



ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Лабораторные работы
№№ 4.2, 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.8А, 4.9

МОСКВА 2006

Введение

В этом разделе мы рассмотрим гармонические колебания токов (зарядов) в электрических цепях, включающих в себя резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности. Это свободные затухающие колебания в колебательном контуре, а также вынужденные установившиеся колебания, возбуждаемые внешней ЭДС, изменяющейся по синусоидальному закону. Все эти колебания мы будем рассматривать при относительно низких частотах, когда выполняется условие квазистационарности. Квазистационарность означает, что в каждый момент времени значения тока I практически одинаковы во всех элементах цепи, соединённых последовательно, т.е. изменения токов во времени происходят настолько медленно, что распространение электродинамических взаимодействий можно считать *мгновенным*. Электромагнитные взаимодействия распространяются со скоростью, близкой к скорости света в вакууме c . Обозначим через l длину контура нашей цепи (практически эта длина совпадает с длиной провода, из которого изготовлена обмотка катушки самоиндукции). Время распространения электромагнитного возмущения на расстояние l

$$\tau = \frac{l}{c}.$$

Условие квазистационарности будет выполнено, если время τ много меньше периода T колебаний тока в контуре: $\tau \ll T$, или частота колебаний $\nu = 1/T \ll 1/\tau$. При $l \approx 1$ м условие квазистационарности хорошо выполняется при частотах $\nu \ll 3 \cdot 10^8$ Гц.

Выполнение условия квазистационарности позволяет при расчёте цепей переменного тока использовать закон Ома для замкнутой цепи (интегральная форма) и закон сохранения заряда так же, как и при расчёте цепей постоянного тока. Следствием этих двух законов являются два правила Кирхгофа. Первое правило Кирхгофа: *в каждой точке разветвления проводов алгебраическая сумма токов равна нулю*. Второе правило: *для любого замкнутого контура сумма падений напряжений на отдельных участках контура равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре*. Мы будем рассматривать идеализированные цепи переменного тока, в которых всё омическое сопротивление цепи сосредоточено в резисторе, нескомпенсированные заряды расположены только на обкладках конденсатора, а всё магнитное поле, связанное с током в цепи, локализовано в катушке самоиндукции. Условие квазистационарности позволяет использовать связь между током I и напряжением V на каждом из этих трёх элементов: для резистора с сопротивлением R закон Ома позволяет записать

$$V = IR; \tag{B.1}$$

для конденсатора, когда ток направлен к положительно заряженной пластине, ток

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}, \quad (\text{В.2})$$

где C — ёмкость конденсатора; а для катушки самоиндукции напряжение на ней

$$V = L \frac{dI}{dt}, \quad (\text{В.3})$$

где L — индуктивность катушки.

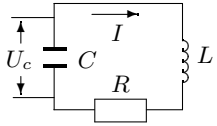


Рис. В.1. Колебательный контур

Для цепи постоянного тока правила Кирхгофа позволяют получить полную систему линейных алгебраических уравнений, из решения которой могут быть найдены все неизвестные токи; при расчёте цепи переменного тока, используя эти правила для произвольного момента времени, мы получаем систему линейных дифференциальных уравнений, которые позволяют найти временную зависимость токов (зарядов) в цепи.

В частном случае, когда речь идёт о вынужденных стационарных колебаниях (это касается амплитуды и начальной фазы), нет необходимости каждый раз решать дифференциальные уравнения, для этих случаев используется стандартный метод комплексных амплитуд или метод построения векторных диаграмм. Оба этих метода будут рассмотрены в пункте 2 — «Вынужденные колебания».

1. Свободные колебания

1.1. Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых конденсатора C , катушки индуктивности L и резистора R (рис. В.1). Обозначим разность потенциалов на конденсаторе через U_C , а ток, текущий в контуре, через I . Сумма падений напряжения на элементах цепи равна ЭДС самоиндукции:

$$RI + U_C = -L \frac{dI}{dt}. \quad (\text{В.4})$$

Выразим U_C через заряд на конденсаторе q :

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = 0. \quad (\text{В.5})$$

Продифференцируем это уравнение по времени. Учитывая, что $I = dq/dt$, получим

$$L \frac{d^2I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0. \quad (\text{В.6})$$

Разделим уравнение на L и введём обозначения:

$$\gamma = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \quad (\text{В.7})$$

γ носит название коэффициента затухания, ω_0 — собственная частота контура.

Обозначив дифференцирование по времени точкой, получим

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega_0^2 I = 0. \quad (\text{В.8})$$

Легко показать, что такой же вид имеют уравнения для заряда q и напряжения на конденсаторе U_C .

Линейными дифференциальными уравнениями второго порядка вида (В.8) описывается обширный класс колебательных систем как электрических, так и механических. Уравнение (В.8) включает в себя саму функцию I и её производные разных порядков. Такими функциями, которые пропорциональны своим производным, являются \sin , \cos , \exp . А так как \sin и \cos могут быть представлены в виде экспоненты, проще всего искать решение такого уравнения с помощью подстановки

$$I = A \cdot e^{\lambda t}, \quad (\text{В.9})$$

где A и λ — некие константы.

