ВАРИАНТ А

1А. (Ципенюк, Раевский) Сила притяжения Земли к Солнцу является центростремительной силой при круговом движении Земли по орбите:

$$M_з\omega^2 R = \gamma\frac{M_с M_з}{R^2}.$$

При учете давления излучения из правой части надо будет вычесть создаваемую им силу. Оценим ее. Мощность, излучаемая с поверхности Солнца $W_с = \sigma T^4 4\pi R_с^2$, на Землю попадает часть этой мощности, равная

$$W_з = \sigma T_c^4 4\pi R_с^2 \frac{\pi R_з^2}{4\pi R^2} = \sigma T_с^4 \pi R_с^2 \frac{R_з^2}{R^2}.$$

Поскольку все поглощаемые фотоны передают не только энергию, но и импульс, то получаем силу давления излучения

$$F = \frac{W_з}{c} = \frac{\sigma T^4 \pi R_с^2 R_з^2}{c}\frac{1}{R^2}.$$

Откуда получаем третий закон Кеплера

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{\gamma}{4\pi^2}M_с\left(1 - \frac{\sigma T_с^4 \pi R_с^2 R_з^2}{\gamma M_з c M_с}\right).$$

Видно, что этот эффект сводится к эффективному уменьшению массы Солнца $\Delta M_с$. Оценим относительное изменение

$$\frac{\Delta M_с}{M_с} = \frac{\sigma T_с^4 \pi R_с^2 R_з^2}{\gamma M_з c M_с} = 1{,}9\cdot 10^{-14}.$$

Переходя к малым приращениям, получим

$$\frac{3\Delta R}{R} - 2\frac{\Delta T}{T} = -\frac{\Delta M_с}{M_с}.$$

Поскольку сила давления излучения в силу симметрии является центральной, то сохраняется момент количества движении Земли: $L = m\omega R^2 = 2\pi m R^2/T = \mathrm{const}$, откуда

$$\frac{2\Delta R}{R} = \frac{\Delta T}{T}.$$

Комбинируя эти два соотношения, получим, что увеличение радиуса орбиты составляет

$$\Delta R = \frac{\Delta M_с}{M_с}R \approx 0{,}3\ \text{см}.$$

Отметим, что $\Delta R \approx 10^{-12}|\Delta R_{орб}|$, где $\Delta R_{орб}$ — изменения R за счёт эллиптичности орбиты Земли.

2А. (Гелиев) Для адиабатического процесса $PV^\gamma = \mathrm{const}$, откуда для небольших относительных изменений $\Delta P/P = -\gamma\Delta V/V$. Уравнение малых колебаний поршня вблизи положения равновесия

$$M\ddot{x} = \Delta P\cdot S = -\gamma PS\frac{\Delta V}{V} = -\gamma\frac{PS^2}{V}x,$$

и для частоты колебаний получим

$$\omega^2 = \frac{\gamma PS^2}{MV}.$$

Отсюда отношение частот

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{\gamma' V}{\gamma V'}} = \sqrt{\frac{7\gamma'}{\gamma}}.$$

Для расчета показателя адиабаты $\gamma = (C_V + R)/C_V$ необходимо оценить величины колебательного и вращательного квантов энергии. Для колебательного кванта $h\nu_{\mathrm{H}}/k = 6100\ \mathrm{K} \gg T = 280\ \mathrm{K}$, и соответствующие степени свободы не возбуждаются. Для вращательного кванта

$$\frac{\hbar^2}{\mu a^2 k} = \frac{2\hbar^2}{m_p a^2 k} = 172\ \mathrm{K} < T = 280\ \mathrm{K},$$

и эти степени свободы при комнатных и близких к ним температурах необходимо учитывать. Таким образом, для показателя адиабаты получаем:

$$\gamma = \frac{(3/2 + 2/2 + 1)}{(3/2 + 2/2)} = \frac{7}{5}.$$

Используя уравнение состояния для идеального газа, нетрудно найти температуру, которую он приобрел в результате изобарического охлаждения:

$$T' = \frac{TV'}{V} = \frac{280}{7} = 40\ \text{К} \ll 172\ \text{К}.$$

Здесь уже необходимо учитывать замораживание вращательных степеней свободы. В этом случае показатель адиабаты становится равным

$$\gamma' = \frac{3/2 + 1}{3/2} = \frac{5}{3},$$

и для отношения частот окончательно получаем

$$\frac{\omega'}{\omega} = \sqrt{\frac{7 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot 7}} = \frac{5}{\sqrt{3}} = 2{,}9.$$

