Концепции и модели физики

Кузьмичев Сергей Дмитриевич

МФТИ
Московский Физико-Технический Институт

Содержание лекции №13

1. Магнитная энергия тока. Энергия магнитного поля соленоида.
2. Магнитная энергия и её локализация в пространстве. Плотность энергии магнитного поля.
3. Энергетический метод расчёта сил в магнитном поле. Подъёмная сила электромагнита.
4. Ток смещения.
5. Система уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах. Материальные уравнения. Граничные условия.
6. Волновое уравнение.
7. Плоские монохроматические электромагнитные волны в диэлектрике. Скорость распространения.
8. Поток энергии в электромагнитной волне. Вектор Пойнтинга.

Магнитная энергия
(на примере LR-контура при $L = const$)

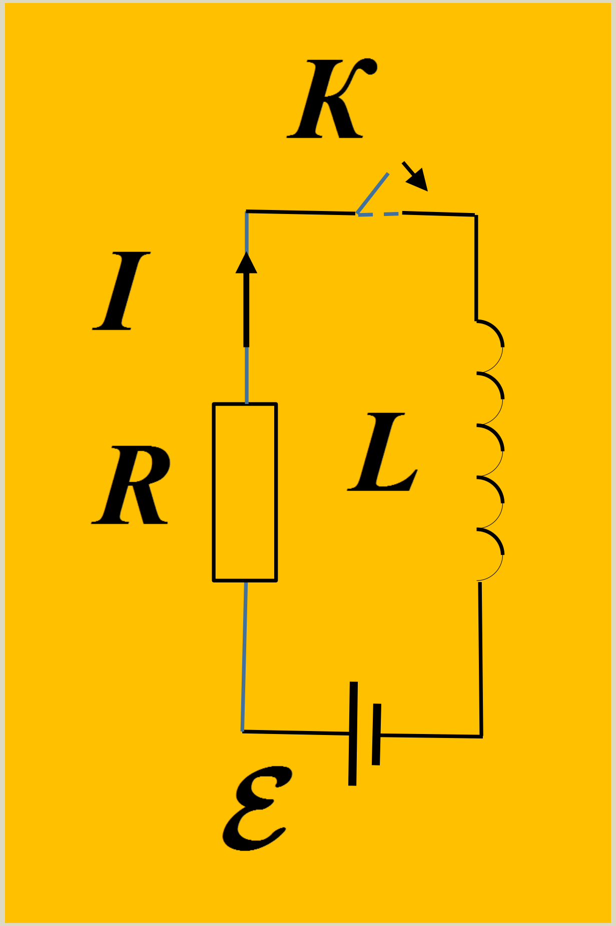
$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_{с.и.} = IR, \quad dq = Idt,$$

$$\mathcal{E}_{с.и.} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}, \quad \Phi = \frac{1}{c}LI, \quad \mathcal{E}_{с.и.} = -\frac{1}{c^2}L\frac{dI}{dt}$$

$$\mathcal{E} \cdot Idt = I^2 R \cdot dt + \frac{L}{c^2} I \cdot dI$$

$$dQ = I^2 R \cdot dt, \quad dW_{маг} = \frac{1}{c^2} LI \cdot dI$$

$$W_{маг} = \frac{LI^2}{2c^2} = \frac{I\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L}$$



Для идеального соленоида

$$H = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{NI}{l}, \quad L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}$$

$$W_{маг} = \frac{1}{2c^2} \cdot LI^2 = \frac{1}{2c^2} \cdot \frac{4\pi\mu N^2 S}{l} \cdot \left(\frac{Hcl}{4\pi N}\right)^2 = \frac{\mu H^2}{8\pi} \cdot Sl$$

$$W_{маг} = \frac{HB}{8\pi} \cdot V = \frac{\mu H^2}{8\pi} \cdot V = \frac{B^2}{8\pi\mu} \cdot V$$

Плотность энергии магнитного поля

$$w_{маг} = \frac{W_{маг}}{V} = \frac{HB}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{B^2}{8\pi\mu}$$

