\ -A^2 & A^3 & \frac{i}{c}\varphi & -A^1 \\ -A^3 & -A^2 & A^1 & \frac{i}{c}\varphi \end{pmatrix}.$$

$$\nabla\mathbf{A}-\left(\nabla\mathbf{A}\right)^{T}=-\frac{i}{c}\mathbf{E}_{o}\left(\mathbf{E}_{o}\frac{i}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial T}+\mathbf{E}_{\alpha}\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial T}\right)+\mathbf{E}_{\beta}\left(\mathbf{E}_{o}\frac{i}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial X^{\beta}}+\mathbf{E}_{\alpha}\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial X^{\beta}}\right)+$$

$$+\left(\mathbf{E}_{o}\frac{i}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial T}+\mathbf{E}_{\alpha}\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial T}\right)\frac{i}{c}\mathbf{E}_{o}-\left(\mathbf{E}_{o}\frac{i}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial X^{\beta}}+\mathbf{E}_{\alpha}\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial X^{\beta}}\right)\mathbf{E}_{\beta}=$$

$$=\quad-\mathbf{E}_{o}\mathbf{E}_{1}\frac{i}{c}\left(\frac{\partial A^{1}}{\partial T}+\frac{\partial\varphi}{\partial X^{1}}\right)-\mathbf{E}_{o}\mathbf{E}_{2}\frac{i}{c}\left(\frac{\partial A^{2}}{\partial T}+\frac{\partial\varphi}{\partial X^{2}}\right)-\mathbf{E}_{o}\mathbf{E}_{3}\frac{i}{c}\left(\frac{\partial A^{3}}{\partial T}+\frac{\partial\varphi}{\partial X^{3}}\right)+$$

$$+\mathbf{E}_{1}\mathbf{E}_{o}\frac{i}{c}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X^{1}}+\frac{\partial A^{1}}{\partial T}\right)\qquad+\mathbf{E}_{1}\mathbf{E}_{2}\left(\frac{\partial A^{2}}{\partial X^{1}}-\frac{\partial A^{1}}{\partial X^{2}}\right)+\mathbf{E}_{1}\mathbf{E}_{3}\left(\frac{\partial A^{3}}{\partial X^{1}}-\frac{\partial A^{1}}{\partial X^{3}}\right)+$$

$$+\mathbf{E}_{2}\mathbf{E}_{o}\frac{i}{c}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X^{2}}+\frac{\partial A^{2}}{\partial T}\right)+\mathbf{E}_{2}\mathbf{E}_{1}\left(\frac{\partial A^{1}}{\partial X^{2}}-\frac{\partial A^{2}}{\partial X^{1}}\right)\qquad+\quad\mathbf{E}_{2}\mathbf{E}_{3}\left(\frac{\partial A^{3}}{\partial X^{2}}-\frac{\partial A^{2}}{\partial X^{3}}\right)+$$

$$+\mathbf{E}_{3}\mathbf{E}_{o}\frac{i}{c}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial X^{3}}+\frac{\partial A^{3}}{\partial T}\right)+\mathbf{E}_{3}\mathbf{E}_{1}\left(\frac{\partial A^{1}}{\partial X^{3}}-\frac{\partial A^{3}}{\partial X^{1}}\right)+\mathbf{E}_{3}\mathbf{E}_{2}\left(\frac{\partial A^{2}}{\partial X^{3}}-\frac{\partial A^{3}}{\partial X^{2}}\right)$$

В трехмерном описании векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ определяются векторным и скалярным потенциалами с помощью соотношений

$\mathbf{E}=-grad\varphi-\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},\quad \mathbf{B}=rot\mathbf{A}$ так, что первая группа уравнений Максвелла $rot\mathbf{E}+\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0,\quad div\mathbf{B}=0$ удовлетворяется автоматически. Таким образом, построенный тензор $\nabla\mathbf{A}-\left(\nabla\mathbf{A}\right)^{T}=\mathbf{F}$ совпадает с введенным Г.Минковским кососимметричным тензором

$$\mathbf{F}=\quad\mathbf{E}_{o}\mathbf{E}_{1}\frac{i}{c}E^{1}+\mathbf{E}_{o}\mathbf{E}_{2}\frac{i}{c}E^{2}+\mathbf{E}_{o}\mathbf{E}_{3}\frac{i}{c}E^{3}-$$

$$-\mathbf{E}_{1}\mathbf{E}_{o}\frac{i}{c}E^{1}\qquad+\mathbf{E}_{1}\mathbf{E}_{2}B^{3}\quad-\mathbf{E}_{1}\mathbf{E}_{3}B^{2}-$$