3А. `(Кубышкин)` Магнитное поле короткого и широкого соленоида может быть представлено как поле на оси кругового витка с током

$$H(x) = \frac{2\pi R^2 I}{c(R^2 + x^2)^{3/2}},$$

причем поле в центре витка

$$H_0 = \frac{2\pi I}{cR},$$

откуда имеем

$$H(x) = \frac{H_0 R^3}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Сверхпроводящий шарик радиусом r приобретает в поле H магнитный дипольный момент

$$\vec{p} = -\frac{1}{2} r^3 \vec{H}.$$

Ускоряющая сила равна

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{H} = -\frac{1}{2} r^3 H \frac{\partial \vec{H}}{\partial x} = m\ddot{\vec{x}}.$$

Подставляя и дифференцируя по x, получаем для ускорения

$$\ddot{x} = \frac{3H}{8\pi\rho} \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{9H_0^2 R^6}{8\pi\rho} \frac{x}{(R^2 + x^2)^4}.$$

Еще раз дифференцируя по x, убеждаемся, что максимальное значение этого ускорения достигается при $x = \frac{R}{\sqrt{7}}$, причем оно равно

$$\ddot{x}_{\max} = \frac{9H_0^2}{8\pi\rho R\sqrt{7}(8/7)^4} \approx 2 \cdot 10^5\ \text{см/с}^2.$$

Указание: Ставить полный балл за грубую оценку поля как H_0, а его градиента как H_0/R, что даёт практически тот же результат

$$\ddot{x}_{\max} = \frac{3H_0^2}{8\pi\rho R} \approx 2 \cdot 10^5\ \text{см/с}^2.$$

4А. `(Прут, С.Гуденко, Раевский)` Обозначим энергии электронов на K, L, M-оболочках через E_K, E_L, E_M. Тогда для KLL-процесса можно записать энергетическое соотношение

$$E_1 = E_L + E_L - E_K = 2E_L - E_K.$$

Для LMM-процесса $E_2 = 2E_M - E_L$. Из этих уравнений, исключая E_L, получаем

$$E_M = \frac{1}{4}(E_1 + 2E_2 + E_K).$$

Поскольку

$$I_K = -E_K, \quad \text{то} \quad E_M = \frac{1}{4}(E_1 + 2E_2 - I_K) = \frac{1}{4}(1560 - 1960) = -100 \text{ эВ}.$$

По водородоподобной модели $E_M = -13{,}6(Z_{\text{eff}}^2/n^2)$. Для M-оболочки $n = 3$, и мы получаем $Z_{\text{eff}} \simeq 8{,}1$.

5А. `(Савров)` Как следует из условия, при образовании α-частицы два протона превращаются в два нейтрона. Уравнение реакции имеет вид

$$4p \to {}^4_2\text{He} + 2e^+ + 2\nu_e.$$

Разделив поток энергии излучения Солнца на энергию, выделившуюся в результате реакции (энергия нейтрино составляет всего около 2%), и умножив на 2, получим поток солнечных нейтрино на Земле:

$$\frac{2 \cdot 0{,}136 \text{ Вт/см}^2}{26{,}73 \cdot 10^6 \text{ эВ} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж/эВ}} = 63{,}5 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1} \cdot \text{см}^{-2}.$$

Заметим, что поток, регистрируемый детектором BOREXINO, равен $(66 \pm 7) \cdot 10^9$ с$^{-1} \cdot$ см$^{-2}$, т.е. прекрасно совпадает с полученным результатом.

