

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра общей физики

Ю.В. Юрьев

СВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ И ФОТОНЫ

Учебно-методическое пособие
по курсу Общая физика

МОСКВА
МФТИ
2010

УДК 537.5

Ю 85

Рецензент к.ф.-м.н. *А.В. Арсенин*

Ю.В. Юрьев

Световые волны и фотоны: учебно-методическое пособие. — М.: МФТИ, 2010. — 56 с.

В пособии рассматриваются основные положения, относящиеся к физике оптического излучения. Основная цель — дать общее представление о способах описания оптического излучения и обобщить сведения о световых волнах и фотонах, по возможности не выходя за рамки курса общей физики.

Пособие предназначено для студентов II–III курсов, но может быть полезным также и студентам старших курсов.

УДК 537.5

© Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2010

1. Классическое описание оптического излучения

1.1. Световые лучи

При описании оптического излучения используются различные представления. Наиболее простым является представление о световых лучах — линиях, вдоль которых происходит распространение световой энергии. В однородной линейной среде световые лучи прямолинейны и распространяются независимо. Излучение от источника света можно представить себе в виде набора пучков — объёмов, ограниченных световыми лучами, внутри которых происходит распространение световой энергии.

Рассмотрим энергетические величины, относящиеся к световым пучкам (в фотометрии эти величины умножаются на некоторый переводной коэффициент и относительную спектральную чувствительность глаза).

Световой поток Φ — световая энергия, проходящая в единицу времени через некоторую площадку.

Сила света I (вводится для характеристики точечных источников света, рис. 1.1):

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega}, \quad (1.1)$$

где $d\Phi$ — световой поток, испускаемый точечным источником внутри телесного угла $d\Omega$.

Освещённость E :

$$E = \frac{d\Phi_{\text{пад}}}{dS}, \quad (1.2)$$

где $d\Phi_{\text{пад}}$ — световой поток, падающий на элемент поверхности dS . Для точечного изотропного источника:

$$d\Phi_{\text{пад}} = I d\Omega = I \frac{dS \cos \alpha}{r^2}, \quad (1.3)$$

где r — расстояние от источника до элемента поверхности dS , α — угол между внешней нормалью к поверхности \mathbf{n} и направлением на источник (рис. 1.2).

Из (1.2) и (1.3) получаем

$$E = \frac{I \cos \alpha}{r^2}. \quad (1.4)$$

Светимость K (вводится для характеристики протяжённого источника света):

$$K = \frac{d\Phi_{\text{исп}}}{dS}, \quad (1.5)$$

где $d\Phi_{\text{исп}}$ — полный световой поток, испускаемый с элемента поверхности источника dS .

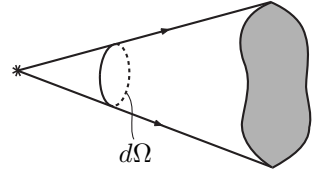


Рис. 1.1

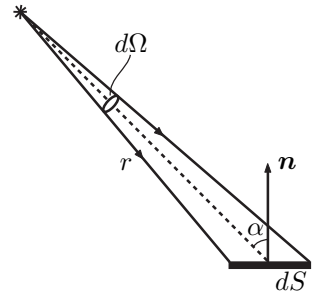


Рис. 1.2

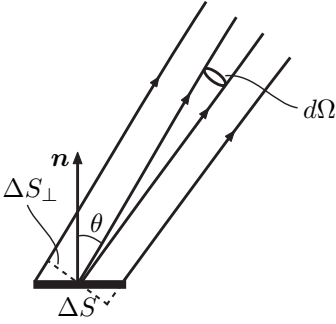


Рис. 1.3

Яркость B :

$$B = \frac{d\Phi_{\text{исп}}}{d\Omega \Delta S_{\perp}} = \frac{d\Phi_{\text{исп}}}{d\Omega \Delta S \cos \theta}, \quad (1.6)$$

где $d\Phi_{\text{исп}}$ — полный световой поток, испускаемый с элемента поверхности источника ΔS в телесный угол $d\Omega$, θ — угол между внешней нормалью к поверхности ΔS и направлением излучения, $\Delta S_{\perp} = \Delta S \cos \theta$ — видимая поверхность элемента поверхности источника ΔS (рис. 1.3).

В общем случае B зависит от направления излучения. Если $B = \text{const}$ для любого направления, то источник света называется ламбертовским. Для ламбертовского источника полный световой поток, испускаемый с поверхности ΔS :

$$\Delta\Phi_{\text{исп}} = B\Delta S \int \cos \theta d\Omega = B\Delta S \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = \pi B\Delta S,$$

поэтому светимость ламбертовского источника

$$K = \frac{\Delta\Phi_{\text{исп}}}{\Delta S} = \pi B. \quad (1.7)$$

1.2. Световые волны в вакууме

Многие оптические явления, такие как интерференция, дифракция, нельзя объяснить в рамках представлений о световых лучах. Здесь необходимо рассматривать оптическое излучение в виде электромагнитных волн (световых волн).

Под оптическим излучением понимают ультрафиолетовое излучение ($\lambda = 0,01 - 0,4$ мкм), видимое излучение ($\lambda = 0,4 - 0,8$ мкм) и инфракрасное излучение ($\lambda = 0,8 - 100$ мкм).

Световые волны в вакууме описываются следующей системой уравнений Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1.8)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (1.9)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad (1.10)$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0, \quad (1.11)$$

где \mathbf{E} , \mathbf{H} — векторы напряжённости электрического и магнитного полей, c — скорость света в вакууме. Из уравнений (1.8) и (1.9) получаем

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Используя формулу векторного анализа

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$$

и уравнение (1.10), из последнего соотношения получаем волновое уравнение для вектора \mathbf{E} :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.12)$$

Из уравнений (1.8), (1.9) и (1.11) аналогично можно получить волновое уравнение для вектора \mathbf{H} :

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.13)$$

Зная векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} , можно определить плотность энергии светового излучения (световую энергию в единице объёма):

$$\rho = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}, \quad (1.14)$$

а также вектор Пойнтинга:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (1.15)$$

Вектор Пойнтинга направлен в сторону распространения световой энергии, а его модуль равен световой энергии, проходящей в единицу времени через единичную площадку в перпендикулярном к ней направлении.

Для нахождения электромагнитного поля надо проинтегрировать уравнения Максвелла (1.8) — (1.11), что во многих практических случаях связано со значительными математическими трудностями. Для облегчения расчёта полей \mathbf{E} и \mathbf{H} вводят векторный \mathbf{A} и скалярный φ потенциалы. При этом

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (1.16)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.17)$$

Потенциалы \mathbf{A} и φ определены неоднозначно, а с точностью до калибровочного преобразования:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \nabla f(\mathbf{r}, t), \quad (1.18)$$

$$\varphi = \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.19)$$

где $f(\mathbf{r}, t)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция времени и координат. Подставляя выражения (1.16) и (1.17) в уравнения (1.9) и (1.10), получим

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \nabla \left(\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right), \quad (1.20)$$

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (1.21)$$

Неоднозначность выбора потенциалов \mathbf{A} и φ позволяет наложить на них дополнительные условия, упрощающие решение задачи в каждом конкретном случае.

В калибровке Лоренца потенциалы \mathbf{A} и φ выбирают исходя из условия: $\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. При этом уравнения (1.20) и (1.21) становятся независимыми и имеют вид волновых уравнений:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.22)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.23)$$

В кулоновской калибровке векторный потенциал \mathbf{A} выбирают из условия: $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. В этом случае из (1.21) следует, что $\nabla^2 \varphi = 0$, и для случая поля в вакууме можно положить $\varphi = 0$. Тогда уравнение (1.20) принимает вид волнового уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.24)$$

Найдя \mathbf{A} из уравнения (1.24), можно найти поля \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.25)$$

1.3. Световые волны в среде

Если световая волна распространяется в среде, то необходимо учитывать взаимодействие излучения с электрическими зарядами среды. Для простейшего случая однородной изотропной непроводящей среды без дисперсии световые волны описываются следующей системой уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.26)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.27)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (1.28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.29)$$

где \mathbf{D} — вектор электрической индукции, \mathbf{B} — вектор магнитной индукции. К уравнениям Максвелла (1.26) — (1.29) необходимо добавить ещё материальные уравнения, которые для данного простейшего типа среды имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (1.30)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.31)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость, μ — магнитная проницаемость. В общем случае ε и μ могут зависеть от амплитуды, частоты и поляризации, а также

от направления распространения электромагнитной волны. Здесь необходимо напомнить, что физический смысл имеют векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} (они характеризуют силовое воздействие полей на пробный заряд), а поля \mathbf{D} и \mathbf{H} являются вспомогательными. Из уравнений (1.26) и (1.27) с учётом (1.30) и (1.31) получаем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = -\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2},$$

или

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.32)$$

Аналогичное волновое уравнение получается для вектора \mathbf{H} :

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.33)$$

Из (1.32), (1.33) следует, что фазовая скорость света в однородной изотропной непроводящей среде без дисперсии $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Плотность энергии светового излучения определяется выражением

$$\rho = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}, \quad (1.34)$$

а вектор Пойнтинга определяется выражением (1.15).

В среде векторный и скалярный потенциалы определяются выражениями

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad (1.35)$$

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (1.36)$$

1.4. Волновая и геометрическая оптика

Если амплитуда и направление распространения волны практически не меняются на расстояниях порядка длины волны, то в каждом малом участке пространства световую волну можно рассматривать как плоскую. В этом случае можно ввести понятие волновой поверхности (волнового фронта) — поверхности, на которой фаза волны в данный момент одинакова.

Для монохроматической волны определяют фазовую скорость \mathbf{v} — скорость распространения поверхности постоянной фазы (волновой поверхности). При этом

$$\mathbf{v} = \frac{\omega}{k} \mathbf{n}, \quad (1.37)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к волновой поверхности, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина световой волны в среде, ω — круговая частота.

Под групповой скоростью \mathbf{u} понимают скорость распространения волнового пакета, составленного из монохроматических волн. Групповая скорость совпадает со скоростью переноса световой энергии и равна

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}, \quad (1.38)$$

где $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ — волновой вектор. (Под производной $\partial\varphi/\partial\mathbf{l}$ скалярной функции φ по вектору \mathbf{l} понимается вектор \mathbf{b} с компонентами $b_i = \partial\varphi/\partial l_i$.) Направление \mathbf{u} совпадает с направлением вектора Пойнтинга \mathbf{S} . В изотропных средах скорости \mathbf{v} и \mathbf{u} сонаправлены, в анизотропных же средах эти векторы в общем случае составляют между собой некоторый угол.

Геометрическая оптика представляет собой предельный случай волновой оптики, соответствующий малым длинам волн. Иногда говорят, что волновая оптика переходит в геометрическую при $\lambda \rightarrow 0$. При этом световым лучам будут соответствовать линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением групповой скорости \mathbf{u} .

2. Световые волны

2.1. Плоская волна

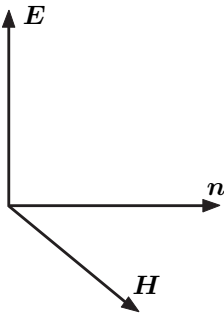


Рис. 2.1

В случае плоской волны, распространяющейся вдоль оси z в однородной изотропной непроводящей среде без дисперсии, волновые уравнения (1.32) и (1.33) принимают вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(z, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}(z, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (2.2)$$

При этом справедливо соотношение

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad (2.3)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к волновой поверхности. Из (2.3) следует взаимная перпендикулярность векторов \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{n} (рис. 2.1), а также связь между модулями векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) и (2.4) в (1.34) и (1.15), получаем выражения для плотности энергии светового излучения и вектора Пойнтинга:

$$\rho = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{E} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \frac{cE^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \mathbf{n} = \rho \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \mathbf{n}. \quad (2.6)$$

2.2. Плоская монохроматическая волна

Уравнения (2.1) и (2.2) допускают решения в виде плоских монохроматических волн:

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re} \left[\hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(\pm kz - \omega t)} \right], \quad (2.7)$$

где $\hat{\mathbf{E}}_0$ — комплексный вектор, а знаки «+» и «−» соответствуют распространению волны в положительном и отрицательном направлениях оси z . (Под комплексным вектором $\hat{\mathbf{C}}$ понимается выражение: $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{A} + i\mathbf{B}$, где \mathbf{A} и \mathbf{B} — обычные векторы. При этом $\text{Re}[\hat{\mathbf{C}}] = \mathbf{A}$, $\text{Im}[\hat{\mathbf{C}}] = \mathbf{B}$.)

Для эффектов, зависящих линейно от напряжённости поля, действительные и мнимые части комплексных векторов являются независимыми, поэтому в этом случае удобно проводить промежуточные вычисления, представляя монохроматическую волну (2.7) в комплексном виде:

$$\hat{\mathbf{E}}(z, t) = \hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(\pm kz - \omega t)}, \quad (2.8)$$

а в окончательном результате брать действительную часть. Подставляя (2.8) в (2.1), получим выражение для волнового числа и волнового вектора:

$$k = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\omega}{c}, \quad \mathbf{k} = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\omega}{c} \mathbf{n}. \quad (2.9)$$

2.3. Интенсивность света

Любой приёмник света (глаз, фотоприёмник) может регистрировать световую энергию, усреднённую за время $T \gg 1/\omega$, где $\omega \sim 10^{15} \text{ с}^{-1}$ — круговая частота света в оптическом диапазоне, а T — время, характеризующее инерционность приёмника. Поэтому интенсивность света определяют так, чтобы она была пропорциональна модулю вектора Пойнтинга, усреднённого за время T .

Интенсивность света можно определить следующим выражением:

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E}^2(t) dt = \overline{\mathbf{E}^2}. \quad (2.10)$$

Подставляя в (2.10) выражение для \mathbf{E} в виде (2.7), получим

$$I = |\hat{\mathbf{E}}_0|^2 \langle \cos^2(\pm kz - \omega t + \varphi) \rangle = \frac{1}{2} |\hat{\mathbf{E}}_0|^2. \quad (2.11)$$

Если для поля \mathbf{E} использовать комплексное представление (2.8), то интенсивность света удобно определить выражением

$$I = \langle \hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{E}}^* \rangle, \quad (2.12)$$

где знак «*» означает комплексное сопряжение. Подставляя (2.8) в (2.12), получим

$$I = \hat{\mathbf{E}}_0 \hat{\mathbf{E}}_0^* = |\hat{\mathbf{E}}_0|^2. \quad (2.13)$$

Видно, что в обоих случаях получается один и тот же результат (с точностью до множителя 1/2), однако преимущество комплексной формы записи (2.8) и (2.12) в том, что в этом случае расчёт интенсивности значительно упрощается.

2.4. Спектральное разложение

Пусть $E(t)$ — произвольная компонента вектора $\mathbf{E}(t)$. Тогда $E(t)$ можно разложить в интеграл Фурье:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.14)$$

где спектральная функция $E(\omega)$ определяется выражением

$$E(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.15)$$

Так как $E(t)$ — вещественная функция, то из (2.15) следует

$$E(-\omega) = E^*(\omega). \quad (2.16)$$

Выразим интенсивность света через спектральную функцию. Так как

$$I = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E^2(t) dt$$

и $T \gg 1/\omega$, то можно использовать бесконечные пределы интегрирования. Тогда, используя (2.14) — (2.16), получим

$$\begin{aligned} I &\sim \int_{-\infty}^{+\infty} E^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \right] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{-i\omega t} dt \right] d\omega = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) E^*(\omega) d\omega = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} |E(\omega)|^2 d\omega = 4\pi \int_0^{+\infty} |E(\omega)|^2 d\omega. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Таким образом, интенсивность света пропорциональна интегралу от квадрата модуля спектральной функции $E(\omega)$.

2.5. Поляризация световой волны

Говоря о том, что свет является поляризованным, имеют в виду то, что направления колебаний вектора \mathbf{E} световой волны имеют некоторую упорядоченность.

Запишем выражение (2.7) для поля плоской световой волны, распространяющейся вдоль оси z :

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[\hat{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)} \right]. \quad (2.18)$$

Если амплитудный вектор $\hat{\mathbf{E}}_0$ является вещественным вектором, умноженным на $e^{i\varphi}$, то колебания вектора \mathbf{E} происходят все время в одной и той же плоскости (этот случай соответствует линейно-поляризованной световой волне). Покажем, что если вектор $\hat{\mathbf{E}}_0$ комплексный, то конец вектора \mathbf{E} описывает эллипс в плоскости, перпендикулярной к волновому вектору \mathbf{k} (этот случай соответствует эллиптически-поляризованной световой волне).

