

Лекция № 11

Электромагнитная индукция. Энергия магнитного поля

**Алексей Викторович
Гуденко**

19/11/2012

План лекции

1. Закон электромагнитной индукции Фарадея. Правило Ленца.
2. Бетатрон
3. Соленоид. Магнитная энергия и её локализация в пространстве
4. Энергия и силы

Граничные условия для векторов \mathbf{B} и \mathbf{H}

- теорема Гаусса:

$$\oint \vec{B} d\vec{S} = 0 \Rightarrow B_{1n} = B_{2n}$$

- теорема о циркуляции:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} I \Rightarrow H_{2t} - H_{1t} = \frac{4\pi}{c} i_n$$

Как измерить H и B

- Поле, измеренное в узком цилиндрическом канале, параллельном магнитному полю, будет равно напряжённости поля H в магнетике
- Поле, измеренное в коротком цилиндре, с основаниями \perp магнитному полю, будет равно индукции поля B в магнетике

Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость

- Линейные изотропные магнетики:
 $\mathbf{P}_m = k\mathbf{H}$, k – магнитная восприимчивость
- $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi k\mathbf{H} = (1 + 4\pi k)\mathbf{H} = \mu\mathbf{H}$
- $\mu = 1 + 4\pi k$ – магнитная проницаемость
 - Парамагнетики: $k > 0$, $\mu > 1$, $k \sim 10^{-7} - 10^{-5}$
(Al, Pt, FeCl₂, O₂)
 - Диамагнетики: $k < 0$, $\mu < 1$, $k \sim -(10^{-7} - 10^{-5})$
(Bi, Sb, Si, H₂O, H₂, N₂)
 - ферромагнетики

Преломление силовых линий

- На границе раздела двух магнетиков:

$$H_{2t} = H_{1t} \Rightarrow B_{2t}/\mu_2 = B_{1t}/\mu_1$$

$$B_{2n} = B_{1n} \Rightarrow$$

$\operatorname{tg}\alpha_2 / \operatorname{tg}\alpha_1 = \mu_2 / \mu_1$ – происходит сгущение линий в более сильных магнетиках.

Намагничивание цилиндра и шара во внешнем поле

- Длинный цилиндр:
 $\rho_m = kH = kV_0 = V_0(\mu - 1)/4\pi$
- Короткий цилиндр:
 $\rho_m = kH = (k/\mu) V_0 = V_0(\mu - 1)/4\pi\mu$
- Для шара: $\rho_m = V_0 3(\mu - 1)/4\pi(\mu + 2)$
- Для сверхпроводящего шара считаем $\mu = 0 \Rightarrow$
 $\rho_m = -3V_0/8$
полный момент сверхпроводящего шара:
 $P = 4/3 \pi R^3 \rho_m = -1/2 V_0 R^3$

Намагничивание шара в постоянном магнитном поле

- Сверхпроводящий шар в магнитном поле индукцией B_0 приобретает дипольный момент:

$$\mathbf{P}_m = - \frac{1}{2} \mathbf{B}_0 R^3$$

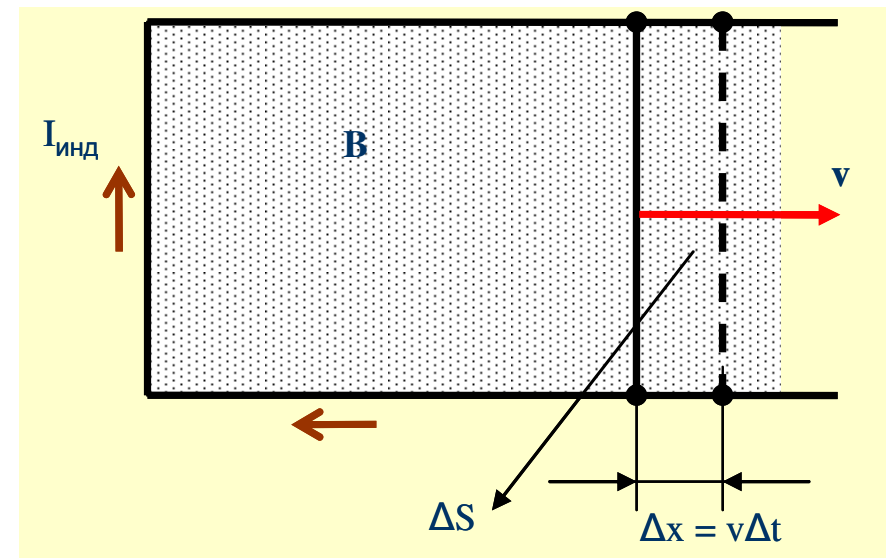
Магнитная проницаемость газа сверхпроводящих шариков (Овчинкин, 6.26)

- $p_m = np_i = -nr^3H/2$
- $B = H + 4\pi p_m = (1 - 2\pi nr^3)H \Rightarrow$
 $\mu = (1 - 2\pi nr^3) < 1$ - диамагнетик

Закон электромагнитной индукции Фарадея. Правило Ленца.