Подстановка (В.9) в (В.8) приводит к так называемому характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (\text{В.10})$$

Это уравнение определяет два возможных значения λ :

$$\lambda_{1-2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{В.11})$$

Общее решение уравнения (В.8) имеет вид

$$I = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (\text{В.12})$$

и содержит две константы A_1 и A_2 , значения которых определяются начальными условиями задачи. Чаще всего в начальный момент времени ток в контуре отсутствует ($I = 0$), и задан начальный заряд конденсатора q_0 или напряжение на нём U_0 . Положив в (В.12) $t = 0$, получим

$$A_1 + A_2 = 0. \quad (\text{В.13})$$

Подстановка $I = 0$, $U_C = U_0$ в исходное уравнение (В.4) даёт

$$U_0 = -L \cdot (\dot{I})_0. \quad (\text{В.14})$$

Вычисляя из (В.12) $(\dot{I})_0$ при $t = 0$, с помощью (В.14) найдём:

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 = -\frac{U_0}{L}. \quad (\text{В.15})$$

Уравнения (В.13) и (В.15) позволяют определить A_1 и A_2 :

$$A_1 = -\frac{U_0}{2L\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}; \quad A_2 = \frac{U_0}{2L\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}.$$

Для упрощения записи введём обозначение

$$\varkappa = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

и подставим полученные значения A_1 и A_2 в (В.12):

$$I = -\frac{U_0}{L\varkappa} e^{-\gamma t} \frac{e^{\varkappa t} - e^{-\varkappa t}}{2}. \quad (\text{В.16})$$

В зависимости от соотношения между γ и ω_0 ток в контуре может по-разному меняться во времени.

1.2. Рассмотрим прежде всего случай, когда затухание мало: $\gamma < \omega_0$. При этом условии \varkappa будет мнимой величиной:

$$\varkappa = i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = i\omega. \quad (\text{В.17})$$

Подставляя (В.17) в (В.16), найдём:

$$I = -\frac{U_0}{L\omega} e^{-\gamma t} \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = -\frac{U_0}{L\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t. \quad (\text{В.18})$$

Как видно из (В.18), ток в контуре при $\gamma < \omega_0$ носит колебательный характер.

Величина γ определяет затухание колебаний: $\gamma = 1/\tau$, где τ — время, в течение которого амплитуда уменьшается в e раз.

Величина $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ носит название частоты свободных или собственных колебаний (не путать с собственной частотой ω_0). Период собственных колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (\text{В.19})$$

Вернёмся к уравнению (В.8). Если известно, что затухание в контуре мало ($\gamma < \omega_0$), то решение уравнения (В.8) можно сразу искать в синусоидальной форме:

$$I = e^{-\gamma t} (A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t) \quad \text{или} \quad I = B e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta).$$

Две последние формулы эквивалентны. Обе содержат две произвольных константы: A_1 и A_2 — в первом, B и θ — во втором случае. Нетрудно найти формулы, связывающие A_1 и A_2 с B и θ :

$$A_1 = B \cos \theta; \quad A_2 = B \sin \theta.$$

Если затухание мало, о затухающих колебаниях можно говорить, как о гармонических. В этом случае аргумент косинуса ($\omega t - \theta$) называют фазой, а коэффициент $B e^{-\gamma t}$ — амплитудой затухающих колебаний.

Если записать уравнение (В.8) для напряжения U_C на конденсаторе, то его решение при начальных условиях $t = 0$, $I = 0$, $U_C = U_0$ имеет вид

$$U_C = U_0 \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\gamma t} \cos(\omega t - \theta). \quad (\text{В.20})$$

Зависимости тока I и напряжения U_C от времени в режиме свободных затухающих колебаний представлены на рис. В.2.

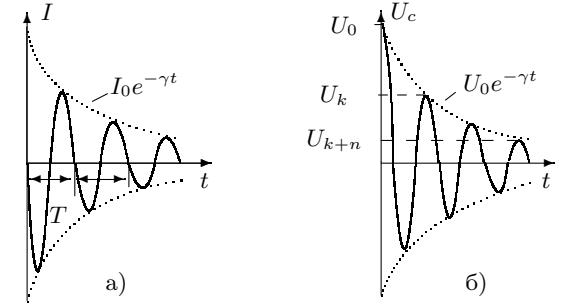


Рис. В.2. Затухающие колебания ($\gamma < \omega_0$)

Заметим, что при $\gamma \neq 0$ напряжение и ток не являются строго периодическими функциями времени, поскольку $U(t) \neq U(t + T)$. Говорить о периоде этой функции можно только в том смысле, что она принимает нулевые значения через равные промежутки времени.