Пусть

$$\hat{\mathbf{E}}_0^2 = |\hat{\mathbf{E}}_0|^2 e^{i2\varphi_0}, \quad (2.19)$$

где $2\varphi_0$ — аргумент комплексного числа $\hat{\mathbf{E}}_0^2$. Если представить $\hat{\mathbf{E}}_0$ в виде

$$\hat{\mathbf{E}}_0 = \hat{\xi} e^{i\varphi_0}, \quad (2.20)$$

где $\hat{\xi}$ — комплексный вектор, то из (2.19) и (2.20) получим

$$\hat{\xi}^2 = \hat{\mathbf{E}}_0^2 e^{-i2\varphi_0} = |\hat{\mathbf{E}}_0|^2. \quad (2.21)$$

Представим вектор $\hat{\xi}$ в виде суммы: $\hat{\xi} = \xi_1 + i\xi_2$. Из вещественности $\hat{\xi}^2$ получаем, что ξ_1 и ξ_2 взаимно перпендикулярны, а из поперечности световой волны следует, что ξ_1 и ξ_2 перпендикулярны волновому вектору \mathbf{k} . Подставляя ξ_1 (2.20) в (2.18), получим

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[(\xi_1 + i\xi_2) e^{i(kz - \omega t + \varphi_0)} \right]. \quad (2.22)$$

Направим ξ_1 вдоль оси x , а ξ_2 вдоль оси y (рис. 2.2), тогда

$$E_x = \xi_1 \cos(kz - \omega t + \varphi_0), \quad (2.23)$$

$$E_y = -\xi_2 \sin(kz - \omega t + \varphi_0). \quad (2.24)$$

Из (2.23) и (2.24) получаем

$$\left(\frac{E_x}{\xi_1} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{\xi_2} \right)^2 = 1, \quad (2.25)$$

т.е. конец вектора \mathbf{E} в плоскости xy описывает эллипс, определяемый уравнением (2.25).

Различают правую и левую эллиптическую поляризацию. Если мы смотрим навстречу волне и при этом вектор \mathbf{E} вращается по часовой стрелке, то поляризация называется правой, в противном случае — левой. Эллиптически поляризованную волну можно рассматривать как суперпозицию линейно поляризованных волн (2.23) и (2.24). Если $\xi_1 = \pm \xi_2$, то эллипс вырождается в окружность

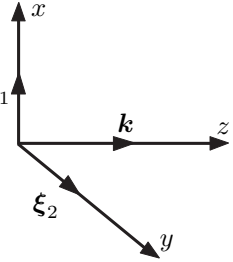


Рис. 2.2

(круговая поляризация). Если $\xi_1 = 0$ или $\xi_2 = 0$, то эллипс вырождается в отрезок прямой линии (линейная поляризация).

Любую плоскую монохроматическую волну можно представить либо как суперпозицию двух линейно поляризованных волн с взаимноперпендикулярными поляризациями, либо как суперпозицию двух волн с круговой поляризацией (правой и левой). Каждую из этих двух составляющих волн, наряду с волновым вектором \mathbf{k} можно характеризовать индексом поляризации α , принимающим два значения ($\alpha = 1, 2$), соответствующим двум независимым поляризациям: правой и левой (для круговой поляризации) либо вдоль двух взаимноперпендикулярных осей (для линейной поляризации).

Как для монохроматических, так и для немонахроматических световых волн вводится степень поляризации:

$$\nu = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (2.26)$$

где I_{\max} и I_{\min} — максимальная и минимальная интенсивность волны, прошедшей через поляризатор. Для линейно поляризованного света $\nu = 1$. Для неполяризованного света $\nu = 0$. Для эллиптически поляризованного света степень поляризации не вводится.

3. Когерентность световых волн

3.1. Понятие когерентности

Пусть в некоторой точке пространства \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 — напряжённости электрического поля двух световых волн. Тогда интенсивность света в данной точке

$$I = \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 \rangle = I_1 + I_2 + 2 \langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle, \quad (3.1)$$

где $I_1 = \langle \mathbf{E}_1^2 \rangle$ — интенсивность 1-й волны в отсутствие 2-й, $I_2 = \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle$ — интенсивность 2-й волны в отсутствие 1-й. Если $\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle \neq 0$, то $I \neq I_1 + I_2$; в этом случае говорят о когерентности 1-й и 2-й волн. Если $\langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle = 0$, то $I = I_1 + I_2$; в этом случае волны 1 и 2 некогерентны.

Понятие когерентности соответствует понятиям «согласование», «корреляция». В общем случае под когерентностью в классической оптике понимают корреляцию какой-либо характеристики поля световой волны (например, фазы), в разных точках пространства и в разные моменты времени.

В области наложения когерентных световых волн происходит перераспределение интенсивности света — интерференция.

В качестве примера рассмотрим две плоские монохроматические волны с частотой ω , имеющие одинаковую линейную поляризацию:

$$E_1 = a_1 \cos(\varphi_1 - \omega t), \quad (3.2)$$

$$E_2 = a_2 \cos(\varphi_2 - \omega t). \quad (3.3)$$

В данном случае интенсивность равна

$$I = \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2 \langle E_1 E_2 \rangle = I_1 + I_2 + 2 \langle E_1 E_2 \rangle. \quad (3.4)$$

Преобразуем последнее слагаемое в (3.4):

$$\begin{aligned} 2 \langle E_1 E_2 \rangle &= 2a_1 a_2 \langle \cos(\varphi_1 - \omega t) \cos(\varphi_2 - \omega t) \rangle = \\ &= 2\sqrt{2I_1} \sqrt{2I_2} \frac{1}{2} [\langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle + \langle \cos(\varphi_1 + \varphi_2 - 2\omega t) \rangle] = \\ &= 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Подставляя (3.5) в (3.4), получаем

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle. \quad (3.6)$$

Полная когерентность световых волн соответствует случаю

$$\langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle = \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \text{const.}$$

Если $\langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle = 0$, то волны 1 и 2 некогерентны. Во всех остальных случаях говорят о частичной когерентности световых волн.

Реальные световые волны можно представить в виде суперпозиции плоских монохроматических волн, каждая из которых определяется волновым вектором \mathbf{k} и индексом поляризации α (см. п. 2.5). При такой суперпозиции может возникнуть расстройка поляризации, частоты или направления распространения волны. Для количественного описания степени расстройки используют понятие степени поляризации (2.26) и функции взаимной когерентности (п. 3.2).

3.2. Функция взаимной когерентности

Пусть перед некоторым источником света A расположен экран с малыми отверстиями B_1 и B_2 (рис. 3.1). Рассмотрим вопрос о взаимной когерентности световых колебаний в точках B_1 и B_2 . Для этого будем рассматривать световое колебание в точке B второго экрана. Для простоты будем рассматривать линейно-поляризованный свет, что позволяет работать с одной компонентой напряжённости поля. Введём следующие обозначения для напряжённости электрического поля: E_1 в точке B_1 , E_2 в точке B_2 , E в точке B . Поле в точке B в момент времени t равно

$$E(t) = \alpha_1 E_1(t - \tau_1) + \alpha_2 E_2(t - \tau_2), \quad (3.7)$$

где $\tau_1 = |B_1 B|/c$, $\tau_2 = |B_2 B|/c$ — времена, за которые волна проходит расстояния от точек B_1 и B_2 до точки B ; α_1 и α_2 — коэффициенты, учитывающие уменьшение амплитуды волн из-за сферической расходимости. В (3.7) под E_1 , E_2 и E

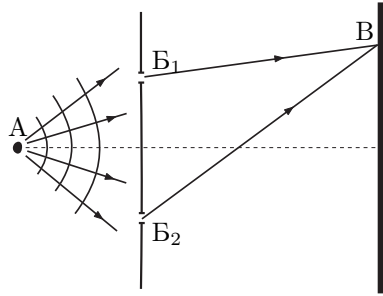


Рис. 3.1

мы понимаем комплексные величины (см. (2.8)), при этом знак « \wedge » писать не будем, чтобы не загромождать формулы.

Подставляя (3.7) в (2.12), запишем интенсивность света в точке В:

$$I = \langle E(t)E^*(t) \rangle = \alpha_1^2 \langle E_1(t - \tau_1)E_1^*(t - \tau_1) \rangle + \alpha_2^2 \langle E_2(t - \tau_2)E_2^*(t - \tau_2) \rangle + \alpha_1\alpha_2 \langle E_1(t - \tau_1)E_2^*(t - \tau_2) \rangle + \alpha_1\alpha_2 \langle E_1^*(t - \tau_1)E_2(t - \tau_2) \rangle = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \operatorname{Re} \left[\frac{\langle E_1(t + \tau)E_2^*(t) \rangle}{\sqrt{\langle E_1(t)E_1^*(t) \rangle} \sqrt{\langle E_2(t)E_2^*(t) \rangle}} \right], \quad (3.8)$$

где $I_1 = \alpha_1^2 \langle E_1(t)E_1^*(t) \rangle$ — интенсивность волны в точке В, если открыта одна щель B_1 ; $I_2 = \alpha_2^2 \langle E_2(t)E_2^*(t) \rangle$ — интенсивность волны в точке В, если открыта одна щель B_2 ; $\tau = \tau_2 - \tau_1$. При написании последнего равенства в (3.8) было сделано смещение начала отсчёта времени (это не влияет на результат усреднения).

Введём функцию взаимной когерентности световых волн:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\langle E_1(t + \tau)E_2^*(t) \rangle}{\sqrt{\langle E_1(t)E_1^*(t) \rangle} \sqrt{\langle E_2(t)E_2^*(t) \rangle}}. \quad (3.9)$$

С учётом (3.9) выражение (3.8) примет вид

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2} \operatorname{Re}[\gamma_{12}(\tau)]. \quad (3.10)$$

Из определения (3.9) следует, что $0 \leq |\gamma_{12}(\tau)| \leq 1$. Случай $|\gamma_{12}(\tau)| = 0$ соответствует отсутствию интерференции. Если $|\gamma_{12}(\tau)| = 1$, то световые волны полностью когерентны. Случай $0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1$ относится к частичной когерентности.

3.3. Функция взаимной когерентности и видность интерференционных полос

Рассмотрим вблизи некоторой точки В на втором экране (рис. 3.1) соседние светлую и темную интерференционные полосы. Пусть I_{\max} — интенсивность в центре светлой полосы, а I_{\min} — в центре тёмной полосы. Видностью интерференционных полос вблизи выбранной точки экрана называется величина

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}. \quad (3.11)$$

Пусть

$$\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)|e^{i\varphi_{12}}. \quad (3.12)$$

Подставим (3.12) в (3.10):

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}|\gamma_{12}(\tau)| \cos \varphi_{12}. \quad (3.13)$$

Из (3.13) получаем

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}|\gamma_{12}(\tau)|, \quad (3.14)$$

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1I_2}|\gamma_{12}(\tau)|. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.14) и (3.15) в (3.11), получим

$$|\gamma_{12}(\tau)| = \frac{V}{2} \left(\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} + \sqrt{\frac{I_2}{I_1}} \right). \quad (3.16)$$

Таким образом, если для данной точки экрана измерить видность интерференционных полос V , то можно определить модуль соответствующей функции взаимной когерентности $|\gamma_{12}(\tau)|$.

3.4. Временная когерентность

Пусть перед источником света А расположен экран с одним малым отверстием Б (рис. 3.2). Обеспечим существование двух разных волн от точки Б до точки В, например с помощью дополнительного зеркала. Данный случай соответствует совмещённым отверстиям B_1 и B_2 на рис. 3.1, поэтому вместо общей функции $\gamma_{12}(\tau)$, определяемой выражением (3.9), теперь мы будем иметь функцию

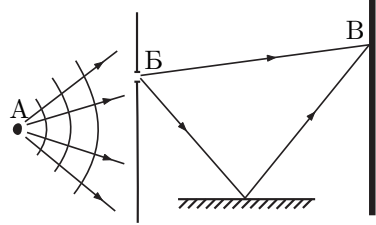


Рис. 3.2

$$\gamma_{11}(\tau) = \frac{\langle E_1(t + \tau)E_1^*(t) \rangle}{\langle E_1(t)E_1^*(t) \rangle}, \quad (3.17)$$

которая называется функцией временной когерентности. Функция $\gamma_{11}(\tau)$ описывает корреляцию световых колебаний в одной и той же точке пространства (точке В) в разные моменты времени, разделенные промежутком τ . Можно ввести время когерентности $\tau_{\text{ког}}$, которое определяется из условия

$$\gamma_{11}(\tau_{\text{ког}}) = \frac{1}{2}. \quad (3.18)$$

При рассмотрении временной когерентности удобно пользоваться точечным источником света и представлением о волновых цугах. При этом необходимо помнить, что волновой цуг — всего лишь удобная модель, позволяющая во многих случаях упростить расчёт. В этой модели излучение представляет собой последовательность синусоидальных колебаний конечной длительности — цугов. При этом можно сказать, что время когерентности $\tau_{\text{ког}}$, определяемое из (3.18), — это характерное время существенного изменения амплитуды и фазы световой волны.

Как уже было отмечено выше (п. 2.3), любой фотоприёмник регистрирует интенсивность света, усреднённую за время T , которое называется постоянной времени фотоприёмника. Для человеческого глаза $T \sim 0,1$ с, для фотоэлементов $T \sim 10^{-6} \div 10^{-8}$ с. Если $T \lesssim \tau_{\text{ког}}$, то фотоприёмник может отслеживать изменения интенсивности света из-за конечности отдельных цугов. Если $T \gg \tau_{\text{ког}}$ (это реализуется в большинстве случаев), то фотоприёмник регистрирует среднюю интенсивность.

Для оценочных расчётов можно считать, что максимальная разность хода двух волн, при которой они могут интерферировать, равна

$$l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}. \quad (3.19)$$

Длина $l_{\text{ког}}$ равна длине пути и называется длиной когерентности.

3.5. Пространственная когерентность

Пусть перед источником света А расположен экран с малыми отверстиями B_1 и B_2 , причём расстояния от них до точки В второго экрана одинаковы (рис. 3.3). Теперь вместо общей функции $\gamma_{12}(\tau)$, определяемой (3.9), имеем функцию

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\langle E_1(t)E_2^*(t) \rangle}{\sqrt{\langle E_1(t)E_1^*(t) \rangle} \sqrt{\langle E_2(t)E_2^*(t) \rangle}}, \quad (3.20)$$

которая называется функцией пространственной когерентности. Функция $\gamma_{12}(0)$ описывает корреляцию световых колебаний в двух разных точках пространства (точках B_1 и B_2) в один и тот же момент времени.

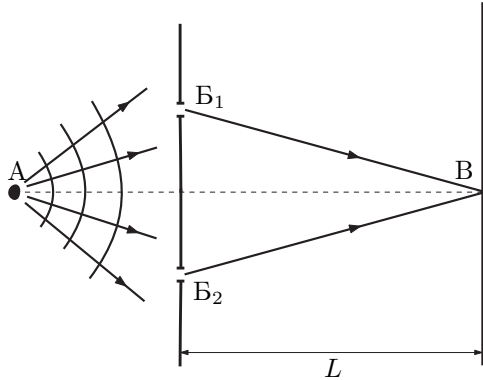


Рис. 3.3

Понятие пространственной когерентности распространяют также на протяжённый источник света. Пусть источник света А (рис. 3.3) является протяжённым, тогда его можно представить в виде совокупности большого числа независимых точечных источников. Каждый из этих точечных источников создаёт на втором экране свою картину интерференционных полос. Так как данные точечные источники являются независимыми, то результирующее распределение интенсивности в интерференционной картине есть сумма интенсивностей интерференционных картин от каждого малого участка источника А. Интерференционные полосы на экране будут наблюдаться, если максимальное смещение интерференционных картин, соответствующих крайним точкам источника А, не будет превышать ширину полосы Λ . Можно показать, что максимальное смещение интерференционных картин равно ψL , где ψ — угловой размер источника А, L — расстояние между экранами (рис. 3.3), поэтому

$$\psi L \lesssim \Lambda. \quad (3.21)$$

Так как $\Lambda \simeq \frac{\lambda}{d/L}$, где $d = |B_1 B_2|$, то условие (3.21) можно записать в виде

$$\psi \lesssim \frac{\lambda}{d} \quad \text{или} \quad d \lesssim \frac{\lambda}{\psi}. \quad (3.22)$$

Величину $\rho_{\text{ког}} = \lambda/\psi$ называют радиусом пространственной когерентности. Из (3.22) видно, что чем меньше угловой размер точечного источника ψ , тем легче получить на экране интерференционную картину, т.к. колебания в точках B_1 и B_2 оказываются коррелированными для больших расстояний между этими точками.

Расположенный вдоль распространения света прямой цилиндр с площадью основания $\rho_{\text{ког}}^2$ и высотой $l_{\text{ког}}$ называется объёмом когерентности. Он занимает в пространстве объём $V_{\text{ког}} = \rho_{\text{ког}}^2 l_{\text{ког}}$.