$$-\mathbf{E}_{2}\mathbf{E}_{o}\frac{i}{c}E^{2}-\mathbf{E}_{2}\mathbf{E}_{1}B^{3}\qquad+\mathbf{E}_{2}\mathbf{E}_{3}B^{1}+$$

$$-\mathbf{E}_{3}\mathbf{E}_{o}\frac{i}{c}E^{3}+\mathbf{E}_{3}\mathbf{E}_{1}B^{2}-\mathbf{E}_{3}\mathbf{E}_{2}B^{1}\quad,$$

компоненты которого вычисляются по формулам $F^{qp}=\dfrac{\partial A^{p}}{\partial X^{q}}-\dfrac{\partial A^{q}}{\partial X^{p}},\quad A^{o}=\dfrac{i}{c}\varphi,\quad \dfrac{\partial}{\partial X^{o}}=-\dfrac{i}{c}\dfrac{\partial}{\partial T},\quad p,q=\overline{o,3}$ и удовлетворяют уравнениям $\dfrac{\partial F^{ij}}{\partial X^{k}}+\dfrac{\partial F^{jk}}{\partial X^{i}}+\dfrac{\partial F^{ki}}{\partial X^{j}}\equiv 0,\quad i,j,k=\overline{O,3}$.

Второй тензор $\mathbf{G}\left(F^{qp}\right)$, введенный Г.Минковским, в случае однородной и изотропной среды связан с тензором $\mathbf{F}$ линейными соотношениями $G^{pq} = \gamma_{pq} F^{pq}$,

где $\gamma_{pq} = \dfrac{1}{\mu}$, $\gamma_{oq} = \gamma_{po} = \varepsilon c^2$, $pq = 1,2,3$:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{G} = \quad & \mathbf{E}_o\mathbf{E}_1 icD^1 + \mathbf{E}_o\mathbf{E}_2 icD^2 + \mathbf{E}_o\mathbf{E}_3 icD^3 - \\
& - \mathbf{E}_1\mathbf{E}_o icD^1 + \mathbf{E}_1\mathbf{E}_2 H^3 - \mathbf{E}_1\mathbf{E}_3 H^2 - \\
& - \mathbf{E}_2\mathbf{E}_o icD^2 - \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1 H^3 + \mathbf{E}_2\mathbf{E}_3 H^1 + \\
& - \mathbf{E}_3\mathbf{E}_o icD^3 + \mathbf{E}_3\mathbf{E}_1 H^2 - \mathbf{E}_3\mathbf{E}_2 H^1 \quad .
\end{aligned}
$$

Уравнения $_R\nabla \cdot \mathbf{G} = \mathbf{J}$, $\displaystyle\sum_{k=o}^{3} \frac{\partial G^{jk}}{\partial x^k} = J^j$, $j,k,s = \overline{0,3}$, где $\mathbf{J} = \mathbf{E}_o ic\rho + \mathbf{E}_\alpha J^\alpha$ – кватернион-ток имеют вид второй группы уравнений Максвелла

$$rot\mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J}, \quad div\mathbf{D} = \rho .$$

Вычисляя $\nabla \circ J$, получаем

$$
\begin{aligned}
\nabla \circ J = -\tau_o\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J_1}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2}{\partial x_2} + \frac{\partial J_3}{\partial x_3}\right) + \tau_1\left(\frac{i}{c}\frac{\partial J_1}{\partial t} + ic\frac{\partial \rho}{\partial x_1} + \frac{\partial J_3}{\partial x_2} - \frac{\partial J_2}{\partial x_3}\right) + \\
+ \tau_2\left(\frac{i}{c}\frac{\partial J_2}{\partial t} + ic\frac{\partial \rho}{\partial x_2} + \frac{\partial J_1}{\partial x_3} - \frac{\partial J_3}{\partial x_1}\right) + \tau_3\left(\frac{i}{c}\frac{\partial J_3}{\partial t} + ic\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial J_2}{\partial x_1} - \frac{\partial J_1}{\partial x_2}\right)
\end{aligned}
$$

или в векторном обозначении

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\mathbf{J} = 0, \quad c^2 grad\rho + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} = -\mathbf{G}, \quad rot\mathbf{J} = \mathbf{C},$$

$$\nabla \circ J = -\tau_o\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\mathbf{J}\right) - \frac{i}{c}\mathbf{G} + \mathbf{C}.$$