Энергетический метод расчёта сил в магнитном поле

$$dt, \quad dx, \quad dq = Idt, \quad dA = Fdx$$

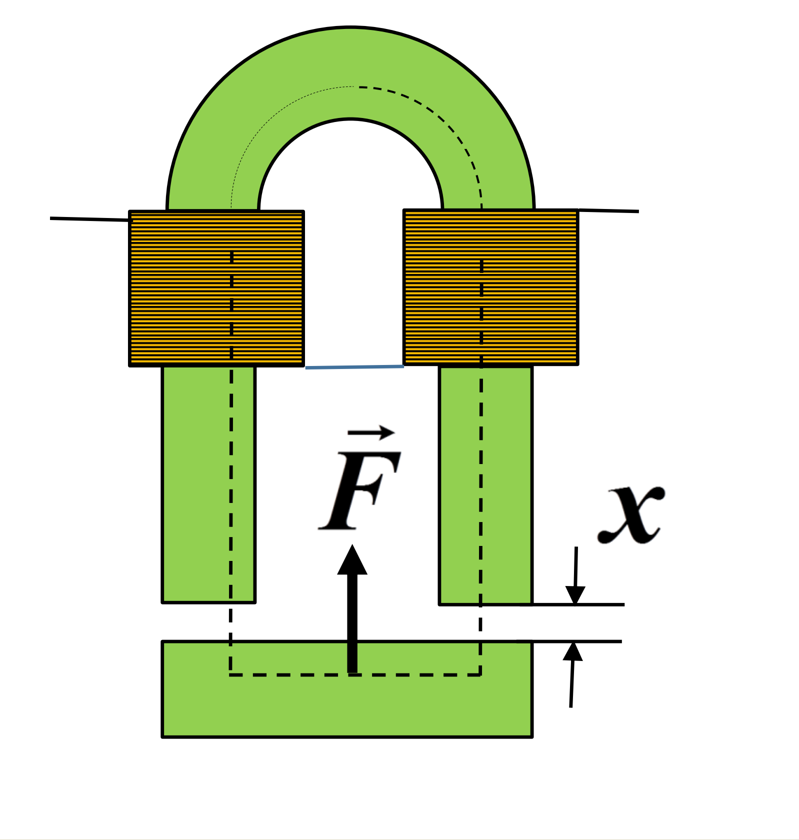
$$\mathcal{E}Idt = dA + I^2Rdt + dW_{маг}$$

$$\mathcal{E} - \frac{1}{c}\cdot\frac{d\Phi}{dt} = IRdt$$

$$\mathcal{E}Idt = I^2Rdt + \frac{1}{c}Id\Phi$$

$$dA + dW_{маг} = \frac{1}{c}Id\Phi$$

$$dA = \frac{1}{c}Id\Phi - dW_{маг} = \frac{1}{c}Id\Phi - d\left(\frac{I\Phi}{2c}\right)$$



Для $I = const$

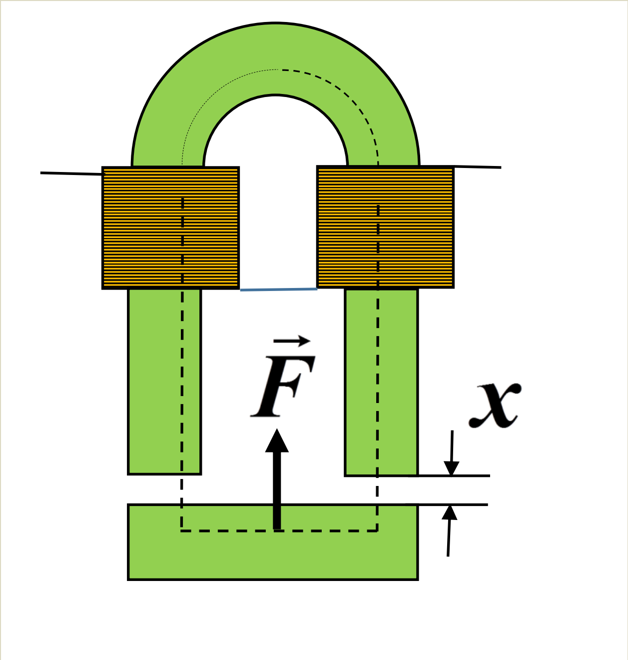
$$dA = \frac{1}{2c} I d\Phi \quad , \quad B_{м,п} = \mu H_м = B_{з,п} = H_з$$

$$H_м l + H_з \cdot 2x = H_м l + \mu H_м \cdot 2x = \frac{4\pi}{c} NI ,$$

$$B_{м,п} = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\mu NI}{l + 2\mu x}, \qquad \Phi = B_{м,п} NS = \frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\mu N^2 SI}{l + 2\mu x}$$

$$d\Phi = -\frac{4\pi}{c} \cdot \frac{\mu N^2 SI}{\left(l + 2\mu x\right)^2} \cdot 2\mu dx$$

$$dA = -\frac{4\pi}{c^2} \cdot \frac{\mu N^2 SI^2}{\left(l + 2\mu x\right)^2} \cdot \mu dx$$