3.6. Связь временной когерентности со степенью монохроматичности излучения

Рассмотрим модель волнового пучка, которая описывается выражением

$$E(t) = \begin{cases} E_0 e^{-t/\tau} e^{-i\omega_0 t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (3.23)$$

где τ — характерная длительность пучка. Разложим $E(t)$ в интеграл Фурье:

$$E(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega. \quad (3.24)$$

Частотный спектр пучка $E(\omega)$ определяется выражением (2.15). Подставляя (3.23) в (2.15), получим

$$\begin{aligned} E(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} E(t) e^{i\omega t} dt = \frac{E_0}{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t/\tau} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt = \\ &= \frac{E_0}{2\pi} \cdot \left. \frac{e^{i(\omega - \omega_0)t - \frac{t}{\tau}}}{i(\omega - \omega_0) - \frac{1}{\tau}} \right|_0^{+\infty} = \frac{E_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\tau} - i(\omega - \omega_0)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Так как интенсивность света (см. (2.17))

$$I \sim \int_0^{+\infty} |E(\omega)|^2 d\omega,$$

то представляет интерес спектральная интенсивность $I(\omega) \sim |E(\omega)|^2$. Из (3.25) получаем

$$|E(\omega)|^2 = \frac{E_0^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 + (\omega - \omega_0)^2}. \quad (3.26)$$

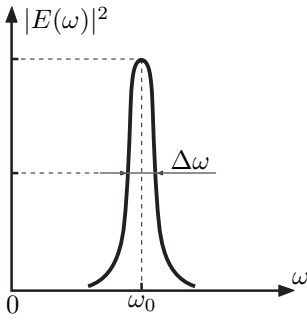


Рис. 3.4
Плоская монохроматическая волна

Вид функции $|E(\omega)|^2$ изображён на рис. 3.4. Пусть $\Delta\omega$ — ширина функции $|E(\omega)|^2$ на половине её высоты. Из (3.26) получаем:

$$\Delta\omega = \frac{2}{\tau}. \quad (3.27)$$

Величина $|E(\omega)|^2 d\omega$ показывает вклад в интенсивность волны от монохроматических компонент с частотами в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$. Параметр $\Delta\omega$ характеризует степень размытия частотного спектра волнового пучка.

В заключение отметим, что плоская монохроматическая волна

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} \right] \quad (3.28)$$

является идеализацией. Реальные световые волны являются суперпозициями волн (3.28), а их когерентные свойства оказываются более низкими (они характеризуются степенью пространственной и временной когерентности). При этом направленность волны связана со степенью пространственной когерентности, а степень монохроматичности — со степенью временной когерентности.

4. Переход от световых волн к фотонным коллективам

4.1. Поле световой волны в конечном объёме

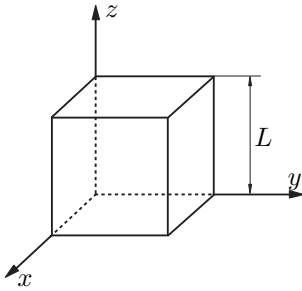


Рис. 4.1

Рассмотрим вопрос о квантовании электромагнитного поля. Чтобы избежать вопросов, связанных с поведением поля на бесконечности, рассмотрим излучение, заключённое внутри кубического объёма $V = L^3$ (рис. 4.1). Пусть для плоских волн внутри объёма V выполнены периодические граничные условия:

$$e^{ik_x L} = e^{ik_y L} = e^{ik_z L} = 1. \quad (4.1)$$

Граничные условия (4.1) означают, что колебания вектора $\mathbf{E} \sim e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ в противоположных точках куба, например $(0, y, z)$ и (L, y, z) , совпадают. Из (4.1) следует, что

$$k_x = \frac{2\pi n_1}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_2}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_3}{L} \quad (n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (4.2)$$

Если по трём взаимно перпендикулярным осям откладывать значения k_x , k_y и k_z , то получившееся k -пространство разбивается на отдельные ячейки объёмом

$$\Delta_0 = \left(\frac{2\pi}{L} \right)^3 = \frac{8\pi^3}{V}. \quad (4.3)$$

Каждой такой ячейке соответствуют две плоские монохроматические волны с различными поляризациями.

Пусть $g(\omega) d\omega$ — число волн в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$. Так как $\omega = ck$, то интервалу частот $(\omega, \omega + d\omega)$ соответствует в k -пространстве шаровой слой радиуса $k = \omega/c$ и толщиной $dk = d\omega/c$. Объём этого шарового слоя равен $4\pi k^2 dk$, поэтому с учётом (4.3) и двух возможных поляризаций, получим

$$g(\omega) d\omega = 2 \frac{4\pi k^2 dk}{\Delta_0} = \frac{8\pi k^2 dk}{8\pi^3/V} = \frac{V k^2 dk}{\pi^2} = \frac{V \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}. \quad (4.4)$$

4.2. Разложение поля на осцилляторы

Так как значения k_x , k_y и k_z имеют дискретный спектр значений (4.2), то векторный потенциал можно разложить по плоским волнам:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}} [\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}], \quad (4.5)$$

где $\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \sim e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}$, $\omega_{\mathbf{k}} = ck$. Тогда для кулоновской калибровки ($\text{div } \mathbf{A} = 0$, $\varphi = 0$) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}} [-i\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + i\omega_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}] = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} ik [\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Запишем с учётом (4.6) энергию электромагнитного поля в объёме V , усреднённую за период светового колебания:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4\pi} \int_V \langle E^2(\mathbf{r}, t) \rangle dV = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V \left\langle \sum_{\mathbf{k}} ik [\mathbf{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}] \cdot \sum_{\mathbf{k}'} ik' [\mathbf{a}_{\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} - \mathbf{a}_{\mathbf{k}'}^* e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}] \right\rangle dV. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Учитывая, что

$$\int_0^L e^{i \frac{2\pi n x}{L}} dx = \begin{cases} L, & \text{при } n = 0, \\ 0, & \text{при } n \neq 0, \end{cases}$$

выражение (4.7) принимает вид

$$W = -\frac{1}{4\pi} \int_V \sum_{\mathbf{k}} k^2 [-\mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* - \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^* \mathbf{a}_{\mathbf{k}}] dV = \frac{V}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \mathbf{a}_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^*. \quad (4.8)$$

Так как переход от классической механики к квантовой происходит путём замены канонических переменных соответствующими операторами, то перейдём

от «дискретных переменных» поля \mathbf{a}_k к «каноническим переменным»: обобщенным координатам \mathbf{Q}_k и обобщенным импульсам \mathbf{P}_k , которые удовлетворяют уравнениям Гамильтона:

$$\dot{\mathbf{P}}_k = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}_k}, \quad \dot{\mathbf{Q}}_k = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}_k}, \quad (4.9)$$

где H — полная энергия (функция Гамильтона) электромагнитного поля.

Переход от \mathbf{a}_k к \mathbf{P}_k и \mathbf{Q}_k производится при помощи соотношений

$$\mathbf{Q}_k = \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}(\mathbf{a}_k + \mathbf{a}_k^*), \quad (4.10)$$

$$\mathbf{P}_k = \dot{\mathbf{Q}}_k = -i\omega_k \sqrt{\frac{V}{4\pi c^2}}(\mathbf{a}_k - \mathbf{a}_k^*). \quad (4.11)$$

Из (4.10) и (4.11) получаем

$$\mathbf{a}_k = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{V}}(\omega_k \mathbf{Q}_k + i\mathbf{P}_k). \quad (4.12)$$

Подставляя (4.12) в (4.8), получаем

$$W = \frac{V}{2\pi} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \frac{1}{k^2} \frac{\pi}{V} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{\mathbf{k}}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 \mathbf{Q}_{\mathbf{k}}^2). \quad (4.13)$$

Так как в кулоновской калибровке $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, то из (4.5) получаем, что $k_x a_{kx} + k_y a_{ky} + k_z a_{kz} \equiv \mathbf{k} \mathbf{a}_k = 0$. С учётом (4.12) отсюда следует, что $\mathbf{k} \mathbf{P}_k = 0$ и $\mathbf{k} \mathbf{Q}_k = 0$. Векторы \mathbf{P}_k и \mathbf{Q}_k перпендикулярны волновому вектору \mathbf{k} и у них есть две независимые составляющие, соответствующие двум поляризациям, которые будем задавать индексом поляризации α ($\alpha = 1, 2$). Перепишем (4.13) в виде

$$W = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} W_{\mathbf{k}\alpha} = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{1}{2} (P_{\mathbf{k}\alpha}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}\alpha}^2). \quad (4.14)$$

Из (4.14) видно, что $W_{\mathbf{k}\alpha}$ соответствует энергии гармонического осциллятора $\mathbf{k}\alpha$ -типа ($P_{\mathbf{k}\alpha}^2/2$ соответствует кинетической, а $\omega_{\mathbf{k}}^2 Q_{\mathbf{k}\alpha}^2/2$ — потенциальной энергии). Таким образом, энергия электромагнитного поля есть сумма энергий гармонических осцилляторов. Каждому осциллятору соответствует плоская монохроматическая волна с волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией α .

4.3. Квантование поля

Как известно, энергия гармонического осциллятора принимает дискретный спектр значений. Это относится и к энергии $W_{\mathbf{k}\alpha}$ гармонического осциллятора $\mathbf{k}\alpha$ -типа в (4.14). Так как плоской монохроматической волне с волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией α мы сопоставили гармонический осциллятор с энергией $W_{\mathbf{k}\alpha}$, то этой же волне мы можем сопоставить $N_{\mathbf{k}\alpha}$ фотонов — квантов энергии электромагнитного поля. Нижний индекс $\mathbf{k}\alpha$ говорит о том, что имеются ввиду

фотоны $\mathbf{k}\alpha$ -типа, которые соответствуют плоской монохроматической волне с волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией α .

В нерелятивистской квантовой теории микрообъекты описываются с помощью волновой функции $\psi(\mathbf{r}, t)$, при этом $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV$ есть вероятность найти микрообъект в момент времени t в элементе объёма dV , определяемом радиусом-вектором \mathbf{r} . При этом сама волновая функция должна удовлетворять условию нормировки:

$$\int \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) dV = \int |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 dV = 1. \quad (4.15)$$

Каждой физической величине f ставится в соответствие оператор \hat{f} , который действует на волновую функцию $\psi(\mathbf{r}, t)$. При этом среднее значение величины f определяется выражением

$$\langle f \rangle = \int \psi^*(\mathbf{r}, t)\hat{f}\psi(\mathbf{r}, t) dV. \quad (4.16)$$

В дальнейшем удобными оказываются обозначения, предложенные Дираком. В этих обозначениях волновую функцию ψ_β системы, находящейся в состоянии β (β — набор квантовых чисел, полностью характеризующих состояние системы), обозначают $|\beta\rangle$ и называют кет-вектором, а функцию ψ_β^* обозначают $\langle\beta|$ и называют бра-вектором. (Названия «бра» и «кет» происходят от английского слова **bracket** — скобка $\langle \rangle$). При этом выражения (4.15) и (4.16) записывают в виде

$$\langle\beta|\beta\rangle = 1, \quad (4.17)$$

$$\langle f \rangle = \langle\beta|\hat{f}|\beta\rangle. \quad (4.18)$$

В релятивистской квантовой теории описывают изменение во времени числа микрообъектов в том или ином квантовом состоянии. При этом аргументы волновой функции — числа заполнения микрообъектами данных квантовых состояний. При квантовании электромагнитного поля используется именно этот метод, т.к. фотоны рождаются и уничтожаются, поэтому нельзя выделить какой-то фотон и следить за изменением его состояния со временем.

Пусть вектор $|N_{\mathbf{k}\alpha}\rangle$ описывает состояние поля излучения с числом фотонов $\mathbf{k}\alpha$ -типа равным $N_{\mathbf{k}\alpha}$ ($N_{\mathbf{k}\alpha} = 0, 1, 2, \dots$). Так как различные моды электромагнитного поля (т.е. волны с заданными значениями \mathbf{k} и α) независимы, то состояние поля излучения с числами фотонов $(\mathbf{k}\alpha)_1$ -типа равным $N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}$, $(\mathbf{k}\alpha)_2$ -типа равным $N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}$ и т.д., можно записать в виде

$$|N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots\rangle = |N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}\rangle |N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}\rangle \dots \quad (4.19)$$

Состояние (4.19) называется фоковским состоянием поля излучения. При этом мы будем предполагать, что состояния $|N_{(\mathbf{k}\alpha)_i}\rangle$ ортонормированы, т.е.

$$\langle N_{(\mathbf{k}\alpha)_i} | N_{(\mathbf{k}\alpha)_j} \rangle = \delta_{ij}. \quad (4.20)$$

Очень важно отметить, что многофотонное состояние $|N_{\mathbf{k}\alpha}\rangle$ нельзя представить в виде некоторой суперпозиции однофотонных состояний $|1_{\mathbf{k}\alpha}\rangle$, т.к. это означало бы возможность пронумеровать все фотоны в многофотонном состоянии, что противоречит принципу тождественности (неразличимости) частиц. Другими словами, можно сказать, что многофотонные состояния являются «цельными» и не обладают свойством аддитивности. Если за счёт излучения или поглощения число фотонов $\mathbf{k}\alpha$ -типа изменяется, то это означает, что состояние $|N_{\mathbf{k}\alpha}\rangle$ исчезает, а вместо него возникает другое состояние $|N'_{\mathbf{k}\alpha}\rangle$.

В общем случае электромагнитное поле представляет собой линейную суперпозицию базисных состояний (4.19). При этом квадрат модуля коэффициента при каждом слагаемом (4.19) даёт вероятность нахождения поля излучения в состоянии (4.19). Другими словами, в общем случае нельзя сказать, что в поле находится $N_{\mathbf{k}\alpha}$ фотонов $\mathbf{k}\alpha$ -типа, а можно говорить лишь о вероятности нахождения в поле $N_{\mathbf{k}\alpha}$ фотонов ($N_{\mathbf{k}\alpha} = 0, 1, 2, \dots$).

Переход от классической к квантовой теории осуществляется заменой обобщённых координат $Q_{\mathbf{k}\alpha}$ и обобщённых импульсов $P_{\mathbf{k}\alpha}$ операторами $\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}$, которые действуют на волновые функции $|N_{\mathbf{k}\alpha}\rangle$. По общему правилу квантовой механики, операторы $\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}$ должны удовлетворять следующим перестановочным соотношениям:

$$\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{Q}_{\mathbf{k}'\alpha'} - \hat{Q}_{\mathbf{k}'\alpha'}\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} = 0, \quad \hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{P}_{\mathbf{k}'\alpha'} - \hat{P}_{\mathbf{k}'\alpha'}\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha} = 0, \quad (4.21)$$

$$\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{P}_{\mathbf{k}'\alpha'} - \hat{P}_{\mathbf{k}'\alpha'}\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} = i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}. \quad (4.22)$$

Определим следующие операторы:

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} = \frac{\omega_{\mathbf{k}}\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} + i\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}}, \quad (4.23)$$

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ = \frac{\omega_{\mathbf{k}}\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} - i\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}}{\sqrt{2\hbar\omega_{\mathbf{k}}}}. \quad (4.24)$$

Из определений операторов $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+$, учитывая (4.22), получим следующее перестановочное соотношение:

$$\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ - \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} = 1. \quad (4.25)$$

Из (4.23) и (4.24) можно выразить операторы $\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}$:

$$\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}}(\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ + \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}), \quad (4.26)$$

$$\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2}}(\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ - \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}). \quad (4.27)$$

От энергии электромагнитного поля W , определяемой выражением (4.14), перейдём к оператору энергии (гамильтониану):

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \frac{1}{2}(\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}^2 + \omega_{\mathbf{k}}^2\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}^2). \quad (4.28)$$

Подставляя (4.26) и (4.27) в (4.28) и учитывая перестановочное соотношение (4.25), получим

$$\hat{H} = \sum_i \hat{H}_{(\mathbf{k}\alpha)_i} = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} (\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ + \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}) = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.29)$$

Волновое уравнение (уравнение Шредингера) для состояний (4.19) имеет вид

$$\hat{H} |N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots\rangle = W |N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots\rangle, \quad (4.30)$$

где W — энергия электромагнитного поля в состоянии

$$|N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots\rangle.$$

Выясним смысл операторов $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$. Так как каждый из операторов $\hat{H}_{(\mathbf{k}\alpha)_i}$ в (4.29) изменяет только число заполнения $N_{(\mathbf{k}\alpha)_i}$, то для упрощения записи запишем уравнение (4.30), соответствующее только одной моде электромагнитного поля (одному типу осциллятора), при этом индексы $\mathbf{k}\alpha$ опустим:

$$\hat{H} |N\rangle = W_N |N\rangle. \quad (4.31)$$

Подействуем на уравнение (4.31) оператором \hat{c} и используем выражение для \hat{H} из (4.29):

$$\hat{c}\hat{H} |N\rangle = \hat{c}\hbar\omega \left(\hat{c}^+ \hat{c} + \frac{1}{2} \right) |N\rangle = \hat{c}W_N |N\rangle. \quad (4.32)$$

Учитывая перестановочное соотношение (4.25), а также то, что $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{c}^+ \hat{c} + 1/2)$, из (4.32) получим

$$\hat{H}\hat{c} |N\rangle = (W_N - \hbar\omega) \hat{c} |N\rangle. \quad (4.33)$$

Из (4.33) следует, что $\hat{c} |N\rangle$ есть вектор состояния, соответствующего энергии $(W_N - \hbar\omega)$. Так как $\hbar\omega$ есть квант энергии электромагнитного поля на частоте ω , соответствующий энергии фотона, то

$$\hat{c} |N\rangle = C_N |N - 1\rangle. \quad (4.34)$$

Аналогично, действуя на уравнение (4.31) оператором \hat{c}^+ , получим

$$\hat{H}\hat{c}^+ |N\rangle = (W_N + \hbar\omega) \hat{c}^+ |N\rangle. \quad (4.35)$$

Из (4.35) следует, что $\hat{c}^+ |N\rangle$ есть вектор состояния, соответствующего энергии $(W_N + \hbar\omega)$, поэтому

$$\hat{c}^+ |N\rangle = D_N |N + 1\rangle. \quad (4.36)$$

Несложно показать, что для того, чтобы выполнялось перестановочное соотношение (4.25), коэффициенты C_N и D_N , без ограничения общности, можно выбрать действительными и равными $C_N = \sqrt{N}$ и $D_N = \sqrt{N + 1}$. Тогда соотношения (4.34) и (4.36) примут вид

$$\hat{c} |N\rangle = \sqrt{N} |N - 1\rangle, \quad \hat{c}^+ |N\rangle = \sqrt{N + 1} |N + 1\rangle. \quad (4.37)$$

Из (4.37) также следует, что

$$\hat{c}^+ \hat{c} |N\rangle = \hat{c}^+ \sqrt{N} |N-1\rangle = N |N\rangle, \quad (4.38)$$

поэтому оператор $\hat{c}^+ \hat{c}$ называется оператором числа фотонов.