Большой практический интерес представляет контур с очень слабым затуханием ($\gamma \ll \omega_0$). В этом случае $\omega \simeq \omega_0$, период

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{LC}, \quad (\text{В.21})$$

а временная зависимость $U_C(t)$ может быть представлена в виде

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t. \quad (\text{В.22})$$

1.3. В случае $\gamma > \omega_0$ оба корня характеристического уравнения (В.10) являются вещественными: поэтому уравнение (В.16) для тока имеет вид

$$I = -\frac{U_0}{L\kappa} e^{-\gamma t} \text{sh } \kappa t, \quad (\text{В.23})$$

а для напряжения U_C на конденсаторе —

$$U_C = U_0 e^{-\gamma t} \left(\frac{\gamma}{\kappa} \text{sh } \kappa t + \text{ch } \kappa t \right). \quad (\text{В.24})$$

Графики зависимости тока I и напряжения U_C от времени, соответствующие (В.23) и (В.24), изображены на рис. В.3. Как видно из графика, процесс не является колебательным. Такой процесс называют аperiодическим.

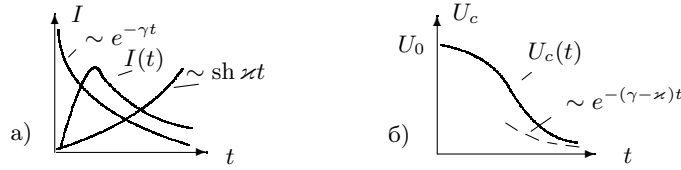


Рис. В.3. Аperiодический режим ($\gamma > \omega_0$)

1.4. Режим, соответствующий условию $\gamma = \omega_0$, называется критическим. При этом κ , а следовательно, и ω равны нулю. Предельный переход при $\omega \rightarrow 0$ даёт

$$I = -\frac{U_0}{L} t e^{-\gamma t}; \quad U_C = U_0 e^{-\gamma t} (1 + \gamma t). \quad (\text{В.25})$$

Приравнивая ω_0 и γ , из (В.7) найдём

$$R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (\text{В.26})$$

Формула (В.26) определяет критическое сопротивление контура. Графики зависимости I и U_C от времени для критического режима изображены на рис. В.4. При $R > R_{\text{кр}}$ процесс имеет аperiодический, а при $R < R_{\text{кр}}$ — колебательный характер.

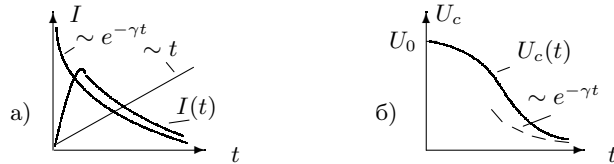


Рис. В.4. Критический режим ($\gamma = \omega_0$)

1.5. В колебательном режиме потери энергии в контуре принято характеризовать добротностью и логарифмическим декрементом затухания. Определим эти понятия. Назовем добротностью величину

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W_T}, \quad (\text{В.27})$$

где W — запасённая в колебательном контуре энергия, а ΔW_T — потеря энергии за период. Из уравнения (В.22) найдём

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} e^{-2\gamma t}.$$

Потеря энергии за период равна

$$\Delta W_T = \frac{CU_0^2}{2} (e^{-2\gamma t} - e^{-2\gamma(t+T)}) = W(1 - e^{-2\gamma T}).$$

Полагая $2\gamma T \ll 1$ (слабое затухание), найдём

$$\Delta W = \frac{1}{2\pi} \Delta W_T = \frac{\gamma T}{\pi} W,$$

поэтому добротность Q равна

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W_T} = \frac{W}{\Delta W} = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (\text{В.28})$$

При написании цепочки (В.28) были использованы выражения (В.21) для периода и (В.7) для собственной частоты ω_0 и затухания γ .

Средняя потеря энергии ΔW за время изменения фазы на один радиан в 2π раз меньше, чем ΔW_T . Таким образом, добротность контура Q показывает, во сколько раз запасённая в контуре энергия превосходит среднюю потерю энергии за время, в течение которого фаза колебаний изменяется на один радиан.

Введём логарифмический декремент затухания Θ — логарифм отношения двух последовательных амплитуд. Из (В.22) имеем

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \ln e^{\gamma T} = \gamma T. \quad (\text{В.29})$$

На практике для определения Θ удобно использовать отношение амплитуд, разделённых целым числом периодов n (рис. В.2). В этом случае формула для определения Θ имеет вид

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}. \quad (\text{В.30})$$

Можно определить физический смысл логарифмического декремента затухания: это величина, обратная числу периодов n_e , за которое амплитуда колебаний падает в e раз.