- В замкнутом проводящем контуре при изменении магнитного потока вектора \mathbf{B} , охватываемого этим контуром, возникает электрический ток. Этот ток называется *индукционным* током.
- Причина возникновения тока – *эдс индукции $\varepsilon_{\text{инд}}$*
- Величина эдс индукции $\varepsilon_{\text{инд}}$ равна скорости изменения магнитного потока через контур:
$$\varepsilon_{\text{инд}} = - 1/c \, d\Phi/dt$$
- **Правило Ленца:** *индукционный ток направлен так, чтобы противодействовать причине его вызвавшей - индукционный ток создаёт поток, препятствующий изменению магнитного потока через виток.*

Подвижная перемычка



- $\mathbf{E} = -1/c[\mathbf{v}\mathbf{B}]$
- $\varepsilon_{\text{инд}} = \int \mathbf{E} d\boldsymbol{\ell} = - (v/c)B\ell = - (1/c) B dS/dt = - (1/c) d\Phi/dt$

Природа электромагнитной индукции

- **Контур движется в постоянном магнитном поле.**

Индукционный ток возникает под действием магнитной составляющей силы Лоренца:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}_m/q = [\mathbf{v} \mathbf{B}]$$

- **Контур покоится в переменном магнитном поле.**

Индукционный ток возбуждается возникающим в проводнике электрическим полем.

Вихревое электрическое поле

- Закон электромагнитной индукции состоит в том, что всякое *переменное* магнитное поле порождает в пространстве *вихревое электрическое поле*.
Циркуляция вектора E по любому неподвижному замкнутому контуру пропорциональна скорости изменения магнитного потока через этот контур:
$$\oint \mathbf{E} d\boldsymbol{\ell} = - (1/c) (\partial\Phi/\partial t)$$
- *Дифференциальная форма закона электромагнитной индукции:*
$$\text{rot}\mathbf{E} = - (1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t$$
 – скорость изменения поля \mathbf{B} в данной точке определяет ротор поля \mathbf{E} в той же точке
- Индуцированное электрическое поле – поле вихревое (соленоидальное)

Закон сохранения магнитного потока

- В проводнике с нулевым сопротивлением сохраняется:
 $\varepsilon_{\text{инд}} = - 1/c \, d\Phi/dt = IR = 0 \Leftrightarrow$
 $\Phi = \Phi_e + \Phi_i = \text{const}$ – силовые линии «вморожены» в проводящий контур:

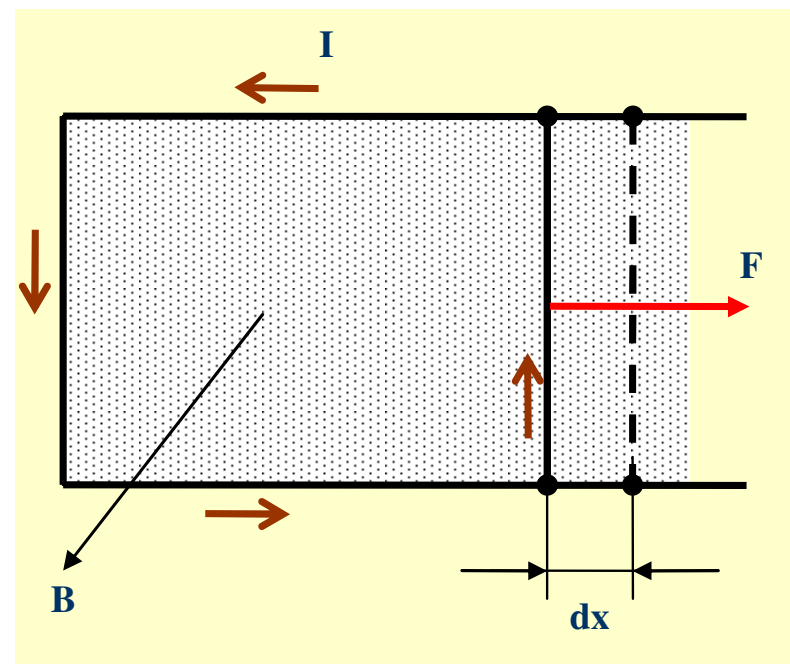
При движении идеально проводящего замкнутого провода в магнитном поле остаётся постоянным магнитный поток, пронизывающий контур провода.