Ещё раз отметим, что операторы $\hat{c}_{(\mathbf{k}\alpha)_i}^+$ и $\hat{c}_{(\mathbf{k}\alpha)_i}$ изменяют только «свои» числа заполнения $N_{(\mathbf{k}\alpha)_i}$, поэтому из (4.37) следует, что оператор $\hat{c}_{(\mathbf{k}\alpha)_i}^+$ описывает добавление одного фотона $(\mathbf{k}\alpha)_i$ -типа к электромагнитному полю (этот оператор называется оператором рождения фотона), а оператор $\hat{c}_{(\mathbf{k}\alpha)_i}$ описывает уничтожение одного фотона $(\mathbf{k}\alpha)_i$ -типа (этот оператор называется оператором уничтожения фотона).

Действуя оператором Гамильтона (4.29) на состояние

$$|N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots\rangle$$

и учитывая соотношение (4.38), получим

$$\begin{aligned} \hat{H} |N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots\rangle &= \sum_i \hat{H}_{(\mathbf{k}\alpha)_i} |N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots\rangle = \\ &= \sum_i \hbar\omega_i \left(\hat{c}_{(\mathbf{k}\alpha)_i}^+ \hat{c}_{(\mathbf{k}\alpha)_i} + \frac{1}{2} \right) |N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots\rangle = \\ &= \sum_i \hbar\omega_i \left(N_{(\mathbf{k}\alpha)_i} + \frac{1}{2} \right) |N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots\rangle = \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) |N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Сравнивая (4.30) и (4.39), получаем выражение для энергии электромагнитного поля в состоянии с определёнными числами фотонов $|N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots\rangle$:

$$W = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.40)$$

Следует отметить, что выбор численных множителей при переходе к переменным (4.10) и (4.11) определяется условием, что энергия W должна записываться в виде (4.40), соответствующем сумме энергий гармонических осцилляторов.

4.4. Выражения для операторов \hat{A} и \hat{E}

Запишем проекцию вектора $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ (4.12) на единичный вектор поляризации $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$):

$$a_{\mathbf{k}\alpha} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{V}} (\omega_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}\alpha} + iP_{\mathbf{k}\alpha}). \quad (4.41)$$

Выражение, комплексно сопряжённое выражению (4.41), имеет вид

$$a_{\mathbf{k}\alpha}^* = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{V}} (\omega_k Q_{\mathbf{k}\alpha} - iP_{\mathbf{k}\alpha}). \quad (4.42)$$

Теперь выражения (4.41) и (4.42) запишем в операторном виде:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{V}} (\omega_k \hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} + i\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}), \quad (4.43)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}^* = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{\pi}{V}} (\omega_k \hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} - i\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}). \quad (4.44)$$

Подставляя в (4.43) и (4.44) выражения для операторов $\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}$ из (4.26) и (4.27), получим

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}, \quad (4.45)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}^* = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+. \quad (4.46)$$

Теперь мы можем выразить оператор векторного потенциала $\hat{\mathbf{A}}$ через операторы $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+$ и $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$. Для этого запишем выражение (4.5) в операторном виде (с учётом двух поляризаций α для каждого вектора \mathbf{k}):

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} + \hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}^* e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} \right]. \quad (4.47)$$

В (4.47) мы учли, что $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}^* = \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}$, т.к. векторный потенциал разложен по плоским волнам с линейной поляризацией (см. п. 2.5). Подставляя в (4.47) выражения операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}^*$ из (4.45) и (4.46), получим

$$\hat{\mathbf{A}} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} + \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \right]. \quad (4.48)$$

Запишем теперь выражение для электрического поля (4.6) в операторном виде (также с учётом двух поляризаций α для каждого вектора \mathbf{k}):

$$\hat{\mathbf{E}} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} ik \left[\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} - \hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}^* e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} \right]. \quad (4.49)$$

Подставляя в (4.49) выражения операторов $\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}$ и $\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}^*$ из (4.45) и (4.46), получим

$$\hat{\mathbf{E}} = i \sum_{\mathbf{k},\alpha} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} \left[\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega_k t)} - \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ e^{i(\omega_k t - \mathbf{k}\mathbf{r})} \right]. \quad (4.50)$$

Следует отметить, что в предингерговском представлении, используемом в нерелятивистской квантовой теории, операторы физических величин не содержат явной зависимости от времени. В этом представлении временная зависимость учитывается в зависимости от времени волновой функции. В нашем же случае явная зависимость от времени перенесена с волновой функции на операторы (4.48) и (4.50). Такое представление называется гейзенберговским, и далее именно это представление мы будем использовать.

В качестве примера вычисления с использованием оператора \hat{E} найдём энергию электромагнитного поля в состоянии с определёнными числами фотонов $|N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots\rangle$. Используя общее выражение (4.18) и соотношение (4.50), получим

$$\begin{aligned} W &= \int_V \left\langle N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots \left| \frac{(\hat{E})^2}{4\pi} \right| N_{(\mathbf{k}\alpha)_1}, N_{(\mathbf{k}\alpha)_2}, \dots \right\rangle dV = \\ &= \int_V \frac{1}{4\pi} \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \left\langle N_{\mathbf{k}\alpha} \left| -\frac{2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{V} (-\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ - \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}) \right| N_{\mathbf{k}\alpha} \right\rangle dV = \\ &= \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} \langle N_{\mathbf{k}\alpha} | \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ + \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} | N_{\mathbf{k}\alpha} \rangle. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Здесь принято во внимание, что

$$\langle N_{\mathbf{k}\alpha} | \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} | N_{\mathbf{k}\alpha} \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle N_{\mathbf{k}\alpha} | \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ | N_{\mathbf{k}\alpha} \rangle = 0.$$

С учётом перестановочного соотношения (4.25) и формулы (4.38), выражение (4.51) примет вид

$$W = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2} \langle N_{\mathbf{k}\alpha} | 2\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} + 1 | N_{\mathbf{k}\alpha} \rangle = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right). \quad (4.52)$$

Выражение (4.52), как и следовало ожидать, совпадает с (4.40), однако теперь выражение для W является следствием более последовательного расчёта, основанного на полученных выражениях для операторов \hat{A} и \hat{E} .

4.5. Энергия нулевых колебаний

Состояние электромагнитного поля, в котором все числа $N_{(\mathbf{k}\alpha)_i} = 0$, называется вакуумным состоянием поля. В этом состоянии, согласно (4.52):

$$W_0 = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2}. \quad (4.53)$$

Сумма (4.53) называется энергией нулевых колебаний, а её значение равно бесконечности. Это одна из трудностей теории, которая до сих пор не была удовлетворительным образом разрешена. Однако для сравнения результатов теории

с экспериментом проблем не возникает, т.к. в большинстве экспериментов регистрируется величина, пропорциональная энергии возбуждения поля относительно нулевых колебаний:

$$W' = W - W_0 = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hbar \omega_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}\alpha}. \quad (4.54)$$

4.6. Условие квазиклассичности

Определим условие квазиклассического описания, т.е. условие, при котором возможно перейти от фотонного описания к световым волнам. Квантовое описание системы переходит в классическое при больших квантовых числах заполнения. Для электромагнитного поля в объёме V это означает, что числа $N_{\mathbf{k}\alpha} \gg 1$. Но если все числа $N_{\mathbf{k}\alpha} \gg 1$, то при суммировании по всем \mathbf{k} и α энергия электрического поля будет бесконечной, поэтому условие квазиклассичности надо уточнить. Рассмотрим классическое поле E в объёме V , усреднённое по промежутку времени Δt . Поле $E(t)$ можно представить в виде интеграла Фурье (2.14), но по положительным частотам:

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^0 E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega + \int_0^{+\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \\ &= \int_0^{+\infty} E(-\omega) e^{i\omega t} d\omega + \int_0^{+\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \int_0^{+\infty} [E^*(\omega) e^{i\omega t} + E(\omega) e^{-i\omega t}] d\omega. \end{aligned} \quad (4.55)$$

В (4.55) было учтено, что $E(-\omega) = E^*(\omega)$ (см. (2.16)). Из (4.55) видно, что в усреднённое поле

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} E(t) dt$$

заметный вклад будут давать частоты в интервале $0 \leq \omega \lesssim 1/\Delta t$, т.к. для частот $\Delta\omega > 1/\Delta t$ осциллирующие множители $e^{\pm i\omega t}$ при усреднении дадут величину, близкую к нулю. Поэтому для выполнения условия квазиклассичности поля $\langle E \rangle$ достаточно потребовать, чтобы числа $N_{\mathbf{k}\alpha}$ удовлетворяли условию $N_{\mathbf{k}\alpha} \gg 1$ для частот в интервале $0 \leq \omega \lesssim 1/\Delta t$. Из (4.4) число осцилляторов (плоских волн) в этом интервале по порядку величины равно

$$\frac{V\omega^3}{c^3} \sim \frac{V}{(c\Delta t)^3}. \quad (4.56)$$

Энергия электромагнитного поля по порядку величины равна $\langle E \rangle^2 V$. Разделив эту величину на число осцилляторов (4.56) и на некоторую среднюю энергию фотона ($\sim \hbar\omega$), найдём порядок величины чисел $N_{\mathbf{k}\alpha}$:

$$N_{\mathbf{k}\alpha} \sim \frac{\langle E \rangle^2 c^3}{\hbar\omega^4} \sim \frac{\langle E \rangle^2 (c\Delta t)^4}{\hbar c}.$$

Условие $N_{\mathbf{k}\alpha} \gg 1$ будет выполнено, если

$$\langle E \rangle^2 \gg \hbar\omega \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \quad \text{или} \quad \langle E \rangle^2 \gg \frac{\hbar c}{(c\Delta t)^4}. \quad (4.57)$$

Неравенства (4.57) определяют условие, при котором справедливо классическое рассмотрение поля, усреднённого по промежутку времени Δt . Для переменных полей интервал Δt не должен превышать периодов времени, в течение которых поле заметно изменяется (в частности периода колебаний). Из (4.57) видно, что достаточно слабые переменные поля не могут описываться классически. В случае же статических полей можно положить $\Delta t \rightarrow \infty$ и условие (4.57) выполняется автоматически. Поэтому статическое поле всегда классично.

Если рассматривать электромагнитное поле не в замкнутом объёме V , а в объёме распространяющейся электромагнитной волны с угловой расходимостью $\alpha \ll 1$, то число осцилляторов (4.56) надо умножить на величину, примерно равную величине телесного угла ($\sim \alpha^2$), поэтому условие квазиклассичности (4.57) перейдёт в более слабое условие:

$$\langle E \rangle^2 \gg \alpha^2 \hbar\omega \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \quad \text{или} \quad \langle E \rangle^2 \gg \alpha^2 \frac{\hbar c}{(c\Delta t)^4}. \quad (4.58)$$

В оптических интерферометрических экспериментах с пучками, имеющими малую угловую расходимость ($\alpha \ll 1$) условие (4.58) выполняется.

4.7. Фотон и его свойства

В общем случае фотон или однофотонное состояние электромагнитного поля можно определить как линейную суперпозицию однофотонных состояний $|1_{\mathbf{k}\alpha}\rangle$:

$$|\xi\rangle = \sum_{\mathbf{k},\alpha} b_{\mathbf{k}\alpha} |1_{\mathbf{k}\alpha}\rangle. \quad (4.59)$$

Состояние $|\xi\rangle$ должно удовлетворять условию нормировки, т.е.

$$\langle \xi | \xi \rangle = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \alpha, \alpha'} b_{\mathbf{k}'\alpha'}^* b_{\mathbf{k}\alpha} \langle 1_{\mathbf{k}'\alpha'} | 1_{\mathbf{k}\alpha} \rangle = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} b_{\mathbf{k}\alpha}^* b_{\mathbf{k}\alpha} = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} |b_{\mathbf{k}\alpha}|^2 = 1. \quad (4.60)$$

В (4.60) мы учли, что $\langle 1_{\mathbf{k}'\alpha'} | 1_{\mathbf{k}\alpha} \rangle = 1$ для $\mathbf{k}' = \mathbf{k}$ и $\alpha' = \alpha$, а во всех остальных случаях $\langle 1_{\mathbf{k}'\alpha'} | 1_{\mathbf{k}\alpha} \rangle = 0$. (Напомним, что т.к. мы рассматриваем электромагнитное поле в замкнутом достаточно большом объёме, то векторы \mathbf{k} имеют дискретный спектр.) В пользу того, что однофотонное состояние можно определить соотношением (4.59) можно сказать, что число фотонов в этом состоянии $N = 1$. Действительно, используя оператор числа фотонов $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$ в состоянии $\mathbf{k}\alpha$ (см. (4.38)), имеем

$$\sum_{\mathbf{k}, \alpha} \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} |\xi\rangle = \sum_{\mathbf{k}, \alpha} b_{\mathbf{k}\alpha} |1_{\mathbf{k}\alpha}\rangle = N |\xi\rangle,$$

где $N = 1$. Следует отметить, что если бы в (4.59) мы записали линейную суперпозицию многофотонных состояний $|N_{\mathbf{k}\alpha}\rangle$, то нам бы не удалось выполнить

одновременно условие нормировки (4.60) и условие того, что число фотонов в данном состоянии равно единице.

В общем же случае, как уже было отмечено выше, электромагнитное поле представляет собой линейную суперпозицию многофотонных фоковских состояний (4.19), т.е.

$$|\xi\rangle = \sum_{N(\mathbf{k}\alpha)_1, N(\mathbf{k}\alpha)_2, \dots} b_{N(\mathbf{k}\alpha)_1, N(\mathbf{k}\alpha)_2, \dots} |N(\mathbf{k}\alpha)_1, N(\mathbf{k}\alpha)_2, \dots\rangle. \quad (4.61)$$

При рассмотрении состояния поля мы выбрали базисные состояния поля (4.19), которые соответствуют разложению поля по плоским волнам с волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией α . Однако в зависимости от постановки той или иной конкретной задачи мы можем выбрать более удобные базисные состояния. Например, для волн, излучаемых атомами и атомными ядрами, удобнее выбирать базисные состояния поля в виде сферических волн. В этом случае однофотонные состояния будут характеризоваться не волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией α , а угловым моментом j и чётностью. Как известно, полный угловой момент частицы складывается из орбитального и спинового углового момента. Однако для фотона невозможно строго различить орбитальный и спиновый момент, поэтому имеет смысл говорить о полном угловом моменте фотона j , который может принимать значения $j = 1, 2, 3, \dots$ (Значение $j = 0$ для фотона не существует, что, как можно показать, следует из условия поперечности электромагнитной волны.) Напомним, что под полным угловым моментом j понимают максимальную проекцию углового момента на некоторое направление, выраженную в единицах \hbar . Чётность фотона связывают с поведением векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ при инверсии системы координат. Так как при инверсии системы координат: $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$, $\mathbf{A} \rightarrow -\mathbf{A}$ (\mathbf{A} — полярный вектор), то полагают, что чётность равна $+1$, если $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\mathbf{A}(-\mathbf{r})$, и чётность равна -1 , если $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(-\mathbf{r})$. Для описания однофотонных состояний в базисе, соответствующем сферическим волнам, используют следующие обозначения. Фотон с угловым моментом j и чётностью $(-1)^j$ называется электрическим 2^j -польным (или Ej -фотоном). Фотон с угловым моментом j и чётностью $(-1)^{j+1}$ называется магнитным 2^j -польным (или Mj -фотоном). Эта терминология связана с тем, что излучение Ej и Mj -фотонов определяется соответствующими электрическими и магнитными мультипольными моментами системы зарядов. Часто тип фотона обозначают единым символом, в котором число указывает значение j , а верхний индекс «+» или «-» соответствует чётности $+1$ или -1 . Таким образом, возможны следующие типы Ej -фотонов: 1^- (электрический дипольный), 2^+ (электрический квадрупольный), 3^- (электрический октупольный) и т.д. Возможные типы Mj -фотонов: 1^+ (магнитный дипольный), 2^- (магнитный квадрупольный), 3^+ (магнитный октупольный) и т.д.