Сравнивая (В.28) и (В.29), найдём

$$Q = \frac{\pi}{\gamma T} = \frac{\pi}{\Theta} = \pi n_e. \quad (\text{В.31})$$

2. Вынужденные колебания. Метод комплексных амплитуд

2.1. Рассмотрим процессы, протекающие в контуре, подключённом к источнику внешней ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t$ (рис. В.5). Обозначим разность потенциалов на конденсаторе через U_C , а ток, текущий в контуре, через I . Сумма падений напряжения на элементах цепи равна ЭДС самоиндукции плюс ЭДС источника:

$$RI + U_C = -L \frac{dI}{dt} + \mathcal{E}_0 \cos \Omega t. \quad (\text{В.32})$$

Выразим U_C через заряд q на конденсаторе:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t. \quad (\text{В.33})$$

Учитывая, что $q = \int I dt$, окончательно получим:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = \mathcal{E}_0 \cos \Omega t. \quad (\text{В.34})$$

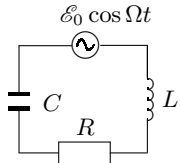


Рис. В.5.
Последовательный контур с внешней ЭДС

Решение линейного дифференциального уравнения (В.34) с правой частью состоит из общего решения однородного уравнения (которое уже было получено в предыдущем параграфе) и какого-либо частного решения уравнения с правой частью. Для нахождения этого решения воспользуемся методом комплексных амплитуд. Этот метод основан на следующем утверждении: пусть некоторая комплексная функция является решением линейного дифференциального уравнения

с вещественными коэффициентами и комплексной правой частью; тогда вещественная часть этой функции является решением того же уравнения, в правой части которого стоит вещественная часть прежнего выражения, а мнимая часть — решением уравнения с мнимой правой частью.

Исходя из сказанного, запишем уравнение (В.34) в комплексной форме:

$$L \frac{d\hat{I}}{dt} + R\hat{I} + \frac{\int \hat{I} dt}{C} = \hat{\mathcal{E}}_0 e^{i\Omega t}. \quad (\text{В.35})$$

Здесь $\hat{\mathcal{E}}_0$ — комплексная амплитуда внешнего напряжения: $\hat{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0 e^{i\varphi}$ («шляпкой» сверху будем обозначать комплексные величины, а индексом «0» — амплитудные значения).

Если начальная фаза $\varphi = 0$, то $\hat{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0$. Правая часть (В.34) является вещественной частью правой части (В.35). Решив уравнение (В.35), мы получим комплексное выражение для тока. Вещественная часть этого решения является, согласно указанному выше утверждению, решением исходного уравнения (В.34). Будем искать решение уравнения (В.35) в комплексном виде:

$$\hat{I} = \hat{I}_0 e^{i\Omega t}, \quad (\text{В.36})$$

где \hat{I}_0 — комплексная амплитуда тока. Подставляя (В.36) в (В.35) и сокращая на $e^{i\Omega t}$, найдём

$$\hat{I}_0 \left[R + i \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right) \right] = \mathcal{E}_0. \quad (\text{В.37})$$

Величину, стоящую в квадратных скобках, называют импедансом контура и обозначают обычно буквой Z :

$$Z = R + i \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right). \quad (\text{В.38})$$

Импеданс контура не зависит от начальных условий, не содержит ни токов, ни напряжений и определяется только свойствами элементов, соединённых в контур. Импеданс является, таким образом, характеристикой контура. Подстановка (В.38) в (В.37) даёт

$$\mathcal{E}_0 = Z \hat{I}_0. \quad (\text{В.39})$$

Полученное выражение является обобщением закона Ома для переменных токов. Роль сопротивления играет в нём импеданс контура Z .

Выражение для Z содержит действительную часть, называемую обычно активным сопротивлением контура, и мнимую часть, носящую название реактивного сопротивления или реактанса. Импеданс индуктивности равен $i\Omega L$, импеданс ёмкости $1/(i\Omega C)$, импеданс сопротивления — просто R . Правила сложения импедансов при последовательном и параллельном включении элементов те же, что и для обыкновенных сопротивлений.

Равенство (В.39) обладает характерной особенностью: правая его часть содержит произведение двух комплексных величин, а левая является действительной. Легко видеть, что это обстоятельство не носит принципиального характера и является случайным. Возьмём вместо (В.33) несколько более общее выражение для синусоидальной ЭДС

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\Omega t + \varphi). \quad (\text{В.40})$$

Фаза φ определяет начальные условия: в самом деле, при $t = 0$ напряжение не обязательно должно проходить через максимум, как это молчаливо предполагалось при написании (В.33). При переходе к (В.35) в правой части уравнения будет стоять уже не $\mathcal{E}_0 e^{i\Omega t}$, а $\widehat{\mathcal{E}}_0 e^{i\Omega t}$, где $\widehat{\mathcal{E}}_0$ является комплексной величиной:

$$\widehat{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0 e^{i\varphi}.$$

Связь между током и напряжением в этом случае снова определяется импедансом контура Z , но вместо (В.39) следует писать

$$\widehat{\mathcal{E}}_0 = Z \widehat{I}_0. \quad (\text{В.41})$$

Уравнение (В.41) имеет вполне общий характер.

Исследуем несколько более подробно свойства импеданса Z . Представим импеданс Z в показательной форме:

$$Z = |Z| e^{i\psi}; \quad |Z| = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}; \quad \psi = \arctg \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}. \quad (\text{В.42})$$

Разрешим уравнение (В.41) относительно \widehat{I}_0 и перейдём от комплексного к действительному выражению для тока. Как было сказано выше, для этого достаточно взять действительную часть \widehat{I} :

$$I = \text{Re}(\widehat{I}_0 e^{i\Omega t}) = \text{Re}\left(\frac{\widehat{\mathcal{E}}_0}{|Z|} e^{i\Omega t}\right) = \text{Re}\left(\frac{\mathcal{E}_0 e^{i\varphi}}{|Z| e^{i\psi}} e^{i\Omega t}\right) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \cos(\Omega t + \varphi - \psi). \quad (\text{В.43})$$

Сравнивая (В.43) и (В.40), найдём, что ток отстаёт от напряжения по фазе на величину ψ , определяемую отношением мнимой и действительной частей импеданса. Амплитуда колебаний обратно пропорциональна модулю импеданса $|Z|$.