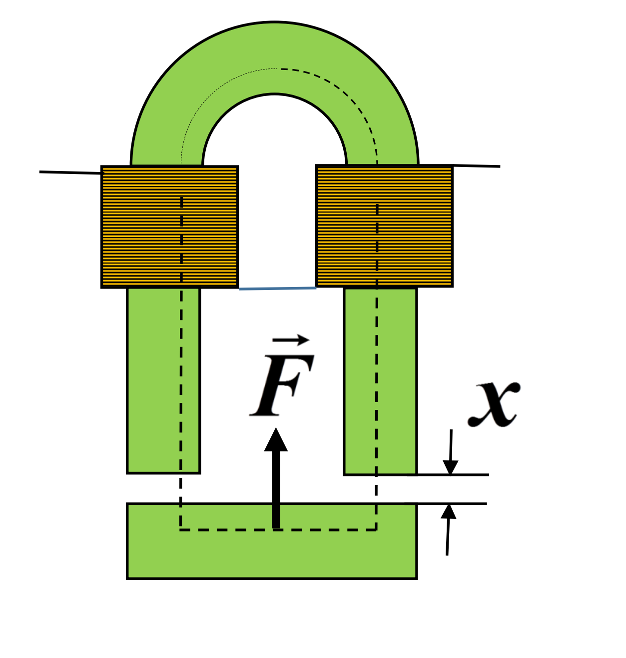
$S,\ l,\ N,\ I,\ \mu,$

$x \square \sqrt{S},\ l \square \sqrt{S}$

Подъёмная сила электромагнита

$$F_x = -\frac{4\pi}{c^2}\cdot\frac{\mu^2 N^2 S I^2}{\left(l+2\mu x\right)^2}$$

$$F_{x,max} = F_x\left(x=0\right) = -4\pi\left(\frac{\mu N I}{cl}\right)^2 S$$



$$\mu = 10^2,\ N = 10^3,\ I = 1\ A = 3\cdot 10^9\ ед.СГС,$$

$$c = 3\cdot 10^{10}\ см/с,\ l = 100\ см,\ S = 2500\ см^2$$

$$F_{max} \approx 3{,}14\cdot 10^8\ дин = 3{,}14\cdot 10^3\ Н$$

Ток смещения

<u>Пример1.</u> Заряженный металлический шар разряжается в проводящей среде.

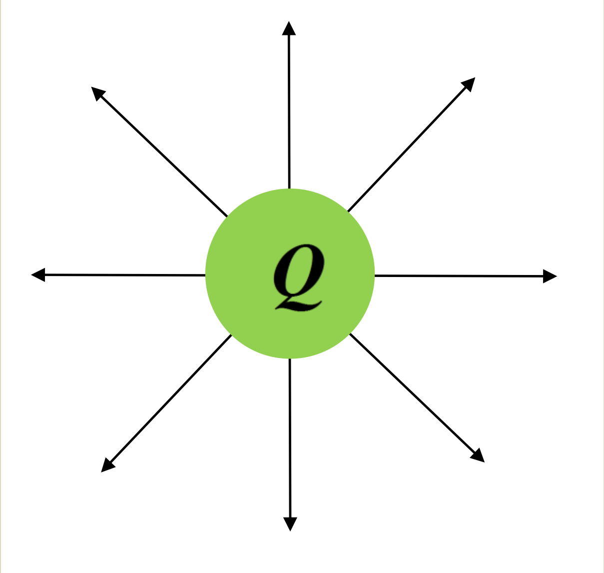
Из симметрии $\vec{B} = \vec{H} = 0$

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{пров} = 0\,(?), \quad \vec{j}_{пров} \neq 0,\ div\vec{j}_{пров} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

$$\vec{j}_{пров} \to \vec{j}_{пров} + \vec{j}_{см} = 0, \quad \vec{j}_{пров} = \frac{I}{S}\vec{n} = -\frac{1}{S}\cdot\frac{\partial Q}{\partial t}\cdot\vec{n}$$

$$\vec{j}_{см} = -\vec{j}_{пров} = \frac{1}{S}\cdot\frac{\partial Q}{\partial t}\cdot\vec{n} = \frac{1}{4\pi r^2}\cdot\frac{\partial Q}{\partial t}\cdot\vec{n}$$

$$\vec{D} = \frac{Q}{r^2}\cdot\vec{n}, \quad \vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$



Ток смещения

Пример 2. Заряжающийся конденсатор.