Ej или Mj -фотон соответствуют сферической волне и не могут иметь определённое значение волнового вектора \mathbf{k} . С другой стороны, $\mathbf{k}\alpha$ -фотон не имеет

определённого значения j . Но фотон с определённым значением волнового вектора \mathbf{k} может иметь определённое значение проекции углового момента на направление \mathbf{k} ; эту проекцию называют спиральностью фотона λ . Спиральность фотона может принимать только два значения, которые равны по модулю и имеют противоположные знаки. При этом если $\lambda > 0$, то фотон называется правоспиральным, а если $\lambda < 0$, то левоспиральным. Следует отметить, что правоспиральным фотонам соответствует световая волна с левой круговой поляризацией, а левоспиральным фотонам — световая волна с правой круговой поляризацией. Для ясности сделаем следующее замечание. Пусть волна имеет правую круговую поляризацию, т.е. при наблюдении навстречу волне вращение вектора \mathbf{E} в фиксированной плоскости происходит по часовой стрелке. Тогда исходя из классических представлений и используя для среды модель Лоренца легко показать, что при поглощении такой волны электромагнитная волна передаёт среде момент импульса, направленный противоположно волновому вектору \mathbf{k} , т.е. в среде поглощаются левоспиральные фотоны.

Для световой волны с круговой поляризацией двум возможным значениям индекса поляризации α ($\alpha = 1, 2$) удобно сопоставить значения спиральности λ . Световой волне с линейной поляризацией соответствует фотон в суперпозиционном состоянии с положительной и отрицательной спиральностью:

$$|\xi\rangle = b_1|1_{\mathbf{k},+|\lambda}\rangle + b_2|1_{\mathbf{k},-|\lambda}\rangle, \quad (4.62)$$

причём $|b_1|^2 = |b_2|^2 = 1/2$. Свету с эллиптической поляризацией соответствуют фотоны (4.62), для которых $|b_1|^2 \neq |b_2|^2$. Если взять два различных однофотонных состояния (4.62) $|\xi_1\rangle$ и $|\xi_2\rangle$, которые соответствуют двум линейно поляризованным волнам с взаимно перпендикулярными поляризациями, то произвольное однофотонное состояние с данным \mathbf{k} можно представить также в виде суперпозиции состояний $|\xi_1\rangle$ и $|\xi_2\rangle$. Если рассматривать линейно поляризованные волны с поляризациями, соответствующими двум состояниям $|\xi_1\rangle$ и $|\xi_2\rangle$, то значениям индекса поляризации α можно сопоставить эти два состояния.

Фотон с определённым значением волнового вектора \mathbf{k} обладает импульсом $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$. Так как $|\mathbf{k}| = \omega/c$, то энергию $\mathbf{k}\alpha$ -фотона можно представить как $E = \hbar\omega = \hbar(\omega/c)c = pc$. Используя основное релятивистское тождество, отсюда находим, что масса фотона равна

$$m = \frac{1}{c^2} \sqrt{E^2 - p^2 c^2} = 0.$$

Следует отметить, что точно так же, как (4.59) определяет в общем случае однофотонное состояние в базисе однофотонных состояний $|1_{\mathbf{k}\alpha}\rangle$, можно сконструировать однофотонное состояние в базисе однофотонных состояний $|1^+\rangle$, $|1^-\rangle$, $|2^+\rangle$, $|2^-\rangle$, ... При этом в данном однофотонном состоянии фотон не имеет определённых значений j и чётности так же, как в однофотонном состоянии (4.59) фотон не имеет определённых значений \mathbf{k} и α .

Из всего вышесказанного становится понятно, что в общем случае нельзя говорить, что поле содержит столько-то фотонов данного типа, а можно говорить, что фотоны определённого типа поглощаются или излучаются. При этом тип излучаемых или поглощаемых фотонов определяется регистрирующим или излучающим прибором. В некоторых случаях можно говорить, что поле содержит столько-то фотонов данного типа, например, если поле содержит одну моду (к примеру $k\alpha$ -типа) или если число мод невелико.

При расчётах вероятностей излучения, например при переходах между атомными уровнями, очень часто используют фотонные состояния $k\alpha$ -типа, т.к. это облегчает расчёт. В промежуточных вычислениях говорят о вероятности излучения $k\alpha$ -фотонов, хотя излучаться может Ej или Mj -фотон. Дело в том, что волновой вектор \mathbf{k} при расчётах вероятностей переходов в атомах входит в матричный элемент перехода в виде множителя $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, где \mathbf{r} — радиус-вектор, проведённый из центра атома, причём $0 \leq |\mathbf{r}| \lesssim r_0$, где r_0 — радиус атома. При оптических переходах $kr_0 \ll 1$, поэтому

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 1 + i\mathbf{k}\mathbf{r} - \frac{1}{2}(\mathbf{k}\mathbf{r})^2 + \dots \quad (4.63)$$

Разложение (4.63) соответствует разложению $k\alpha$ -состояния по сферическим функциям. Первый член разложения соответствует сферической функции с $j = 1$, второй член — сферической функции с $j = 2$. При оптических переходах ограничиваются первым членом разложения (это называется дипольным приближением). Второй член разложения (соответствующий квадрупольному приближению) используют тогда, когда в дипольном приближении получается нулевая вероятность перехода.

Можно показать, что если λ — длина волны излучения, а a — размер излучающей системы, то отношение вероятностей излучения $E1$, $E2$ и $M1$ фотонов можно оценить как

$$\frac{w_{E1}}{w_{E2}} \sim \frac{w_{E1}}{w_{M1}} \sim \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2. \quad (4.64)$$

Для атомных спектров $\lambda \sim 0,5 \cdot 10^{-4}$ см, $a \sim 10^{-8}$ см, поэтому из (4.64) $w_{E1}/w_{E2} \sim w_{E1}/w_{M1} \sim 10^7$. Таким образом, вероятность излучения $E1$ фотонов в оптическом диапазоне на много порядков превышает вероятности излучения фотонов всех других типов. (Этот факт часто выражают не совсем корректным утверждением, говоря что «спин фотона равен единице».) Фотоны с $j > 1$ излучаются при переходах между энергетическими уровнями в ядрах атомов.

4.8. Дальнейшее обсуждение понятия фотона

Для начала проведём качественное рассмотрение следующего примера. Пусть плоская квазимонохроматическая волна падает на непрозрачный экран. В экране сделано отверстие с линейными размерами b (рис. 4.2). Средняя длина волны и ширина спектра излучения равны соответственно $\langle \lambda \rangle$ и $\Delta\lambda$. Рассмотрим

световое поле вблизи точки P на расстоянии от отверстия $L \gg b$. Излучение будем рассматривать как поток фотонов, каждый из которых обладает импульсом, модуль которого равен

$$p = \frac{2\pi\hbar}{\langle\lambda\rangle}. \quad (4.65)$$

Пусть из точки P отверстие видно под углом ψ . Обозначим Δx , Δy , Δz — неопределённости положения фотона вблизи точки P , а Δp_x , Δp_y , Δp_z — неопределённости проекции его импульса на соответствующие оси (ось z направлена перпендикулярно плоскости экрана). Согласно соотношению неопределённостей Гейзенберга

$$\Delta x \Delta p_x \sim \hbar, \quad \Delta y \Delta p_y \sim \hbar, \quad \Delta z \Delta p_z \sim \hbar. \quad (4.66)$$

Неопределённость Δp_x обусловлена неопределённостью положения точки в плоскости отверстия, из которой испускается фотон. Эту неопределённость с учётом (4.65) можно оценить как

$$\Delta p_x \sim p\psi \sim \frac{\hbar}{\langle\lambda\rangle}\psi. \quad (4.67)$$

Тогда, используя (4.66) и (4.67), оценим неопределённость Δx :

$$\Delta x \sim \frac{\hbar}{\Delta p_x} \sim \frac{\langle\lambda\rangle}{\psi}. \quad (4.68)$$

Аналогичное соотношение справедливо для неопределённости Δy . Неопределённость Δp_z оценим исходя из монохроматичности излучения:

$$\Delta p_z \sim \Delta \left(\frac{\hbar}{\lambda} \right) \sim \frac{\hbar}{\langle\lambda\rangle^2} \Delta\lambda. \quad (4.69)$$

Используя (4.66) и (4.69), оценим неопределённость Δz :

$$\Delta z \sim \frac{\hbar}{\Delta p_z} \sim \frac{\langle\lambda\rangle^2}{\Delta\lambda}. \quad (4.70)$$

Из (4.68) и (4.70) видно, что неопределённости Δx и Δy по порядку величины равны радиусу пространственной когерентности $\rho_{\text{ког}}$, а неопределённость Δz — длине когерентности $l_{\text{ког}}$. Таким образом, в объёме когерентности $V_{\text{ког}} = \rho_{\text{ког}}^2 l_{\text{ког}}$ фотоны с одинаковой поляризацией являются неразличимыми друг от друга. Исходя из данного упрощённого качественного рассмотрения можно сказать, что фотон локализован в пределах объёма когерентности. Следует отметить, что как бы ни был мал объём когерентности, положение фотона не может быть определено более точно, чем в пределах области, линейные размеры которой порядка λ (это следует из соотношения неопределённостей (4.66), если положить $\Delta p = p = 2\pi\hbar/\lambda$).

Мы определили фотоны выражением (4.59) как линейную суперпозицию однофотонных состояний $|1_{\mathbf{k}\alpha}\rangle$. При этом каждое из однофотонных состояний

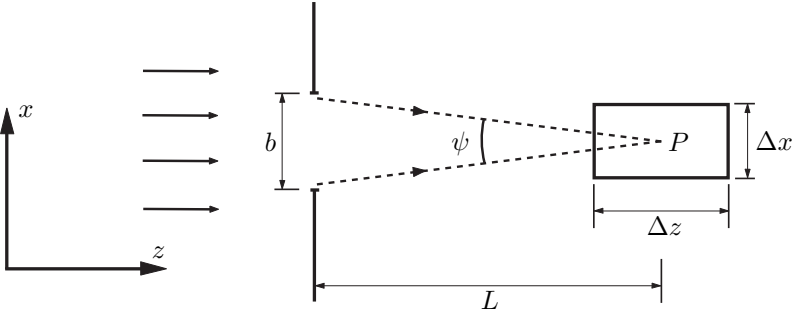


Рис. 4.2

$|1_{\mathbf{k}\alpha}\rangle$ соответствует плоской волне, распределённой по всему пространству. Поэтому, кстати говоря, излучение и поглощение однофотонного состояния $|1_{\mathbf{k}\alpha}\rangle$ является идеализацией или предельным случаем. Однако во многих случаях результаты эксперимента удобно интерпретировать как изменение числа фотонов, локализованных в определённой области и распространяющихся со скоростью света. Например, срабатывание фотодетектора, поверхность которого нормальна к излучению и подвергается его воздействию в течение некоторого конечного промежутка времени Δt , наиболее естественно интерпретировать как уменьшение на единицу числа фотонов в объёме цилиндра, основанием которого служит чувствительная поверхность детектора, а высота равна $c\Delta t$. Действительно, если рассмотреть срабатывание фотодетектора, регистрирующего свет от далёкой звезды, то из вышеприведённого качественного рассмотрения мы должны были бы заключить, что срабатывание детектора приводит к уничтожению фотона, находящегося в цилиндре (объёме когерентности) с площадью основания $\sim \rho_{\text{ког}}^2$. Это представляется довольно неправдоподобным, если учесть, что в этом случае $\rho_{\text{ког}}$ может достигать десятков метров!

В качестве примера псевдолокализованного однофотонного состояния рассмотрим состояние

$$|\xi\rangle = C \sum_{\mathbf{k}, \alpha} e^{-\frac{(\mathbf{k}-\mathbf{k}_0)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}_0} |1_{\mathbf{k}\alpha}\rangle, \quad (4.71)$$

где константа C выбрана так, чтобы выполнялось условие нормировки $\langle \xi | \xi \rangle = 1$. В состоянии (4.71) волновой вектор \mathbf{k} распределён по гауссовскому закону относительно вектора \mathbf{k}_0 , а само состояние (4.71) можно рассматривать как фотон, псевдолокализованный в виде волнового пакета с центром в точке \mathbf{r}_0 в заданный момент времени.

В заключение следует заметить, что последовательный строгий анализ показывает, что для излучения нельзя использовать понятие частиц-фотонов в том же смысле, как это делается в нерелятивистской квантовой теории по отношению к частицам, обладающим массой (электронам, протонам и т.д.). Это выра-

жается в том, что для фотонов нельзя строго определить волновую функцию в координатном пространстве (в смысле амплитуды вероятности пространственной локализации фотона).

5. Свойства фотонных коллективов

5.1. Задача о излучении абсолютно чёрного тела

Рассмотрим абсолютно чёрное тело — замкнутую полость объёма V , стенки которой поддерживаются при температуре T . В п. 4.2 было показано, что энергию излучения можно представить в виде суммы энергий гармонических осцилляторов (см. выражения (4.14) и (4.40)). При этом каждому осциллятору ставится в соответствие плоская монохроматическая волна с определённым направлением и поляризацией. Пусть $\rho(\omega) d\omega$ — плотность энергии равновесного излучения внутри полости в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$. Функцию $\rho(\omega)$ называют спектральной плотностью энергии равновесного теплового излучения. Представим $\rho(\omega) d\omega$ в следующем виде:

$$\rho(\omega) d\omega = \frac{\langle E_\omega \rangle g(\omega) d\omega}{V}, \quad (5.1)$$

где $\langle E_\omega \rangle$ — статистически усреднённая энергия осциллятора с частотой ω при температуре T , а $g(\omega) d\omega$ — число осцилляторов в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$, которое определяется выражением (4.4). Подставляя (4.4) в (5.1), получим

$$\rho(\omega) = \frac{\langle E_\omega \rangle \omega^2}{\pi^2 c^3}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим два случая.

1. Классический осциллятор

Как известно, средняя энергия классического осциллятора равна

$$\langle E_\omega \rangle = k_B T, \quad (5.3)$$

где k_B — постоянная Больцмана. Подставляя (5.3) в (5.2), получаем формулу Релея — Джинса:

$$\rho(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T. \quad (5.4)$$

При интегрировании (5.4) по всем частотам для энергии равновесного излучения получается бесконечность (ультрафиолетовая катастрофа), что в своё время явилось большой проблемой, решить которую смогла только квантовая теория.

2. Квантовый осциллятор

Как следует из (4.40), энергия квантового осциллятора с частотой ω равна

$$E_N = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right), \quad N = 0, 1, 2, \dots \quad (5.5)$$

Пусть P_N — вероятность того, что осциллятор при температуре T находится на N -м уровне. Согласно распределению Больцмана:

$$P_N = A e^{-\frac{E_N}{k_B T}}. \quad (5.6)$$

С учётом (5.5) и (5.6) получим

$$\langle E_\omega \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} E_N P_N = \frac{\sum_{N=0}^{\infty} E_N e^{-\frac{E_N}{k_B T}}}{\sum_{N=0}^{\infty} e^{-\frac{E_N}{k_B T}}} = \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega \frac{\sum_{N=0}^{\infty} N e^{-\frac{\hbar\omega N}{k_B T}}}{\sum_{N=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega N}{k_B T}}}. \quad (5.7)$$

Знаменатель в выражении (5.7) есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, которая равна

$$\sum_{N=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega N}{k_B T}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}. \quad (5.8)$$

Продифференцируем выражение (5.8) по частоте:

$$\sum_{N=0}^{\infty} N e^{-\frac{\hbar\omega N}{k_B T}} = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}{(1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}})^2}. \quad (5.9)$$

Подставляя (5.8) и (5.9) в (5.7), получим

$$\langle E_\omega \rangle = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \quad (5.10)$$

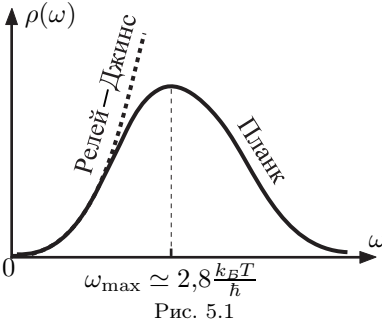
Слагаемое $\hbar\omega/2$ связано с энергией нулевых колебаний поля. Далее будем отсчитывать энергию осциллятора от уровня $\hbar\omega/2$ и записывать $\langle E_\omega \rangle$ в виде

$$\langle E_\omega \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \quad (5.11)$$

Подставляя (5.11) в (5.2), получаем формулу Планка:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \quad (5.12)$$

Зависимости (5.4) и (5.12) представлены на рис. 5.1. При $k_B T \gg \hbar\omega$: $e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} \simeq 1 + \frac{\hbar\omega}{k_B T}$, и формула Планка (5.12) переходит в формулу Релея—Джинса (5.4). То есть при высоких температурах (или низких частотах), когда средняя энергия осциллятора много больше расстояния между его уровнями, эффект квантования энергии осциллятора можно не учитывать.