ВАРИАНТ Б

1Б. `(Ципенюк, Раевский)` Центростремительное ускорение Земли создает сила притяжения к Солнцу:

$$\omega^2 R = \gamma \frac{M_{\text{c}}}{R^2},$$

откуда получаем третий закон Кеплера

$$R^3 = \frac{\gamma}{4\pi^2} M_{\text{c}} T^2.$$

Переходя к малым приращениям, получим

$$\frac{3\Delta R}{R} = \frac{\Delta M_{\text{c}}}{M_{\text{c}}} + 2\frac{\Delta T}{T}.$$

Поскольку в процессе выгорания Солнца сила притяжения Земли к Солнцу остается центральной, то сохраняется момент количества движении Земли: $L = m\omega R^2 = 2\pi m R^2/T = \text{const}$, откуда

$$\frac{2\Delta R}{R} = \frac{\Delta T}{T}.$$

Комбинируя эти два соотношения, получим

$$\frac{\Delta M_{\text{c}}}{M_{\text{c}}} = -\frac{\Delta T}{2T}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta M_{\text{c}}}{M_{\text{c}}} = -\frac{\Delta R}{R}.$$

Потери энергии излучения Солнца $\Delta E = \sigma T_{\text{c}}^4 4\pi R_{\text{c}}^2 \tau$, что соответствует потере массы $\Delta M_{\text{c}} = \Delta E/c^2$. Относительное изменение массы Солнца за указанный период

$$\frac{\Delta M_{\text{c}}}{M_{\text{c}}} = \frac{\Delta E}{M_{\text{c}} c^2} = -8 \cdot 10^{-8}.$$

Поскольку $\Delta M_{\text{c}} < 0$, то период обращения Земли по орбите увеличится на

$$\Delta T = 2T \frac{|\Delta M_{\text{c}}|}{M_{\text{c}}} \simeq 5 \text{ с}.$$

Примечание. Как видно, изменение массы Солнца за указанное время ничтожно, т.е. предположение о постоянстве указанных в задаче параметров справедливо. Что касается выделяющихся на Солнце нейтрино, то, как показано в задачнике на стр. 474 (задача 6.257 ГОС), она составляет пренебрежимо малую долю от уносимой фотонами энергии (см. также 5А).

Второе решение. Поскольку процесс происходит очень медленно, то для решения можно использовать адиабатический инвариант, который равен $I = E/\omega$. Здесь $E = -\gamma M_{\text{c}}/2R$ — полная энергия Земли при движении в поле тяготения Солнца, ω — частота обращения Земли вокруг Солнца. Таким образом имеем

$$I = -\gamma \frac{M_c T}{2R2\pi} = \text{const},$$

откуда, как и в первой задаче,

$$\frac{\Delta M_c}{M_c} + \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta R}{R}.$$

2Б. (С. Гуденко) Как показано в 2А, частота колебаний

$$\omega^2 = \frac{\gamma P S^2}{MV}.$$

Используя уравнение состояния для идеального газа (это можно делать ввиду того, что условия не сильно отличаются от нормальных), это соотношение можно переписать в виде

$$\omega^2 = \frac{\gamma P S^2}{MV} = \frac{\gamma P^2 S^2}{MNkT_0}.$$

Отсюда для отношения частот имеем:

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{P_0}{P_1} = \frac{Mg + P_a S}{Mg} = \frac{1{,}8}{0{,}4} = 4{,}5,$$

откуда масса поршня

$$M = \frac{P_a S}{(4{,}5 - 1)g} = 3 \cdot 10^3 \text{ г},$$

и число молей газа

$$r = \frac{N}{N_A} = \frac{\gamma (Mg + P_a S)^2}{MkN_A T_0 (2\pi\nu_0)^2} = 1{,}79 \cdot 10^{-2} \gamma.$$

Для расчета показателя адиабаты необходимо оценить величины колебательного и вращательного квантов энергии. Для колебательного кванта $h\nu_H/k = 6100 \text{ К} \gg T_0 = 300$ К, и соответствующие степени свободы не возбуждаются. Для вращательного кванта

$$\frac{\hbar^2}{\mu a^2 k} = \frac{2\hbar^2}{m_p a^2 k} = 172 \text{ К} < T_0' < T_0,$$