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I$$

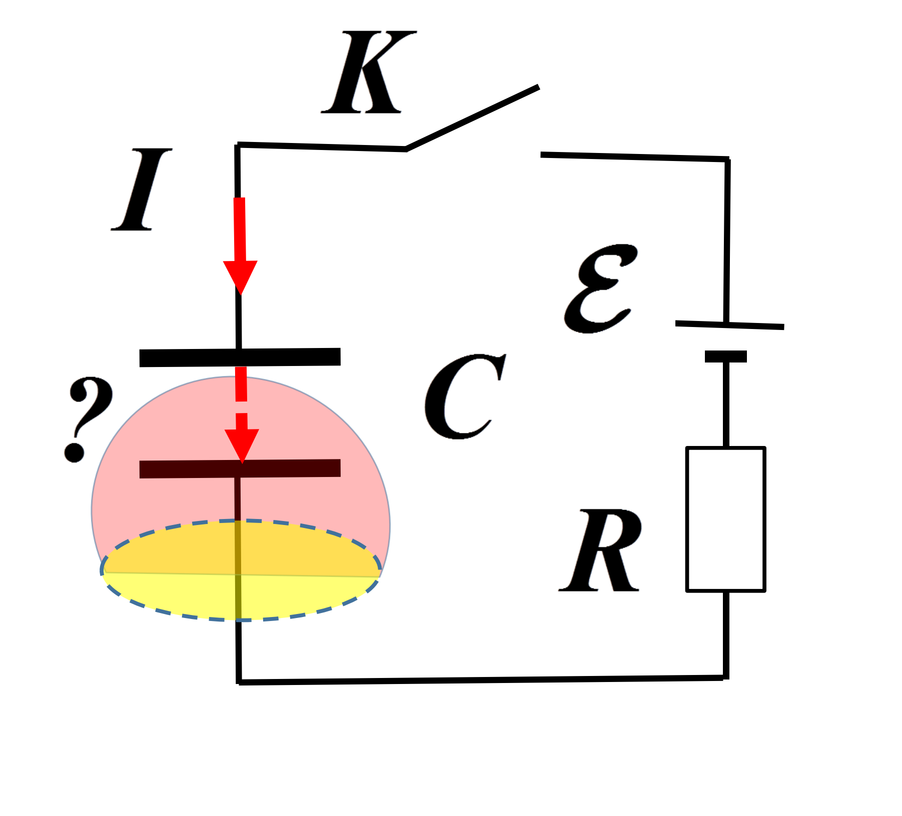
- не зависит от выбора вспомогательной поверхности

$$I = I_{пров} + I_{см},$$

$$I_{пров} = \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad I_{см} = \frac{\partial Q}{\partial t}$$

$$Q = S\sigma = S\frac{D}{4\pi}$$

$$j_{см} = \frac{I_{см}}{S}, \quad \vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$



Ток смещения

$$\vec{j}_{см} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_{пров} + \vec{j}_{см}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{пров} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\left(I_{пров} + I_{см}\right)$$

$$I_{см} = \int_S \vec{j}_{см} d\vec{S} = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$$

Переменное электрическое поле приводит к возникновению токов смещения, которые участвуют в создании магнитного поля.

Уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\oint_S \vec{D}d\vec{S} = 4\pi Q$$

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = -\frac{1}{c}\oint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B}d\vec{S} = 0$$

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \frac{4\pi}{c}\left(I_{пров} + I_{см}\right) = \frac{4\pi}{c}I_{пров} + \frac{1}{c}\oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}d\vec{S}$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$div\vec{D} = 4\pi\rho$$

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$div\vec{B} = 0$$

$$rot\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\left(\vec{j}_{пров} + \vec{j}_{см}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{пров} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

Материальные уравнения

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$$

$$\vec{P} = \alpha\vec{E}, \;\; \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \;\;\; \varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$$

$$\vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M}$$

$$\vec{M} = \chi\vec{H}, \;\; \vec{B} = \mu\vec{H}, \;\;\; \mu = 1 + 4\pi\chi$$

$$\vec{j}_{пров} = \lambda\vec{E}$$

Граничные условия

$$D_{2,n} - D_{1,n} = 4\pi\sigma$$

$$E_{1,t} = E_{2,t}$$

$$B_{2,n} = B_{1,n}$$

$$H_{2,t} - H_{1,t} = \frac{4\pi}{c} i_N$$

Поток энергии

Плотность энергии электромагнитного поля и её изменение

$$dw = \frac{1}{4\pi}\vec{E}d\vec{D} + \frac{1}{4\pi}\vec{H}d\vec{B}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \frac{1}{4\pi}\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{c}{4\pi}\vec{E}\cdot\left(rot\vec{H} - \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{np}\right) + \frac{c}{4\pi}\vec{H}\cdot rot\vec{E}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{c}{4\pi}\left(\vec{E}\cdot rot\vec{H} - \vec{H}\cdot rot\vec{E}\right) - \vec{j}_{np}\vec{E}$$

Вектор Пойнтинга

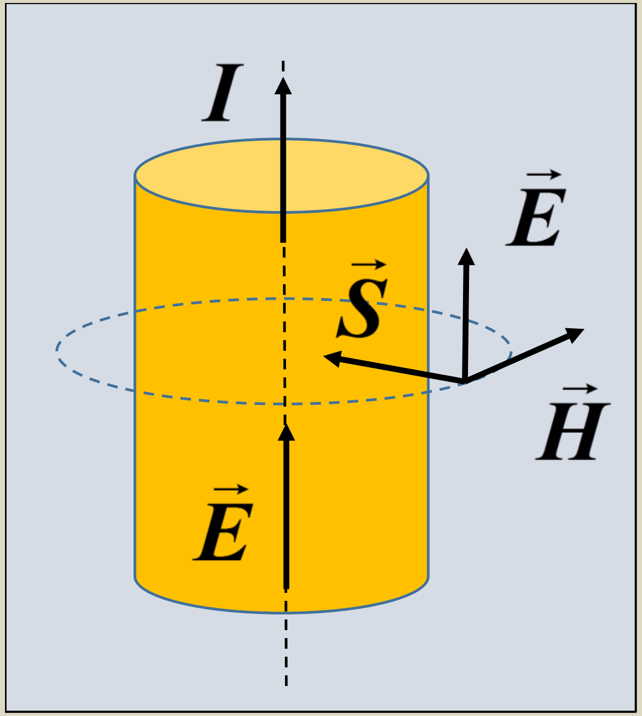
$$div\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) = -\vec{E}\cdot rot\vec{H} + \vec{H}\cdot rot\vec{E}$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\cdot\vec{E}\times\vec{H}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -div\vec{S} - \vec{j}_{np}\cdot\vec{E}$$

$$W = \int_V w dV, \qquad Q = \int_V \vec{j}_{np}\cdot\vec{E} dV$$

$$\frac{dW}{dt} = -\int_A \vec{S}d\vec{A} - Q$$



Примеры: зарядка конденсатора, провод с током

Волновое уравнение для электромагнитной волны (линейная среда, нет свободных зарядов и токов проводимости)

$$rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \quad rot\vec{H} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \ \vec{B} = \mu\vec{H}$$

$$rot\cdot rot\vec{E} = -\frac{1}{c}\cdot rot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$rot\cdot rot\vec{E} = grad\,div\vec{E} - \Delta\vec{E} \quad \left(\Delta = \nabla^2, \ div\vec{E} = 0\right)$$

$$-\frac{1}{c}\cdot rot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\cdot\mu\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(rot\vec{H}\right) = -\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

Волновое уравнение для электромагнитной волны

$$\Delta\vec{E} = \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\Delta\vec{H} = \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}$$

Одномерное волновое уравнение

$$\vec{E} = \left(E_x, 0, 0\right), \quad \vec{H} = \left(0, H_y, 0\right)$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} = 0$$