2.2. Рассмотрим несколько частных случаев.

а. К источнику синусоидального напряжения подключено только чисто активное сопротивление R . В этом случае из формул (В.42) следует,

что $\psi = 0$. Ток в активном сопротивлении совпадает по фазе с напряжением на нём.

б. К источнику подключена только ёмкость C (конденсатор без потерь). При этом $\psi = -\pi/2$. Ток опережает напряжение по фазе на $\pi/2$.

в. К источнику подключена только катушка самоиндукции с индуктивностью L , активное сопротивление которой $R_L = 0$. При этом $\psi = \pi/2$. Ток в цепи отстаёт по фазе от напряжения на $\pi/2$.

г. В общем случае, когда к источнику последовательно подключены резистор, конденсатор и катушка самоиндукции, сдвиг фазы между током и входным напряжением лежит в пределах: $-\pi/2 < \psi < +\pi/2$.

Импедансы реальных конденсаторов и катушек самоиндукции содержат кроме мнимой также и действительную часть. Действительная часть импеданса определяется необратимыми потерями энергии, которые могут быть связаны как с омическим сопротивлением проводников, так и с другими причинами: с утечками и диэлектрическими потерями в конденсаторах, с потерями на перемагничивание (петля гистерезиса) и токами Фуко в ферромагнитных сердечниках. Особенно велика бывает обычно действительная часть импеданса у катушек самоиндукции.

Потери в конденсаторах и в катушках зависят как от частоты, так и от амплитуды проходящего через них тока. Поэтому, приводя величину эквивалентного сопротивления потерь (действительной части импеданса) в этих элементах, следует указывать частоту и амплитуду тока, при которых проведены измерения.

2.3. Решения, полученные методом комплексных амплитуд, допускают простую геометрическую интерпретацию. Комплексное число $Z = Z_0 e^{i\psi}$ представляется в комплексной плоскости вектором, длина которого равна Z_0 . Угол, составляемый вектором с вещественной осью, равен ψ . Комплексное напряжение $\mathcal{E}_0 e^{i\Omega t}$ или комплексный ток $I_0 e^{i(\Omega t - \psi)}$ представляются поэтому векторами, вращающимися с угловой скоростью Ω .

Удобно перейти к системе координат, которая сама вращается с угловой скоростью Ω . В этой системе векторы \mathcal{E} и I будут неподвижны. Длины векторов пропорциональны амплитудным значениям напряжения и тока. Вектор I повёрнут относительно \mathcal{E} на угол, равный сдвигу фаз между ними. Такие диаграммы называются **векторными**.

Построим векторную диаграмму напряжений для контура, изображённого на рис. В.6. К источнику переменного напряжения $\mathcal{E}_0 \cos \Omega t$ последовательно подключены резистор R , катушка индуктивности L , действительная часть импеданса которой равна r_L , и ёмкость C . Четыре вольтметра измеряют напряжения на элементах цепи, амперметр измеряет ток.

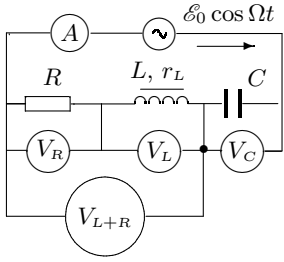


Рис. В.6. Последовательный контур

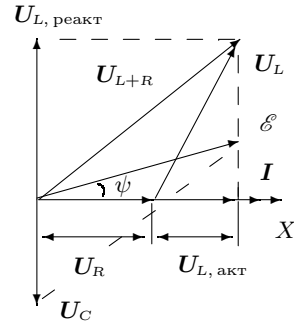


Рис. В.7. Векторная диаграмма (последовательный контур)

Поскольку во всех элементах цепи течёт один и тот же ток I , удобно положить его фазу равной нулю и отсчитывать от неё фазы напряжений на всех элементах цепи. Отложим вектор I вдоль оси абсцисс (рис. В.7).

Напряжение на резисторе совпадает по фазе с током, поэтому вектор U_R также будет направлен вдоль оси абсцисс. Напряжение на конденсаторе (без потерь) отстаёт по фазе от тока на угол $\psi = \pi/2$, поэтому вектор напряжения U_C направлен вниз вдоль оси ординат. Векторное равенство напряжений $U_{L+R} = U_L + U_R$ позволяет построить треугольник по трём сторонам. Сделаем две насечки: первую — радиусом, равным модулю вектора U_{L+R} , из начала вектора U_R (начала координат); вторую — радиусом, равным модулю вектора U_L , из конца вектора U_R . Точка пересечения насечек определяет положение векторов U_{L+R} и U_L на диаграмме. Сложив векторы U_{L+R} и U_C , получим вектор входного напряжения на контуре. Угол ψ показывает, каков сдвиг фаз между током и напряжением в цепи.