и эти степени свободы при комнатных и близких к ним температурах необходимо учитывать. Таким образом, для показателя адиабаты получаем:

$$\gamma = \frac{3/2 + 2/2 + 1}{3/2 + 2/2} = \frac{7}{5}.$$

Подставляя это значение в выражение для r, получаем ответ для количества газа $r = N/N_A = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ моль. При уменьшении начальной температуры до 200 К вращательные степени свободы остаются еще возбужденными, и показатель адиабаты остается прежним. Поэтому

$$\nu_0' = \nu_0 \sqrt{T_0/T_0'} = 1{,}22\nu_0 = 2{,}2 \text{ Гц}.$$

3Б. (Мейлихов) Потенциальная энергия системы

$$U = \frac{kx^2}{2} + \frac{q^2}{L + x},$$

где k, L — начальная жесткость и начальная длина пружины, соответственно, x — её растяжение, q — заряд. В отсутствии внешних сил равновесное растяжение x_0 определяется условием $(\partial U/\partial x)_{x=x_0} = 0$, из которого следует

$$kx_0 = \frac{q^2}{(L + x_0)^2}. \tag{1}$$

Эффективная жесткость пружины есть

$$k_{\text{eff}} = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} = k + \frac{2q^2}{(L + x_0)^3}. \tag{2}$$

Подставляя (1) в (2), находим

$$k_{\text{eff}} = k\left(1 + \frac{2}{1 + L/x_0}\right),$$

откуда следует, что максимальная жесткость пружины достигается при $x_0 \to \infty$ (то есть при $q \to \infty$) и составляет $3k$. Таким образом, в условиях задачи жесткость пружины может увеличиваться не более, чем в 3 раза.

4Б. `(Прут, С.Гуденко, Раевский)` Аналогично задаче 4А, энергетические соотношения имеют вид $E_1 = E_L + E_L - E_K = 2E_L - E_K$, $E_2 = 2E_M - E_L$. Из этих уравнений, исключая E_L, получаем

$$E_2 = \frac{1}{2}(4E_M - E_K - E_1).$$

По водородоподобной модели $E_M = -13{,}6(Z_{\text{eff}}^2/n^2)$. Для M-оболочки $n = 3$, и мы получаем $E_M = -125$ эВ. Поскольку

$$I_K = -E_K, \quad \text{то} \quad E_2 = \frac{1}{2}(-4 \cdot 125 + 2300 - 1600) = 100 \text{ эВ}.$$

5Б. `(Савров)` Исходя из закона сохранения электрического заряда и лептонного числа, запишем уравнение реакции (учитывая, что $d = \{pn\}$)

$$p^+ + p^+ = d + e^+ + \nu_e.$$

Выделившаяся энергия распределяется между позитроном и нейтрино, поэтому энергии нейтрино распределены непрерывно в интервале от нуля до $E_\nu^{\max}$. Последняя соответствует покоящемуся позитрону.

$$E_\nu^{\max} = 2m_p - m_d - m_e = 0{,}42 \text{ МэВ}.$$

ВАРИАНТ В

1В. `(Ципенюк, Раевский)` Решение аналогично 1Б. Радиус орбиты увеличится на

$$\Delta R = R\frac{|\Delta M_{\text{c}}|}{M_{\text{c}}} = 12 \text{ км}.$$

2В. `(С. Гуденко)` Как следует из решения задачи 2А, отношение частот можно записать следующим образом:

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^2 = \frac{P_0V_1}{P_1V_0} = \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}},$$

и для отношения давлений

$$\frac{P_0}{P_1} = \frac{Mg + P_{\text{a}}S}{Mg} = \left(\frac{\omega_0}{\omega_1}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}}.$$

Для расчета показателя адиабаты $\gamma = (C_V + R)/C_V$ необходимо оценить величины колебательного и вращательного квантов энергии. Для колебательного кванта $h\nu_{\text{H}}/k = 6100$ К $\gg T_0 = 300$ К, и соответствующие степени свободы не возбуждаются. Для вращательного кванта

$$\frac{\hbar^2}{\mu a^2 k} = \frac{2\hbar^2}{m_p a^2 k} = 172 \text{ К} < T_0,$$