В п. 4.3 уже говорилось, что плоской монохроматической волне с волновым вектором \mathbf{k} и поляризацией α можно сопоставить гармонический осциллятор, находящийся на $N_{\mathbf{k}\alpha}$ -м уровне, или $N_{\mathbf{k}\alpha}$ фотонов $\mathbf{k}\alpha$ -типа. Разделив среднюю энергию осциллятора (5.11) на энергию одного фотона $\hbar\omega$, мы получим число фотонов, приходящихся на один осциллятор с частотой ω для равновесного теплового излучения:

$$N_\omega = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \quad (5.13)$$

Для равновесного теплового излучения число фотонов, приходящихся на один осциллятор, зависит только от частоты ω и не зависит от направления волнового вектора \mathbf{k} и поляризации α , поэтому в (5.13) это число обозначено N_ω , а не $N_{\mathbf{k}\alpha}$, как в (4.40). Используя выражение для числа осцилляторов (4.4) и выражение (5.13), получим выражение для равновесного числа фотонов в единичном объёме в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$:

$$N(\omega) d\omega = \frac{g(\omega) d\omega}{V} N_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_B T}} - 1}. \quad (5.14)$$

Из сравнения (5.12) и (5.14) видно, что плотность энергии равновесного излучения можно представить в виде

$$\rho(\omega) d\omega = \hbar\omega N(\omega) d\omega. \quad (5.15)$$

5.2. Флуктуации числа частиц

Рассмотрим идеальный газ некоторых микрочастиц в выделенном объёме в условиях термодинамического равновесия. Пусть N — число микрочастиц, находящихся в некотором квантовом состоянии. Числа N флуктуируют около среднего значения $\langle N \rangle$. Для стационарного случая усреднение можно понимать либо по ансамблю систем для какого-то момента времени, либо по времени для одной системы. Для описания флуктуаций воспользуемся дисперсией (средним квадратом отклонения N от $\langle N \rangle$):

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle. \quad (5.16)$$

В статистической физике доказывается, что для газа микрочастиц, находящегося в термодинамическом равновесии:

$$\langle \Delta N^2 \rangle = k_B T \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial \mu}, \quad (5.17)$$

где T — температура, а μ — химический потенциал. Рассмотрим три случая.

1. Невырожденный газ

Для невырожденного газа микрочастиц справедливо классическое распределение Максвелла—Больцмана:

$$\langle N \rangle = \exp\left(\frac{\mu - \varepsilon}{k_B T}\right), \quad (5.18)$$

где ε — энергия микрочастицы в данном квантовом состоянии. Подставляя (5.18) в (5.17), получим

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N \rangle \quad (5.19)$$

2. Вырожденный газ бозонов

Вырожденный газ бозонов описывается распределением Бозе—Эйнштейна:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) - 1}. \quad (5.20)$$

Подставляя (5.20) в (5.17), получим

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) - 1\right]^2} = \langle N \rangle + \langle N \rangle^2. \quad (5.21)$$

3. Вырожденный газ фермионов

Вырожденный газ фермионов описывается распределением Ферми—Дирака:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) + 1}. \quad (5.22)$$

Подставляя (5.22) в (5.17), получим

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \frac{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right)}{\left[\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{k_B T}\right) + 1\right]^2} = \langle N \rangle - \langle N \rangle^2. \quad (5.23)$$

Если выполнено условие невырожденности

$$\exp\left(-\frac{\mu}{k_B T}\right) \gg 1, \quad (5.24)$$

то распределения (5.20) и (5.22) переходят в распределение (5.18). Для невырожденного газа $\langle N \rangle \ll 1$, и в этом случае число микрочастиц много меньше полного числа квантовых состояний, в которых может находиться микрочастица. Это означает, что в большинстве квантовых состояний частиц нет или находится только одна микрочастица, поэтому принцип Паули автоматически выполняется, и теряется различие между ферми-газом и бозе-газом.

5.3. Фотонный газ

Имея в виду всё, что было сказано в п. 4.8 по поводу понятия фотона, тем не менее попробуем для простоты представить себе равновесное излучение в виде идеального «фотонного газа». Как было отмечено в п. 4.7, полный угловой момент фотона может принимать значения $j = 1, 2, 3, \dots$. В оптическом диапазоне для подавляющего большинства фотонов $j = 1$. Таким образом, фотоны являются бозонами. При этом т.к. фотоны между собой не взаимодействуют, то равновесие в фотонном газе устанавливается благодаря другим частицам или телам (например, благодаря стенкам полости в задаче об излучении абсолютно чёрного тела). Так как фотоны могут рождаться и уничтожаться, то фотонный газ является системой с переменным числом частиц. Для систем с переменным числом частиц в условиях термодинамического равновесия $\mu = 0$, поэтому условие невырожденности (5.24) не выполняется. Таким образом, равновесное тепловое излучение является вырожденным фотонным газом при любых температурах.

Полагая в (5.20) $\varepsilon = \hbar\omega$ и $\mu = 0$, получаем функцию распределения для равновесного фотонного газа:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}. \quad (5.25)$$

Выражение (5.25), как и следовало ожидать, совпадает с выражением (5.13).

Надо отметить, что в области малых частот ($\hbar\omega \ll k_B T$) равновесное тепловое излучение описывается квантовой статистикой Бозе—Эйнштейна (5.25). В этом случае $\langle N \rangle \gg 1$ и фотонный газ является вырожденным. Но условие $\langle N \rangle \gg 1$ есть условие квазиклассического описания (см. п. 4.6), поэтому в области малых частот возможно описывать равновесное тепловое излучение с помощью классических электромагнитных волн. В области же больших частот ($\hbar\omega \gg k_B T$) распределение (5.25) переходит в классическое распределение Максвелла—Больцмана. В этом случае $\langle N \rangle \ll 1$ и фотонный газ является невырожденным. Так как теперь условие квазиклассического описания не выполняется, то в области больших частот возможно только квантовое описание равновесного теплового излучения.

Чтобы найти число фотонов для равновесного фотонного газа в интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$, надо (5.25) умножить на число квантовых состояний (число осцилляторов) $g(\omega)\Delta\omega$, которое определяется выражением (4.4).

При рассмотрении светового пучка с определённой поляризацией, распространяющегося в телесный угол $\Delta\Omega$, надо $g(\omega)\Delta\omega$ умножить на $\frac{1}{2} \frac{\Delta\Omega}{4\pi}$ (коэффициент $1/2$ учитывает, что излучение имеет только одну поляризацию). Таким образом, число квантовых состояний для фотонов в объёме V с определённой поляризацией, распространяющихся в телесный угол $\Delta\Omega$, и с частотой в интервале $(\omega, \omega + d\omega)$ равно

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta\Omega}{4\pi} g(\omega)\Delta\omega = \frac{V\omega^2 \Delta\omega \Delta\Omega}{8\pi^3 c^3}. \quad (5.26)$$

5.4. Тепловой и квантовый шумы для равновесного фотонного газа

При приёме оптического излучения флуктуации числа фотонов обуславливают внешний шум (в отличие от внутреннего шума приёмной аппаратуры). Воспользуемся соотношением (5.21) для равновесного фотонного газа:

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N \rangle + \langle N \rangle^2. \quad (5.27)$$

В (5.27) слагаемое $\langle N \rangle$ обуславливает так называемый квантовый шум, а слагаемое $\langle N \rangle^2$ — тепловой шум. Из (5.27) можно получить энергию шума, приходящуюся на одно квантовое состояние:

$$W_{\text{ш}} = \hbar\omega\sqrt{\langle \Delta N^2 \rangle} = \hbar\omega\sqrt{\langle N \rangle + \langle N \rangle^2}. \quad (5.28)$$

Рассмотрим опять два случая.

1. Малые частоты ($\hbar\omega \ll k_B T$)

В этом случае из (5.25) получаем

$$\langle N \rangle \simeq \frac{k_B T}{\hbar\omega} \gg 1, \quad (5.29)$$

поэтому $\langle N \rangle^2 \gg \langle N \rangle$, и выражение (5.28) с учётом (5.29) принимает вид

$$W_{\text{ш}} \simeq \hbar\omega\sqrt{\langle N \rangle^2} = \hbar\omega \langle N \rangle \simeq k_B T. \quad (5.30)$$

Так как в данном случае в одном квантовом состоянии много фотонов, то, как уже было отмечено в п. 5.3, равновесное тепловое излучение можно описывать с помощью классических электромагнитных волн. При этом квантовые шумы малы, а основную роль играют тепловые шумы.

2. Большие частоты ($\hbar\omega \gg k_B T$).

В этом случае из (5.25) получаем

$$\langle N \rangle \simeq \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) \ll 1, \quad (5.31)$$

поэтому $\langle N \rangle \gg \langle N \rangle^2$, и выражение (5.28) с учётом (5.31) принимает вид

$$W_{\text{ш}} \simeq \hbar\omega\sqrt{\langle N \rangle} \simeq \hbar\omega \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right). \quad (5.32)$$

Так как теперь один фотон приходится на много состояний, то равновесное тепловое излучение можно описывать только с помощью квантовой теории. Для больших частот основную роль играют квантовые шумы, а тепловые шумы малы.

Формулы (5.30) и (5.32) относятся к равновесному фотонному газу. Из этих формул следует, что чем сильнее выражены волновые (классические) свойства излучения, тем больше роль тепловых шумов; чем сильнее выражены корпускулярные (квантовые) свойства излучения, тем больше роль квантовых шумов.

5.5. Корреляция флуктуаций в фотонных пучках

Рассмотрим некоторый световой пучок от стационарного источника. Пусть N — число фотонов, находящихся в некотором квантовом состоянии (например, фотонов $k\alpha$ -типа). Выражение (5.25) для среднего числа $\langle N \rangle$ справедливо для равновесного фотонного газа. Если же в общем случае излучение не является равновесным, то в выражении (5.25) надо термодинамическую температуру T заменить на яркостную температуру $T_{\text{ярк}}$. (Напомним, что яркостной температурой некоторого излучателя называется температура абсолютно чёрного тела, при которой его спектральная яркость равна спектральной яркости излучателя вблизи данного направления и данной длины волны.)

Разделим исходный световой пучок на два (это можно сделать, например, с помощью полупрозрачного зеркала). Введём обозначения для числа фотонов, среднего числа фотонов и дисперсии: $N_1, \langle N_1 \rangle, \langle \Delta N_1^2 \rangle$ — для 1-го пучка и $N_2, \langle N_2 \rangle, \langle \Delta N_2^2 \rangle$ — для 2-го пучка. Для суммы чисел фотонов в 1-м и во 2-м пучках используем обозначения: $N = N_1 + N_2, \langle N \rangle, \langle \Delta N^2 \rangle$. При этом выполняется соотношение

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \rangle + \langle N_2 \rangle. \quad (5.33)$$

Дисперсия для исходного пучка равна

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \langle (\Delta N_1 + \Delta N_2)^2 \rangle = \langle \Delta N_1^2 \rangle + \langle \Delta N_2^2 \rangle + 2 \langle \Delta N_1 \cdot \Delta N_2 \rangle. \quad (5.34)$$

Если $\langle \Delta N_1 \cdot \Delta N_2 \rangle = \langle \Delta N_1 \rangle \cdot \langle \Delta N_2 \rangle = 0$, то говорят, что корреляция флуктуаций в пучках отсутствует, т.е. фотоны в пучках распределены независимо. Если же $\langle \Delta N_1 \cdot \Delta N_2 \rangle \neq 0$, то говорят о наличии корреляции флуктуаций в пучках.

Выше неявно предполагался некоторый идеализированный эксперимент, в котором числа фотонов N_1, N_2 и N определяются мгновенно. В любом реальном эксперименте по счёту фотонов имеются ограничения, определяемые временем разрешения фотоэлектронного умножителя (ФЭУ), а полученные результаты зависят от соотношения времени разрешения ФЭУ и временного масштаба, характеризующего флуктуации числа фотонов. В экспериментах по счёту фотонов средние интенсивности пучков должны быть достаточно малы, чтобы на выходе ФЭУ возникали отдельные неперекрывающиеся импульсы тока. Каждый импульс тока соответствует поглощению одного фотона. Далее будем предполагать, что ФЭУ регистрирует фотоны одной поляризации, его время счёта много меньше времени когерентности пучков $\tau_{\text{ког}}$, а поверхность катода ФЭУ много меньше радиуса пространственной когерентности пучков $\rho_{\text{ког}}$. В этом случае детектор является «одномоновым» и числа N_1, N_2, N пропорциональны числам его фотоотсчётов. Поэтому далее под N_1, N_2 и N будем подразумевать числа фотоотсчётов соответствующих детекторов. Проводя многократно измерения чисел фотоотсчётов, можно получить соответствующие средние значения $\langle N_1 \rangle, \langle N_2 \rangle$ и $\langle N \rangle$. Рассмотрим несколько частных случаев.

1. Флуктуации в равновесном фотонном газе

Пусть световые сигналы, поступающие на различные ФЭУ от 1-го и 2-го

пучков, имеют время задержки друг относительно друга $\tau \ll \tau_{\text{кор}}$. Тогда можно предположить, что выражение (5.27) справедливо не только для чисел фотоотсчётов N_1 и N_2 , но и для полного числа фотоотсчётов $N = N_1 + N_2$. С учётом (5.27) из (5.34), получим

$$\langle N \rangle + \langle N \rangle^2 = \langle N_1 \rangle + \langle N_1 \rangle^2 + \langle N_2 \rangle + \langle N_2 \rangle^2 + 2 \langle \Delta N_1 \cdot \Delta N_2 \rangle. \quad (5.35)$$

С учётом (5.33) выражение (5.35) примет вид

$$\langle N \rangle^2 = \langle N_1 \rangle^2 + \langle N_2 \rangle^2 + 2 \langle \Delta N_1 \cdot \Delta N_2 \rangle. \quad (5.36)$$

Возводя (5.33) в квадрат, имеем

$$\langle N \rangle^2 = \langle N_1 \rangle^2 + \langle N_2 \rangle^2 + 2 \langle N_1 \rangle \cdot \langle N_2 \rangle. \quad (5.37)$$

Из сравнения выражений (5.36) и (5.37) следует, что

$$\langle \Delta N_1 \cdot \Delta N_2 \rangle = \langle N_1 \rangle \cdot \langle N_2 \rangle > 0. \quad (5.38)$$

Таким образом, для равновесного фотонного газа существует корреляция флуктуаций фотоотсчётов (чисел фотонов) в пучках. Этот эффект называется группировкой фотоотсчётов (фотонов). Может показаться, что фотоны как бы взаимно притягиваются друг к другу. Однако данная точка зрения неверна, поскольку, как уже было отмечено ранее, фотоны друг с другом не взаимодействуют. Эффект группировки фотонов не имеет отношения к какому-либо силовому взаимодействию, а связан исключительно с особенностью их квантовой статистики, с их бозонной природой. (Здесь уместно провести аналогию с бозе-конденсацией.)

2. Флуктуации в одномодовом лазерном пучке

Рассмотрим одномодовый лазерный пучок постоянной интенсивности. Пусть P_N — вероятность того, что ФЭУ зарегистрирует N фотонов. Как было показано экспериментально и теоретически, идеальный одномодовый лазер при значительном превышении над порогом, генерирует излучение в состоянии, называемом когерентным. Поле в когерентном состоянии ближе всего к классической синусоидальной волне, а распределение P_N имеет вид распределения Пуассона (см. п. 5.9, (5.68)):

$$P_N = \frac{\langle N \rangle^N}{N!} e^{-\langle N \rangle}. \quad (5.39)$$

Дисперсия для распределения Пуассона равна

$$\langle \Delta N^2 \rangle = \langle N \rangle. \quad (5.40)$$

Заменив дисперсии в (5.34) с учётом (5.40), получим

$$\langle N \rangle = \langle N_1 \rangle + \langle N_2 \rangle + 2 \langle \Delta N_1 \cdot \Delta N_2 \rangle. \quad (5.41)$$

С учётом (5.33) из (5.41) имеем

$$\langle \Delta N_1 \cdot \Delta N_2 \rangle = 0. \quad (5.42)$$

Данный результат означает, что в лазерном пучке корреляция флуктуаций отсутствует, и эффект группировки фотонов не проявляется.