Разложим теперь вектор U_L по осям координат. Проекция U_L на ось абсцисс позволяет определить $U_{L, \text{акт}}$ — напряжение на активной части импеданса катушки, а проекция на ось ординат даёт реактивную часть $U_{L, \text{реакт}}$. Поделив эти напряжения на ток I , найдём действительную часть импеданса катушки r_L и мнимую ΩL .

3. Вынужденные колебания. Резонанс

3.1. Снова рассмотрим процессы, протекающие в последовательном контуре (рис. В.5), подсоединённом к внешней ЭДС.

Продифференцируем уравнение (В.34) по времени

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = -\mathcal{E}_0 \Omega \sin \Omega t.$$

Разделим обе части уравнения на L и воспользуемся обозначениями (В.7):

$$\ddot{I} + 2\gamma \dot{I} + \omega_0^2 I = -\mathcal{E}_0 \frac{\Omega}{L} \sin \Omega t. \quad (\text{В.44})$$

Для нахождения решения этого уравнения воспользуемся методом комплексных амплитуд. Заменим $\sin \Omega t$ в правой части уравнения (В.44) на $e^{i\Omega t}$. Вместо уравнения (В.44) мы получим уравнение в комплексной форме:

$$\hat{\ddot{I}} + 2\gamma \hat{\dot{I}} + \omega_0^2 \hat{I} = -\mathcal{E}_0 \frac{\Omega}{L} e^{i\Omega t}. \quad (\text{В.45})$$

Напомним, что общее решение уравнения (В.45) складывается из решения I_1 однородного уравнения, правая часть которого равна нулю, и любого частного решения I_2 неоднородного уравнения.

Будем искать частное решение (В.45) в комплексном виде:

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_0 e^{i\Omega t}, \quad (\text{В.46})$$

где \hat{I}_0 — комплексная амплитуда тока. Подставляя (В.46) в (В.45) и сокращая на $e^{i\Omega t}$, получим

$$\hat{I}_0 = \frac{\mathcal{E}_0 \frac{\Omega}{L}}{\Omega^2 - \omega_0^2 - 2i\gamma\Omega}. \quad (\text{В.47})$$

Представим знаменатель этого уравнения в показательной форме:

$$\Omega^2 - \omega_0^2 - 2i\gamma\Omega = \rho_0 e^{i\psi}. \quad (\text{В.48})$$

Легко видеть, что модуль этого выражения равен

$$\rho_0 = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}, \quad (\text{В.49})$$

а фаза ψ определяется формулой

$$\text{tg } \psi = \frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Подставляя (В.47) и (В.48) в (В.46), найдём

$$\hat{I}_2 = \frac{\mathcal{E}_0 \Omega}{L \rho_0} e^{i(\Omega t - \psi)},$$

и, следовательно,

$$I_2 = \text{Im } \hat{I}_2 = \frac{\mathcal{E}_0 \Omega}{L \rho_0} \sin(\Omega t - \psi). \quad (\text{В.50})$$

Решение I_1 однородного уравнения (уравнения (В.45) с нулевой правой частью) при $\gamma < \omega_0$ можно записать (см. (В.20)) в виде

$$I_1 = Be^{-\gamma t} \sin(\omega t - \theta). \quad (\text{В.51})$$

Общее решение (В.45) является суммой I_1 и I_2 . С помощью (В.50) и (В.51) получаем

$$I = Be^{-\gamma t} \sin(\omega t - \theta) + \frac{\mathcal{E}_0 \Omega}{L \rho_0} \sin(\Omega t - \psi). \quad (\text{В.52})$$

Это решение содержит две произвольные постоянные — B и θ , которые определяются из начальных условий.

Формула (В.52) показывает, что при подключении контура к синусоидальной ЭДС в нём возникают колебания двух частот: собственные с частотой ω и вынужденные с частотой внешнего источника Ω . Амплитуда собственных колебаний $Be^{-\gamma t}$ зависит от начальных условий и постепенно затухает. Со временем она становится пренебрежимо малой, и в контуре остаются только вынужденные колебания, амплитуда которых не зависит от времени и, в существенной мере, определяется отношением Ω/ω_0 . Действительно, амплитуда вынужденных колебаний равна

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0 \Omega}{L \rho_0} = \frac{\mathcal{E}_0 \Omega / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma \Omega)^2}} = \frac{\mathcal{E}_0 / (2\gamma L)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega_0}{2\gamma}\right)^2}}. \quad (\text{В.53})$$

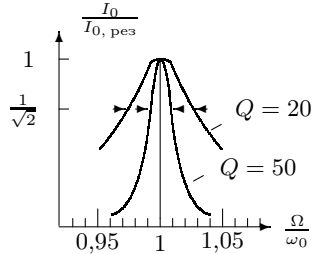


Рис. В.8. Резонансные кривые

ной кривой. При $\Omega \neq \omega_0$ имеем

$$\frac{I_0}{I_{0, \text{рез}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{4\gamma^2} \left(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (\text{В.55})$$