Бетатрон (Овчинкин, 8.30)

- Бетатрон – индукционный ускоритель электронов
- Бетатронное условие: магнитное поле B_0 на орбите равно половине среднего поля в зазоре: $B_0 = \frac{1}{2} B_{cp}$
- На орбите: $pw = q(v/c)B_0 \Rightarrow p = qrB_0/c$
- Электрон разгоняется до импульса:
 $dp = qEdt = q/2\pi r (E2\pi r)dt = q/2\pi cr (d\Phi/dt) dt = q/2\pi cr d\Phi$
 $\Rightarrow p = q\Phi/2\pi cr = qrB_{cp}/2c \Rightarrow B_0 = \frac{1}{2} B_{cp}$
- Оценка энергии электрона: $B_{cp} \sim 2$ Тл, $r = 100$ см $\Rightarrow pc = qrB_{cp}/2 = 4,8 \cdot 10^{-10} \cdot 10^2 \cdot 10^4 = 4,8 \cdot 10^{-4}$ эрг = $4,8 \cdot 10^{-11}$ Дж = $4,8 \cdot 10^{-11}/1,6 \cdot 10^{-19}$ эВ = 300 МэВ $\gg E_0 = 0,5$ МэВ \Rightarrow
 $\beta \approx 1 - \frac{1}{2} (E_0/E)^2 \approx 1 - \frac{1}{2} (E_0/pc)^2 = 0.9999986$ (!!!)

Работа сил Ампера при перемещении витка с током в магнитном поле

- $F = (I/c) \ell B$ – сила Ампера
- $dA = Fdx = (I/c) \ell B dx = (I/c) B dS = (I/c) d\Phi$



ИНДУКТИВНОСТЬ

- $\Phi = 1/c LI$
 L – индуктивность (коэффициент самоиндукции)
- Соленоид:
 $B = \mu H = 4\pi i/c = 4\pi IN/\ell c$
- $\Phi_1 = BS = (4\pi\mu NS/\ell c) I$
- $\Phi = N\Phi_1 = (1/c) (4\pi\mu N^2 S/\ell) I = 1/c LI$
- $L = (4\pi\mu N^2 S/\ell)$
- СГС: $[L] = \text{см}$
- СИ: $[L] = \text{Гн (Генри)} = 10^9 \text{ см}$

Энергия соленоида

- $I(0) = I_0$
- $\varepsilon_{\text{инд}} = IR \Leftrightarrow -1/c^2 L di/dt = IR \Leftrightarrow di/i = -c^2 R dt \Leftrightarrow I = I_0 e^{-t/\tau}, \tau = L/c^2 R \quad ([R] = c/\text{см})$
- $W = \int I^2 R dt = LI^2/2c^2 = I\Phi/2c = \Phi^2/2L$
- $W = I\Phi/2c = 4\pi i \ell BS/8\pi c = (HB/8\pi) V \Leftrightarrow$
- $w = HB/8\pi$ – плотность магнитной энергии
- $w = \mu H^2/8\pi = HB/8\pi = B^2/8\pi\mu$

Энергия и силы. Соленоид.

- $W = LI^2/2c^2 = \Phi^2/2L(\ell, R)$
- $F_\ell = -(\partial W/\partial \ell)_\Phi = \Phi^2/2L_0^2 (\partial L/\partial \ell) = -W_0/\ell_0$
- $F_r = -(\partial W/\partial r)_\Phi = \Phi^2/2L_0^2 (\partial L/\partial r) = W_0 2\pi R/S_0$
 $= W_0 2\pi R\ell_0/\ell_0 S_0 = W_0/V (2\pi R\ell_0) = wS_{\text{бок}}$
- давление на боковую стенку:
 $p = F_r/S_{\text{бок}} = w = B^2/8\pi = \{B = 10 \text{ Тл}\} =$
 $10^{10}/8 \cdot 3,14 \approx 4 \cdot 10^8 \text{ дин/см}^2 = 4 \cdot 10^7 \text{ Па} =$
 $400 \text{ атм} = 400 \text{ кг/см}^2 \sim 0,5 \text{ Тонн/см}^2 \text{ (!!!)}$

Постоянный цилиндрический магнит Тороидальный магнит с зазором.

- Постоянный магнит – это ферромагнитное вещество с постоянной намагниченностью
- Для цилиндрического магнита – это поле соленоида с линейной плотностью $i/c = P_m \Rightarrow$ поле в объёме $B_i = 4\pi i/c = 4\pi P_m$ – остаточная индукция; поле на торце $B_t \approx 1/2 B_i$
- Тороидальный магнит с зазором: поле в зазоре $B \approx B_0 = 4\pi P_m$

Магнитного поля соленоида и тороидальной катушки

- Поле длинного соленоида:
 $B = 4\pi(i/c)$; $i = In = IN/\ell$ - N – число витков,
 ℓ - длина катушки, I – ток в соленоиде; i –
линейная плотность тока; $n = N/\ell$
плотность намотки.
 $I = 10 \text{ A}$, $n = 10 \text{ см}^{-1}$ $B = 4\pi(In/c) = 1,25 \text{ Тл}$
- Поле тонкой тороидальной катушки:
 $B = 2NI/cR$