и эти степени свободы при комнатных и близких к ним температурах необходимо учитывать. Таким образом, для показателя адиабаты получаем:

$$\gamma = \frac{3/2 + 2/2 + 1}{3/2 + 2/2} = \frac{7}{5}.$$

Подставляя это значение в выражение для отношения давлений, получим:

$$\frac{P_0}{P_1} = \left(\frac{1{,}8}{0{,}5}\right)^{7/6} = 4{,}45,$$

откуда масса поршня

$$M = \frac{P_{\text{a}}S}{(4{,}45 - 1)g} = 3 \cdot 10^3 \text{ г}.$$

Используя уравнение состояния для идеального газа (это можно делать ввиду того, что условия несильно отличаются от нормальных), выражение для частоты колебаний можно переписать в виде

$$\omega_0^2 = \frac{\gamma P_0^2 S^2}{MNkT_0} = \frac{\gamma(Mg + P_{\text{a}}S)^2}{MNkT_0},$$

откуда для числа молей газа

$$r = \frac{N}{N_{\text{A}}} = \frac{\gamma(Mg + P_{\text{a}}S)^2}{MkN_{\text{A}}T_0(2\pi\nu_0)^2} = 2{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

Найдем температуру газа сразу после откачки атмосферы. Уравнение адиабаты для идеального газа можно переписать в виде $T_1/T_0 = (P_1/P_0)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, откуда, используя выражение для отношения квадратов частот, получим:

$$T_1 = T_0\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_0\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}} = 195 \text{ К}.$$

Видно, что вращательные степени свободы остаются еще возбужденными, и наше рассмотрение вполне корректно. При уменьшении начальной температуры до 40 К необходимо учитывать замораживание вращательных степеней свободы. В этом случае показатель адиабаты становится равным

$$\gamma' = \frac{3/2 + 1}{3/2} = \frac{5}{3},$$

и исходная частота колебаний

$$\nu_0' = \nu_0\sqrt{\frac{\gamma' T_0}{\gamma T_0'}} = \nu_0\sqrt{\frac{300 \cdot 5/3}{40 \cdot 7/5}} = 3\nu_0 = 5{,}4 \text{ Гц}.$$

3B. `(Кубышкин)` Как показано в решении задачи 3А, сила, выталкивающая сверхпроводящий шарик радиусом r из поля H, равна

$$F = r^3\frac{H}{2}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right).$$

Работу этой силы приравниваем кинетической энергии шарика:

$$A = \int\limits_0^\infty F\,dx = \frac{r^3}{2}\int\limits_0^{H_0} H\,dH = \frac{r^3H_0^2}{4} = \frac{4}{3}\pi\rho r^3\frac{v^2}{2}.$$

Отсюда имеем ответ

$$v = H_0\sqrt{\frac{3}{8\pi\rho}} \approx 340 \text{ м/с}.$$

Указание: Ставить полный балл за более грубую оценку, не учитывающую работу источника питания соленоида на создание дополнительного магнитного поля вне сверхпроводящего шарика вблизи него. Так, простое приравнивание плотностей энергии $\frac{\rho v^2}{2} = \frac{H_0^2}{8\pi}$ дает для скорости несколько заниженную, но правдоподобную (в условиях прочих приближений задачи) величину $v = H_0\sqrt{\frac{1}{4\pi\rho}} \approx 280$ м/с.

4B. `(Прут, С.Гуденко, Раевский)` Аналогично задаче 4А, энергетические соотношения имеют вид $E_1 = E_L + E_L - E_K = 2E_L - E_K$. По водородоподобной модели $E_L = -13{,}6(Z_{\text{eff}}^2/n^2)$. Для L-оболочки $n = 2$, и мы получаем, что $E_L = -245$ эВ. Поскольку $E_K = -I_K$, то $E_1 = 1600 - 490 = 1110$ эВ.

5B. `(Савров)` Число актов рассеяния в секунду dN/dt выражается формулой $\frac{dN}{dt} = \sigma_{e\nu} \cdot f \cdot N_e$, где $\sigma_{e\nu}$ — сечение рассеяния нейтрино на электронах (усредненное по энергии) и N_e — полное число электронов в детекторе. Таким образом, для сечения получаем оценку

$$\sigma_{e,\nu} = \frac{dN/dt}{fN_e} = \frac{Am_N}{fZM}\frac{dN}{dt} = 0{,}8 \cdot 10^{-45} \text{ см}^{-2}.$$

Обсуждение письменной работы 22 января в 8-45 в Главной физической аудитории