Уравнение (В.55) определяет форму резонансной кривой (рис. В.8). Положение максимума и ширина этой кривой зависят от добротности контура:

3.2. При совпадении частоты Ω внешнего источника с собственной частотой контура ω_0 возникает резонанс, при этом амплитуда вынужденных колебаний $I_{0, \text{рез}}$ достигает своего максимального значения:

$$I_{0, \text{рез}} = \frac{\mathcal{E}_0}{2\gamma L} = \frac{\mathcal{E}_0}{R}. \quad (\text{В.54})$$

График зависимости амплитуды установившихся колебаний I_0 от частоты внешнего напряжения Ω носит название резонансной кривой.

$\omega_{\text{рез}} = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(2Q)^2}$; при $Q \gg 1$ резонансный максимум оказывается узким, так что в области резонанса

$$\frac{\Delta \Omega}{\omega_0} = \frac{|\Omega - \omega_0|}{\omega_0} \ll 1.$$

В этом случае формула (В.55) принимает более простой вид:

$$\frac{I_0}{I_{0, \text{рез}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{2\Delta \Omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (\text{В.56})$$

Чаще всего форму резонансной кривой характеризуют шириной $2\Delta \Omega$, измеренной на уровне $I_{0, \text{рез}}/\sqrt{2}$. Подставляя в (В.56) величину $I_0/I_{0, \text{рез}} = 1/\sqrt{2}$, найдём, что ширина кривой и добротность контура связаны соотношением:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta \Omega}. \quad (\text{В.57})$$

3.3. Для сравнения рассмотрим вынужденные колебания в параллельном контуре, одна из ветвей которого содержит индуктивность L , а другая — ёмкость C (рис. В.9). Такой контур широко используется в радиотехнике — например, в качестве нагрузки широкополосного усилителя.

Обозначим через r_L активное сопротивление катушки. Активным сопротивлением ёмкостной ветви контура обычно можно пренебречь. Рассмотрим установившиеся колебания в контуре, когда напряжение на нём меняется по гармоническому закону: $U = U_0 \cos \Omega t$.

Введём обозначения для комплексных сопротивлений (импедансов) индуктивной и ёмкостной ветвей контура:

$$Z_L = r_L + i\Omega L \quad \text{и} \quad Z_C = \frac{1}{i\Omega C}.$$

Тогда полный импеданс контура может быть найден по правилу сложения параллельных сопротивлений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z} &= \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{r_L + i\Omega L} + i\Omega C = \\ &= \frac{1 - \Omega^2 LC + ir_L \Omega C}{r_L + i\Omega L} = \frac{1 - (\Omega/\omega_0)^2 + ir_L \Omega C}{r_L + i\Omega L}, \end{aligned}$$

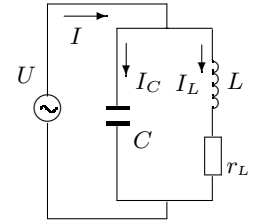


Рис. В.9. Параллельный контур

где ω_0 — собственная частота колебательного контура ($\omega_0^2 = 1/(LC)$).

В резонансе, когда частота внешней вынуждающей силы совпадает с собственной частотой ($\Omega = \omega_0$),

$$Z_{\text{рез}} = \frac{L}{r_L C} - i \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{L}{Cr_L} \left(1 - i \frac{r_L}{\omega_0 L} \right).$$

Сопротивление контура равно модулю импеданса Z :

$$R_{\text{рез}} = |Z|_{\text{рез}} = \frac{L}{Cr_L} \sqrt{1 + \left(\frac{r_L}{\omega_0 L} \right)^2}.$$

Сдвиг фаз между полным током в цепи и напряжением определяется отношением мнимой части импеданса к действительной:

$$\text{tg } \psi = \frac{r_L}{\omega_0 L}.$$

В случае, когда активная часть импеданса индуктивной ветви много меньше реактивной ($r_L \ll \omega_0 L$),

$$R_{\text{рез}} = \frac{L}{Cr_L}. \quad (\text{B.58})$$

Реактивные сопротивления обеих ветвей контура при резонансе равны, поэтому, введя обозначение

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (\text{B.59})$$

можно записать

$$R_{\text{рез}} = \frac{\omega_0^2 L^2}{r_L} = \frac{1}{r_L \omega_0^2 C^2} = \frac{\rho^2}{r_L}. \quad (\text{B.60})$$

Реактивное сопротивление ρ — одна из характеристик резонансного контура, не зависящая от частоты внешнего источника.