Из сравнения выражений для дисперсии (5.27) и (5.40) можно заключить, что эффект группировки фотонов для равновесного фотонного газа связан с дополнительным слагаемым $\langle N \rangle^2$ в (5.27), которое соответствует тепловому шуму.

3. Флуктуации в поле с определённым числом фотонов

Рассмотрим поле с определённым числом фотонов N . Пусть эти N фотонов распределяются полупрозрачным зеркалом случайным образом между двумя пучками с вероятностями p (1-й пучок) и $q = 1 - p$ (2-й пучок). Теперь вместо (5.33) выполняется условие

$$N = \langle N_1 \rangle + \langle N_2 \rangle. \quad (5.43)$$

Вероятность того, что в 1-й пучок попадёт N_1 фотонов, определяется биномиальным распределением:

$$P_N(N_1) = C_N^{N_1} p^{N_1} (1-p)^{N-N_1} = \frac{N!}{N_1!(N-N_1)!} p^{N_1} (1-p)^{N-N_1}. \quad (5.44)$$

Дисперсия для биномиального распределения равна

$$\langle \Delta N_1^2 \rangle = Np(1-p). \quad (5.45)$$

Выражение для $\langle \Delta N_2^2 \rangle$ также определяется формулой (5.45). Заменяя $\langle \Delta N_1^2 \rangle$ и $\langle \Delta N_2^2 \rangle$ в (5.34) выражением (5.45), получим

$$\langle \Delta N^2 \rangle = Np(1-p) + Np(1-p) + 2 \langle \Delta N_1 \cdot \Delta N_2 \rangle. \quad (5.46)$$

С учётом того, что в данном случае $\langle \Delta N^2 \rangle = 0$, из (5.46) получим

$$\langle \Delta N_1 \cdot \Delta N_2 \rangle = -Np(1-p) < 0. \quad (5.47)$$

Таким образом, если создать световой пучок с определённым числом фотонов, то для него получилась бы отрицательная корреляция. Этот эффект называется антигруппировкой фотонов.

5.6. Опыт Брауна—Твисса

Для сравнения с экспериментом результатов, полученных в п. 5.5, представим величину $\langle \Delta N_1 \cdot \Delta N_2 \rangle$, входящую в (5.34), в виде

$$\begin{aligned} \langle \Delta N_1 \cdot \Delta N_2 \rangle &= \langle (N_1 - \langle N_1 \rangle)(N_2 - \langle N_2 \rangle) \rangle = \langle N_1 N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle - \\ &- \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle + \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle = \langle N_1 N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle. \end{aligned} \quad (5.48)$$

Из (5.48) получаем

$$\frac{\langle N_1 N_2 \rangle}{\langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle} = \frac{\langle \Delta N_1 \Delta N_2 \rangle}{\langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle} + 1. \quad (5.49)$$

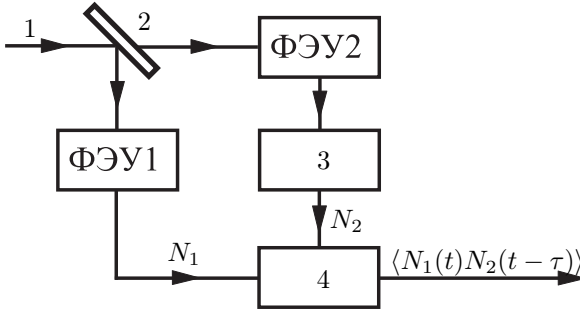


Рис. 5.2

Рассмотрим схему эксперимента Брауна—Твисса, приведённую на рис. 5.2. Исходный световой пучок 1 расщепляется полупрозрачным зеркалом 2 на два пучка. Числа фотоотсчётов N_1 и N_2 для каждого из разделённых пучков измеряются двумя фотоумножителями ФЭУ1 и ФЭУ2. Сигналы от этих двух ФЭУ попадают в коррелятор 4, который сначала перемножает числа N_1 и N_2 , а затем усредняет их произведение (усреднение по большому числу измерений). В интерферометре используется также устройство 3, осуществляющее временную задержку τ световых сигналов друг относительно друга. Таким образом, на выходе коррелятора 4 получается величина $\langle N_1(t) \cdot N_2(t - \tau) \rangle$. На рис. 5.3 представлена зависимость величины

$$\frac{\langle N_1(t)N_2(t - \tau) \rangle}{\langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle}$$

от времени задержки τ : 1 — для равновесного теплового излучения; 2 — для одномодового лазерного излучения; 3 — для светового поля с определённым числом фотонов. Из зависимости 1 для равновесного теплового излучения и выражения (5.49) видно, что при $\tau \ll \tau_{\text{ког}}$ корреляция $\langle \Delta N_1 \Delta N_2 \rangle = \langle N_1 \rangle \langle N_2 \rangle$, что совпадает с результатом (5.38) (эффект группировки фотонов). Для одномодового лазерного излучения, согласно (5.42), $\langle \Delta N_1 \Delta N_2 \rangle = 0$, поэтому зависимость 2 представляет собой постоянную величину, равную единице (эффект группировки фотонов отсутствует). Согласно (5.47), для светового поля с определённым числом фотонов корреляция $\langle \Delta N_1 \Delta N_2 \rangle < 0$, что также согласуется с зависимостью 3 (эффект антигруппировки фотонов).

Отметим несколько важных применений интерферометра Брауна—Твисса. Этот интерферометр используется для определения угловых размеров звёзд. Идея метода заключается в следующем. Если фотоумножители ФЭУ1 и ФЭУ2 (рис. 5.2), направленные на звезду, удалять друг от друга, то корреляция флуктуаций их фотоотсчётов будет меняться аналогично кривой 1 на рис. 5.3, где по горизонтальной оси надо откладывать расстояние d между фотоумножителями. Характерное изменение этой зависимости происходит при d равном радиусу пространственной когерентности $\rho_{\text{ког}}$, который равен $\rho_{\text{ког}} \simeq \lambda/\psi$, где ψ — угловой

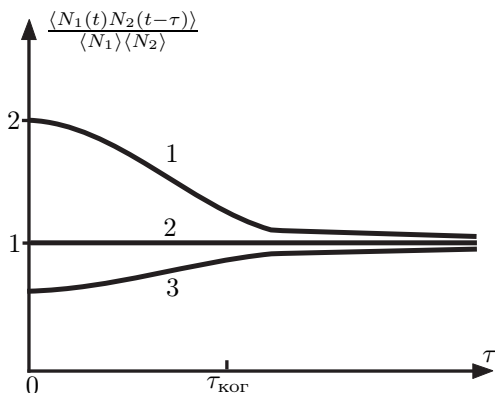


Рис. 5.3

размер звезды. В этом методе можно определять $\rho_{\text{ког}}$ до сотен метров (интерферометр в австралийской обсерватории Наррабри позволяет изменять d до 188 метров и делает возможным измерение угловых размеров звёзд до $0,0004''$). Классический же метод, использующий звездный интерферометр Майкельсона, ограничивает измеряемые $\rho_{\text{ког}}$ до величин ~ 10 метров, а угловых размеров звёзд до $\sim 0,01''$, что связано с сильным влиянием механических вибраций и атмосферной турбулентности.

Другое важное применение интерферометра Брауна—Твисса связано с его использованием для определения времени когерентности $\tau_{\text{ког}}$ или частотной ширины спектра излучения. Этот метод называется спектроскопией флуктуаций интенсивности (используются также термины *спектроскопия оптического смешения* и *метод корреляции фотонов*). Следует отметить, что точность в эксперименте Брауна—Твисса зависит от временного разрешения флуктуаций фотоотсчётов N_1 и N_2 . В обычном же спектроскопическом эксперименте свет исследуется на основе частотного разрешения. Минимальное время счёта фотонов ограничено временем разрешения ФЭУ, для самых быстродействующих из которых оно $\sim 10^{-9}$ с. Таким образом, спектроскопия флуктуаций интенсивности может быть использована для исследования спектральных линий в интервале от 1 до $\sim 10^8$ Гц. Обычная спектроскопия, использующая дифракционные решётки, способна разрешать спектральные линии с шириной $\gtrsim 10^{10}$ Гц, а интерференционная спектроскопия Фабри—Перо используется для спектральных линий с шириной $10^7 \div 10^{12}$ Гц. Таким образом, спектроскопия флуктуаций интенсивности очень хорошо дополняет частотный диапазон, перекрываемый спектроскопическими методами. Спектральные линии, слишком узкие для разрешения методами спектроскопии, измеряющей частоту, можно легко изучать методами временного разрешения, применяемыми в спектроскопии флуктуаций интенсивности.

5.7. Когерентность первого и высших порядков

В п. 3.2 для описания взаимной корреляции электрического поля в двух пространственно-временных точках (\mathbf{r}_1, t_1) и (\mathbf{r}_2, t_2) мы рассматривали функцию когерентности

$$\gamma^{(1)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2) = \frac{\langle \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle}{\sqrt{\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle}}, \quad (5.50)$$

которая называется функцией когерентности первого порядка. Когерентность первого порядка определяет интерференционные эффекты в большинстве классических интерференционных опытов.

Для описания взаимной корреляции световых интенсивностей необходимо исследовать корреляцию электрического поля в четырёх пространственно-временных точках. Такие эффекты описываются функцией когерентности второго порядка, которая в общем случае определяется как

$$\begin{aligned} \gamma^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_3, t_3; \mathbf{r}_4, t_4) &= \\ &= \frac{\langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}_3, t_3) \mathbf{E}(\mathbf{r}_4, t_4) \rangle}{\sqrt{\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_3, t_3)|^2 \rangle \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_4, t_4)|^2 \rangle}}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

Так, например, рассмотренный в п. 5.6 опыт Брауна—Твисса описывается частным случаем функции когерентности второго порядка (5.51):

$$\gamma^{(2)}(\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_2, t_2; \mathbf{r}_1, t_1) = \frac{\langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2) \mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle}{\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_2, t_2)|^2 \rangle}. \quad (5.52)$$

Действительно, из (5.52) следует, что $\gamma^{(2)} \sim \langle I_1 I_2 \rangle \sim \langle N_1 N_2 \rangle$, где I_1 и I_2 — интенсивности 1-го и 2-го пучков, а N_1 и N_2 — числа фотоотсчётов ФЭУ1 и ФЭУ2 (рис. 5.2).

Можно рассмотреть обобщённый интерференционный эксперимент, результат которого зависит от корреляций электрического поля в произвольном числе пространственно-временных точек. Для этого исходный световой пучок необходимо разделить на необходимое число пучков. При этом используется функция когерентности n -го порядка

$$\begin{aligned} \gamma^{(n)}(\mathbf{r}_1, t_1; \dots; \mathbf{r}_n, t_n; \mathbf{r}_{n+1}, t_{n+1}; \dots; \mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) &= \\ &= \frac{\langle \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \dots \mathbf{E}^*(\mathbf{r}_n, t_n) \mathbf{E}(\mathbf{r}_{n+1}, t_{n+1}) \dots \mathbf{E}(\mathbf{r}_{2n}, t_{2n}) \rangle}{\sqrt{\langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_1, t_1)|^2 \rangle \dots \langle |\mathbf{E}(\mathbf{r}_{2n}, t_{2n})|^2 \rangle}}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Функция (5.53) описывает корреляцию электрического поля в $2n$ пространственно-временных точках. Если пространственно-временные точки $(\mathbf{r}_n, t_n), \dots, (\mathbf{r}_1, t_1)$ совпадают с соответствующими точками $(\mathbf{r}_{n+1}, t_{n+1}), \dots, (\mathbf{r}_{2n}, t_{2n})$, функция (5.53) содержит интенсивность в n различных точках.

5.8. Соотношение неопределённостей: число фотонов-фаза

Для измерения энергии квантовой системы с точностью ΔE необходимо производить измерение в течение времени Δt , которое связано с ΔE соотношением неопределённостей

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar. \quad (5.54)$$

В качестве квантовой системы рассмотрим коллектив фотонов, находящихся в некотором квантовом состоянии с частотой ω . Тогда неопределённость энергии системы фотонов ΔE можно выразить через неопределённость числа фотонов ΔN :

$$\Delta E = \hbar \omega \Delta N. \quad (5.55)$$

Рассмотрим теперь волновую характеристику нашего объекта — фазу: $\varphi = \omega t$. За время Δt фаза изменится на

$$\Delta \varphi = \omega \Delta t. \quad (5.56)$$

Подставляя (5.55) и (5.56) в (5.54), получим

$$\Delta N \Delta \varphi \gtrsim 1. \quad (5.57)$$

Следует отметить, что полученное соотношение (5.57) является не совсем корректным с точки зрения строгой теории. Дело в том, что мы можем определить оператор для числа фотонов N (см. (4.39)), но корректно определить оператор для фазы φ не удаётся. Тем не менее соотношение неопределённостей (5.57) хорошо проявляет корпускулярно-волновой дуализм поля излучения и очень полезно для качественного анализа многих ситуаций. Действительно, неопределённость $\Delta \varphi$ мала, когда наиболее выражены волновые свойства поля, т.е. когда выполнено условие квазиклассического описания $\langle N \rangle \gg 1$ (см. п. 4.6). Но чем больше $\langle N \rangle$, тем больше флуктуации $\langle (\Delta N)^2 \rangle$ и неопределённость ΔN . С другой стороны, неопределённость ΔN мала, когда мало среднее число фотонов $\langle N \rangle$. В данном случае наиболее выражены корпускулярные свойства поля и неопределённость фазы $\Delta \varphi$ большая. Так, например, для счётчиков фотонов (ФЭУ) $\Delta N = 0$, и поэтому $\Delta \varphi = \infty$ — фаза полностью неопределена.

5.9. Состояния квантованного поля излучения

Фоковские состояния поля излучения (4.19) являются удобными базисными состояниями для описания электромагнитного поля в полости. Рассмотрим несколько частных случаев состояния поля излучения. Для простоты далее рассмотрим только одну моду электромагнитного поля, соответствующую волновому вектору \mathbf{k} и поляризации α , при этом индексы $\mathbf{k}\alpha$ будем опускать.

1. Одномодовое состояние с определённым числом фотонов

Одномодовое N -фотонное состояние является собственным состоянием оператора числа фотонов $\hat{c}^+ \hat{c}$ (см. (4.38)):

$$\hat{c}^+ \hat{c} |N\rangle = N |N\rangle. \quad (5.58)$$

Так как в состоянии $|N\rangle$ неопределённость числа фотонов равна нулю, то согласно соотношению неопределённостей (5.57) фаза в этом состоянии является полностью неопределённой. Графическое представление состояния $|N\rangle$ приведено на рис. 5.4, где показана зависимость электрического поля в некоторой фиксированной точке полости от времени. Поле осциллирует как синусоидальная волна с фиксированной частотой ω . Положение волны вдоль горизонтальной оси полностью неопределено вследствие полной неопределённости фазы φ . На рис. 5.4 это представлено изображением нескольких волн с одинаковой амплитудой и частотой, сдвинутых относительно друг друга. В действительности возможные горизонтальные положения волны образуют континуум, а поле в любой момент времени может принимать непрерывный спектр значений от $-E_0$ до E_0 . Амплитуда E_0 электромагнитной волны в полости объёма V может быть определена из выражения для энергии поля:

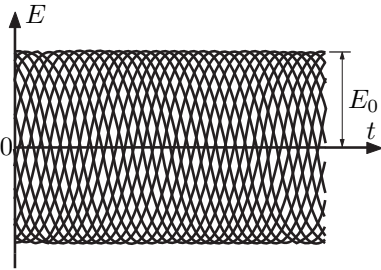


Рис. 5.4

Из (5.59) имеем

$$\hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) = \frac{\langle E^2 \rangle V}{4\pi} = \frac{E_0^2 V}{8\pi}. \quad (5.59)$$

Из (5.59) имеем

$$E_0 = \sqrt{\frac{8\pi}{V} \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right)}. \quad (5.60)$$

Следует отметить, что к рис. 5.4 надо относиться с осторожностью, как к любой попытке «изобразить» квантовомеханическое состояние.