Бегущие волны

$$u(z=0,t)=u_0(t),\qquad u(z,t)=u_0\left(t-\frac{z}{v}\right)$$

$$u_0(t)=A\cdot cos[\omega t],\quad u(z,t)=A\cdot cos\left[\omega\left(t-\frac{z}{v}\right)\right]$$

$$u(z,t)=A\cdot cos(kz-\omega t),\qquad kv=\omega$$

$$\varphi(z,t)=kz-\omega t$$

$$\varphi(\vec{r},t)=\vec{k}\vec{r}-\omega t=k_x x+k_y y+k_z z-\omega t$$

Плоская волна $\vec{k}\vec{r}-\omega t=k_x x+k_y y+k_z z-\omega t=const$

Длина волны, фазовая скорость волны

$$u(z,t) = u(z+\lambda,t)\ , \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\varphi(z,t) = kz - \omega t = \varphi_0 = const$$

$$k\cdot(z+dz) - \omega\cdot(t+dt) = \varphi_0$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$$

В вакууме

$$\varepsilon = \mu = 1 \qquad v = c = 3\cdot 10^{10}\ см/с$$

Одномерное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0, \quad E_x = E_x(\xi),\ \xi = z - vt$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v\frac{\partial E_x}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t} = v^2\frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi^2} - \frac{1}{v^2}v^2\frac{\partial^2 E_x}{\partial \xi^2} = 0$$

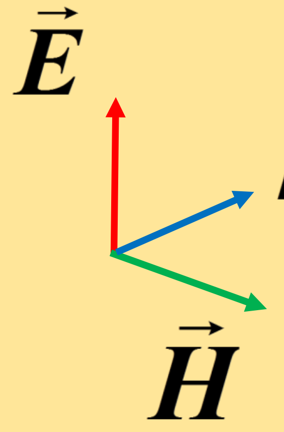
Поперечность электромагнитных волн

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 \cdot e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega t\right)}$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0, \quad \mathrm{div}\vec{H} = 0$$

$$\mathrm{div}\vec{E} = i\vec{k}\vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{k}$$

$$\mathrm{div}\vec{H} = i\vec{k}\vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} \perp \vec{k}$$



$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k} \times \vec{E} = \frac{i\omega}{c}\mu\vec{H}, \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k} \times \vec{H} = -\frac{i\omega}{c}\varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{k} \times \vec{E} = \frac{\omega}{c}\mu\vec{H}, \; \vec{k} \times \vec{H} = -\frac{\omega}{c}\varepsilon\vec{E} \Rightarrow kE = \frac{\omega}{c}\mu H, \; k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}$$

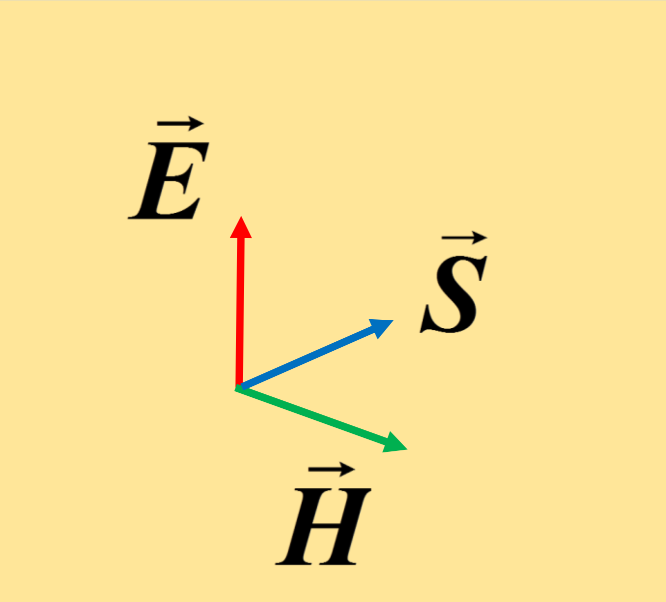
$$\vec{k} \perp \vec{E} \perp \vec{H}$$

$$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$$

Вектор Пойнтинга для плоской электромагнитной волны

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \cdot \vec{E} \times \vec{H}, \qquad \vec{S} \uparrow\uparrow \vec{k},$$

$$S = \frac{c}{4\pi} EH = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \cdot \frac{\varepsilon E^2}{4\pi} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \cdot \frac{\mu H^2}{4\pi}$$



$$w = w_E + w_M = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} + \frac{\mu H^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi}$$

$$S = vw$$

Лазерная указка $S = 100\ мВт / см^2$

Мощный лазер $S \approx 1000\ ТВт / см^2$