2. Одномодовое состояние с определённой фазой

Можно показать, что в качестве одномодового состояния с определённой фазой φ можно взять состояние

$$|\varphi\rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{s+1}} \sum_{N=0}^s e^{iN\varphi} |N\rangle. \quad (5.61)$$

Состояние (5.61) представляет собой линейную комбинацию всех состояний $|N\rangle$, каждое из которых имеет амплитуду $(s+1)^{-1/2}$ и свой фазовый множитель $e^{iN\varphi}$. Так как состояния $|N\rangle$ нормированы, то состояние (5.61) также удовлетворяет условию нормировки:

$$\langle \varphi | \varphi \rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s+1} \sum_{N=0}^s \langle N | N \rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s+1}{s+1} = 1. \quad (5.62)$$

Определим среднее число фотонов в состоянии (5.61), используя оператор числа

частиц $\hat{c}^+\hat{c}$, где операторы \hat{c}^+ и \hat{c} определяются выражениями (4.37):

$$\langle \varphi | \hat{c}^+ \hat{c} | \varphi \rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s+1} \sum_{N=0}^s \langle N | \hat{c}^+ \hat{c} | N \rangle = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s+1} \sum_{N=0}^s N = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s}{2} = \infty. \quad (5.63)$$

Из (5.63) видно, что среднее число фотонов с частотой ω , а следовательно, и средняя энергия поля в состоянии $|\varphi\rangle$ должны быть бесконечными, поэтому в реальном эксперименте возбуждение моды полости в состояние $|\varphi\rangle$ невозможно. Данное состояние следует рассматривать как предельный случай, соответствующий состоянию с точно определённой фазой. Так как в состоянии $|\varphi\rangle$ неопределённость фазы равна нулю, то согласно соотношению неопределённостей (5.57) число фотонов в этом состоянии полностью неопределено, что согласуется с результатом (5.63).

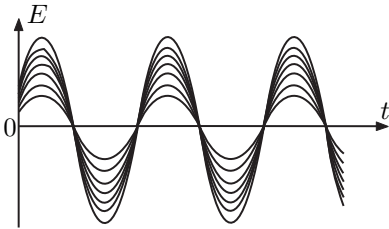


Рис. 5.5

На рис. 5.5 приведено графическое представление одномодового состояния $|\varphi\rangle$, где показана зависимость электрического поля в некоторой фиксированной точке полости от времени. Поле представляет собой суперпозицию бесконечного числа волн с различными амплитудами, соответствующими различным значениям N . Каждая вспомогательная волна имеет одну и ту же частоту ω и фазу φ , по-

этому узлы результирующей волны совпадают с узлами всех вспомогательных волн. Рисунки 5.4 и 5.5 наглядно демонстрируют соотношение неопределённостей (5.57): точное определение одного из параметров N или φ приводит к полной неопределённости другого параметра. Ещё раз отметим, что изображения на рисунках 5.4 и 5.5 состояний поля излучения не следует понимать буквально в классическом смысле.

3. Когерентные состояния (состояния Глаубера)

Состояния $|N\rangle$ и $|\varphi\rangle$, рассмотренные выше и представленные графически на рисунках 5.4 и 5.5, не соответствуют временной зависимости классической электромагнитной волны со стабильной амплитудой и фазой. Представляет интерес рассмотрение таких состояний квантованного поля излучения, свойства которых в пределе больших амплитуд аналогичны свойствам классической электромагнитной волны. Такие состояния называются когерентными состояниями поля излучения (состояниями Глаубера). Из всех квантовомеханических состояний когерентные состояния наиболее близки к классической электромагнитной волне. Конечно, в некоторых случаях можно описывать поле с помощью классических световых волн, однако при этом выпадают из рассмотрения некоторые квантовые явления, не имеющие классических аналогий. Когерентные состояния важны также и потому, что лазер, работающий при значительном превышении порога, генерирует излучение, находящееся в когерентном возбуждённом состоянии.

Когерентные состояния, которые будем обозначать как $|\alpha\rangle$, определяются линейной суперпозицией:

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle, \quad (5.64)$$

где α — произвольное комплексное число. Состояние $|\alpha\rangle$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^N \alpha^N}{N!} = 1. \quad (5.65)$$

Покажем, что состояния $|\alpha\rangle$ являются собственными состояниями оператора уничтожения \hat{c} . Подействуем на обе части равенства (5.64) оператором \hat{c} и учтём, что $\hat{c}|N\rangle = \sqrt{N}|N-1\rangle$ (см. (4.37)):

$$\begin{aligned} \hat{c}|\alpha\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} \sqrt{N} |N-1\rangle = \\ &= \alpha \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{N=1}^{\infty} \frac{\alpha^{N-1}}{\sqrt{(N-1)!}} |N-1\rangle = \\ &= \alpha \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle = \alpha |\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Из (5.66) следует, что комплексное число α является собственным значением оператора \hat{c} . Следует отметить, что состояние $|\alpha\rangle$ не является собственным для оператора рождения \hat{c}^+ . Когерентное состояние $|\alpha\rangle$ можно было бы определить как собственное состояние оператора \hat{c} , тогда мы получили бы как следствие выражение (5.64).

Найдём вероятность $P_N^{(\alpha)}$ того, что в когерентном состоянии $|\alpha\rangle$ можно зарегистрировать N фотонов. Эта вероятность равна квадрату модуля коэффициента при $|\alpha\rangle$ в разложении (5.64):

$$P_N^{(\alpha)} = \frac{|\alpha|^{2N}}{N!} e^{-|\alpha|^2}. \quad (5.67)$$

Данное распределение является распределением Пуассона, которое можно записать в виде

$$P_N^{(\alpha)} = \frac{\langle N \rangle^N}{N!} e^{-\langle N \rangle}. \quad (5.68)$$

Из сравнения выражений (5.67) и (5.68) получаем, что среднее число фотонов в состоянии $|\alpha\rangle$ равно

$$\langle N \rangle = |\alpha|^2. \quad (5.69)$$

Для распределения Пуассона среднеквадратичное отклонение числа фотонов с учётом (5.69) равно

$$\sqrt{\langle \Delta N^2 \rangle} = \sqrt{\langle N \rangle} = |\alpha|. \quad (5.70)$$

Соотношение (5.68) было использовано нами для определения вероятности регистрации N фотонов в одномодовом лазерном пучке (см. (5.39)).

Из (5.69) и (5.70) следует, что относительная неопределённость числа фотонов в состоянии $|\alpha\rangle$ равна

$$\frac{\sqrt{\langle \Delta N^2 \rangle}}{\langle N \rangle} = \frac{1}{|\alpha|}, \quad (5.71)$$

и она уменьшается с ростом среднего числа фотонов (с ростом степени возбуждения моды полости).

Найдём среднее значение электрического поля для когерентного состояния $|\alpha\rangle$. Оператор электрического поля для одной моды в полости объёмом V , согласно (4.50), определяется выражением

$$\hat{E} = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} \left[\hat{c}e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} - \hat{c}^+e^{i(\omega t-\mathbf{k}\mathbf{r})} \right]. \quad (5.72)$$

С учётом (5.72) имеем

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \langle \alpha | \hat{E} | \alpha \rangle = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} \left[\alpha e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} - \alpha^* e^{i(\omega t-\mathbf{k}\mathbf{r})} \right] = \\ &= i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} |\alpha| \left[e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t+\theta)} - e^{i(\omega t-\mathbf{k}\mathbf{r}-\theta)} \right] = \\ &= -2\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}} |\alpha| \sin(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \theta), \end{aligned} \quad (5.73)$$

где θ — аргумент комплексного числа α ($\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$). Здесь мы использовали, что $\langle \alpha | \hat{c} | \alpha \rangle = \alpha$ и $\langle \alpha | \hat{c}^+ | \alpha \rangle = \alpha^*$. Для определения среднеквадратичного отклонения электрического поля, найдём также значение среднего квадрата электрического поля:

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle &= \langle \alpha | (\hat{E})^2 | \alpha \rangle = -\frac{2\pi\hbar\omega}{V} \langle \alpha | -\hat{c}\hat{c}^+ - \hat{c}^+\hat{c} + \hat{c}\hat{c}e^{i2(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{c}^+\hat{c}^+e^{i2(\omega t-\mathbf{k}\mathbf{r})} | \alpha \rangle = \\ &= \frac{2\pi\hbar\omega}{V} \langle \alpha | 2\hat{c}^+\hat{c} + 1 - \hat{c}\hat{c}e^{i2(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} - \hat{c}^+\hat{c}^+e^{i2(\omega t-\mathbf{k}\mathbf{r})} | \alpha \rangle = \\ &= \frac{2\pi\hbar\omega}{V} \left[2|\alpha|^2 + 1 - \alpha^2 e^{i2(\mathbf{k}\mathbf{r}-\omega t)} - (\alpha^*)^2 e^{i2(\omega t-\mathbf{k}\mathbf{r})} \right] = \\ &= \frac{2\pi\hbar\omega}{V} \left[2|\alpha|^2 + 1 - |\alpha|^2 2 \cos(2(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \theta)) \right] = \\ &= \frac{2\pi\hbar\omega}{V} \left[4|\alpha|^2 \sin^2(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \theta) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (5.74)$$

При выводе данного выражения было учтено, что согласно (4.25): $\hat{c}\hat{c}^+ = \hat{c}^+\hat{c} + 1$. Из (5.73) и (5.74) находим среднеквадратичное отклонение электрического поля:

$$\sqrt{\langle \Delta E^2 \rangle} = \sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}. \quad (5.75)$$

Временная зависимость электрического поля в некоторой фиксированной точке полости для когерентного состояния $|\alpha\rangle$ приведена на рис. 5.6. Неопределённость значений поля указана шириной по вертикали, равной $2\sqrt{\langle \Delta E^2 \rangle}$. Из (5.73) и (5.69) видно, что с увеличением $|\alpha|$ увеличивается амплитуда синусоидальной волны и среднее число фотонов в когерентном состоянии. Согласно (5.75) неопределённость $\sqrt{\langle \Delta E^2 \rangle}$ не зависит от $|\alpha|$, поэтому точность определения электрического поля увеличивается с увеличением амплитуды волны или, что то же самое, среднего числа фотонов в когерентном состоянии. При этом временная зависимость электрического поля становится все более похожа на классическую синусоидальную волну.

Неопределённость электрического поля в когерентном состоянии можно рассматривать как неопределённость, обусловленную неопределённостью фазы и числа фотонов. Из сравнения рисунков 5.4, 5.5 и 5.6 видно, что когерентное состояние $|\alpha\rangle$ является некоторым промежуточным состоянием между состояниями с определённым числом фотонов $|N\rangle$ и определённой фазой $|\varphi\rangle$. Можно показать, что если среднее число фотонов $\langle N \rangle \gg 1$, то для когерентного состояния произведение среднеквадратичных отклонений фазы φ и числа фотонов N имеет наименьшее значение, которое допускается соотношением неопределённостей (5.57).

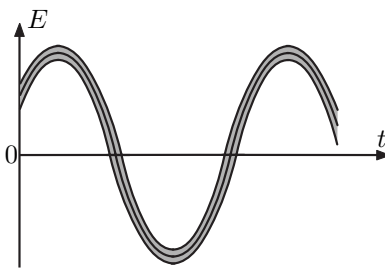


Рис. 5.6

Рис. 5.6

4. Сжатые состояния

В последнее время вызывают большой интерес так называемые сжатые состояния света. Выше были рассмотрены когерентные состояния, которые определяются линейной суперпозицией (5.64). Для когерентных состояний неопределённость электрического поля, как видно из рис. 5.6, не зависит от времени. Но можно создать и такие состояния, которые также являются суперпозицией состояний $|N\rangle$, для которых неопределённость электрического поля будет периодически изменяться со временем. Частота этих изменений равна удвоенной оптической частоте. При этом в каждый момент времени соотношение неопределённостей (5.57) остаётся справедливым. Такие состояния поля излучения называются сжатыми состояниями. В сжатых состояниях минимальные значения неопределённости электрического поля или фазы могут быть меньше, чем в случае когерентного состояния.

Временная зависимость электрического поля в сжатом состоянии показана на рис. 5.7. Электрическое поле в сжатом состоянии на рис. 5.7а обладает умень-

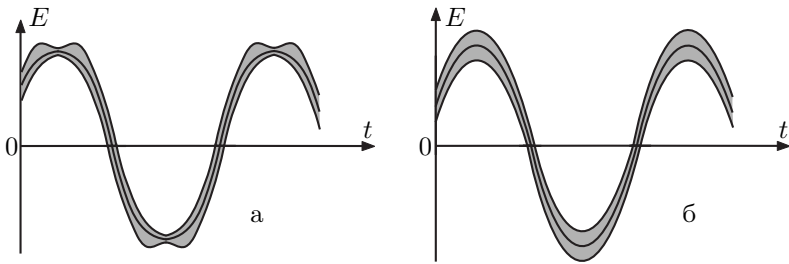


Рис. 5.7

шенной неопределённостью амплитуды поля за счёт увеличения неопределённости фазы. (Сравните данную зависимость с двумя синусоидальными сигналами одинаковой амплитуды, имеющими друг относительно друга небольшую временную задержку.) Из зависимости на рис. 5.7а видно, что минимальная неопределённость электрического поля достигается дважды за период в момент максимального значения поля. Электрическое поле в сжатом состоянии на рис. 5.7б обладает уменьшенной неопределённостью фазы за счёт увеличения неопределённости амплитуды поля.

В заключение отметим, что сжатый свет может быть использован для передачи информации в оптической связи, для уменьшения шумов при фотодетектировании и для измерения малых сил, вызываемых, например, гравитационными волнами.

Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 4. Оптика. М.: Физматлит, 2002.
2. *Калитеевский Н.И.* Волновая оптика. М.: Наука, 1971.
3. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970.
4. *Гладун А.Д.* Лекции по общей физике. Структура вещества Ч. 1. М.: МФТИ, 2007.
5. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. Т. 1. М.: Физматлит, 2001.
6. *Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Ципенюк Ю.М.* Основы физики. Т. 2. М.: Физматлит, 2001.
7. *Лоудон Р.* Квантовая теория света. М.: Мир, 1976.
8. *Тарасов Л.В.* Введение в квантовую оптику. М.: Высшая школа, 1987.
9. *Мандель Л., Вольф Э.* Оптическая когерентность и квантовая оптика. М.: Физматлит, 2000.
10. *Скалли М.О., Зубайри М.С.* Квантовая оптика. М.: Физматлит, 2003.
11. *Клышко Д.Н.* Физические основы квантовой электроники. М.: Наука, 1986.
12. *Клаудер Дж., Сударшан Э.* Основы квантовой оптики. М.: Мир, 1970.
13. *Глаубер Р.* Оптическая когерентность и статистика фотонов. — В кн.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М.: Мир, 1966.
14. *Гринштейн Дж., Зайонц А.* Квантовый вызов. Современные исследования оснований квантовой механики. Долгопрудный: ИД Интеллект, 2008.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Классическое описание оптического излучения	3
1.1. Световые лучи	3
1.2. Световые волны в вакууме	4
1.3. Световые волны в среде	6
1.4. Волновая и геометрическая оптика	7
2. Световые волны	8
2.1. Плоская волна	8
2.2. Плоская монохроматическая волна	8
2.3. Интенсивность света	9
2.4. Спектральное разложение	9
2.5. Поляризация световой волны	10
3. Когерентность световых волн	12
3.1. Понятие когерентности	12
3.2. Функция взаимной когерентности	13
3.3. Функция взаимной когерентности и видность интерференционных полос	14
3.4. Временная когерентность	15
3.5. Пространственная когерентность	16
3.6. Связь временной когерентности со степенью монохроматичности излучения	17
4. Переход от световых волн к фотонным коллективам	18
4.1. Поле световой волны в конечном объёме	18
4.2. Разложение поля на осцилляторы	19

4.3. Квантование поля	20
4.4. Выражения для операторов \hat{A} и \hat{E}	24
4.5. Энергия нулевых колебаний	26
4.6. Условие квазиклассичности	27
4.7. Фотон и его свойства	28
4.8. Дальнейшее обсуждение понятия фотона	31
5. Свойства фотонных коллективов	34
5.1. Задача о излучении абсолютно чёрного тела	34
5.2. Флуктуации числа частиц	36
5.3. Фотонный газ	37
5.4. Тепловой и квантовый шум для равновесного фотонного газа	39
5.5. Корреляция флуктуаций в фотонных пучках	40
5.6. Опыт Брауна—Твисса	42
5.7. Когерентность первого и высших порядков	44
5.8. Соотношение неопределённостей: число фотонов-фаза	45
5.9. Состояния квантованного поля излучения	46
Литература	53

Учебное издание

ЮРЬЕВ Юрий Вячеславович

СВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ И ФОТОНЫ

Редактор *О.П. Котова*. Корректор *Л.В. Себова*

Подписано в печать 16.07.2010. Формат $60 \times 84^{1/16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,5. Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 100 экз.
Заказ № .

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Отдел автоматизированных издательских систем
«ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»

141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Для заявок: тел. (095) 408-58-22 rio@mail.mipt.ru