Учитывая, что добротность контура Q может быть выражена через активное и реактивное сопротивления:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r_L} = \frac{1}{r_L \omega_0 C} = \frac{\rho}{r_L}, \quad (\text{B.61})$$

получим ещё одну удобную для расчётов резонансного сопротивления формулу:

$$R_{\text{рез}} = Q \cdot \rho. \quad (\text{B.62})$$

При резонансе значения токов в ветвях контура $I_{L, \text{рез}}$, $I_{C, \text{рез}}$ и полного тока в контуре $I_{\text{рез}}$ связаны с напряжением на контуре простыми соотношениями:

$$I_{L, \text{рез}} = \frac{U}{\omega_0 L} = \frac{U}{\rho}; \quad (\text{B.63})$$

$$I_{C, \text{рез}} = U \omega_0 C = \frac{U}{\rho}; \quad (\text{B.64})$$

$$I_{\text{рез}} = \frac{U}{Q \rho}. \quad (\text{B.65})$$

Из этих выражений видно, что при резонансе токи в индуктивной и емкостной ветвях контура одинаковы и в Q раз больше тока в общей цепи:

$$Q = \frac{I_{C, \text{рез}}}{I_{\text{рез}}} = \frac{I_{L, \text{рез}}}{I_{\text{рез}}}. \quad (\text{B.66})$$

Параллельный колебательный контур часто используется в качестве нагрузочного сопротивления в цепи с постоянной амплитудой тока. Найдём уравнение резонансной кривой для напряжения на таком контуре. Импеданс параллельного контура

$$Z = \frac{r_L + i\Omega L}{1 - (\Omega/\omega_0)^2 + ir_L \Omega C}.$$

В случае, когда $r_L \ll \Omega L$, сопротивление контура

$$|Z| = \frac{\Omega L}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega_0)^2]^2 + (r_L \Omega C)^2}}.$$

Используем это выражение для выявления частотных свойств параллельного контура, используемого в качестве нагрузочного сопротивления. Если амплитуда I_0 общего тока, протекающего через колебательный контур (рис. В.9), поддерживается постоянной (например, анодный ток в случае электронной лампы), то амплитуда напряжения на контуре пропорциональна сопротивлению контура:

$$U_0 = I_0 |Z| = \frac{I_0 \Omega L}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega_0)^2]^2 + (r_L \Omega C)^2}}.$$

Отсюда амплитуда напряжения при резонансе ($\Omega = \omega_0$)

$$U_{0, \text{р}} = I_0 \frac{L}{r_L C}.$$

Уравнение резонансной кривой напряжения на контуре будет иметь вид

$$\frac{U_0(\Omega)}{U_{0,p}} = \frac{r_L \Omega C}{\sqrt{[1 - (\Omega/\omega_0)^2]^2 + (r_L \Omega C)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\Omega} - \frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (\text{B.67})$$

Полученное уравнение резонансной кривой для напряжения на параллельном контуре полностью совпадает с уравнением резонансной кривой для тока в последовательном контуре (B.55). Подчеркнём, что это имеет место при двух условиях: 1) амплитуда общего тока через параллельный контур не зависит от частоты генератора; 2) действительная часть импеданса катушки $r_L \ll \Omega L$ при частотах вблизи резонансной частоты ω_0 .

3.4. Векторная диаграмма для резонанса токов показана на рис. В.10. По горизонтали отложено общее напряжение $U_L = U_C$.

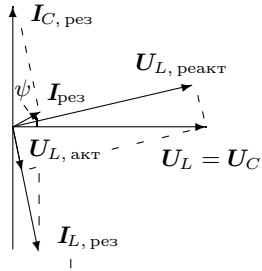


Рис. В.10. Векторная диаграмма для параллельного контура

Ток через ёмкость, опережающий напряжение на $\pi/2$, отложен вертикально вверх (конденсатор без потерь). Три вектора тока I_L , I_C и полный ток I образуют треугольник. Для его построения сделаем две насечки: первую — радиусом $|I|$ — из начала вектора I_C (из начала координат), вторую — радиусом $|I_L|$ — из конца вектора I_C . Точка пересечения насечек определяет положение векторов I и I_L на диаграмме. В контуре с хорошей добротностью вектор I практически горизонтален, а токи

I_L и I_C практически равны.

Перпендикуляр, опущенный из конца вектора U_L на вектор тока I_L , определяет $U_{L, акт}$ — активную часть напряжения на катушке. Активная $U_{L, акт}$ и реактивная $U_{L, реакт}$ составляющие напряжения на катушке взаимно перпендикулярны и в сумме равны U_L — полному напряжению на катушке. Поделив $U_{L, акт}$ и $U_{L, реакт}$ на ток в катушке, определим r_L — активную и ΩL — реактивную части импеданса катушки.

3.5. При $r_L \rightarrow 0$ сопротивление контура при резонансе $R_{рез} \rightarrow \infty$, как это следует из формулы (B.58). В этом случае ток в общей цепи $I_{рез} \rightarrow 0$, хотя каждый из токов $I_{L, рез}$ и $I_{C, рез}$ может иметь большую величину.

Можно, не пренебрегая величиной r_L по сравнению с $\omega_0 L$, выразить сопротивление контура и сдвиг фаз при резонансе через добротность:

$$R_{рез} = |Z|_{рез} = \frac{L}{Cr_L} \sqrt{1 + \left(\frac{r_L}{\omega_0 L}\right)^2} = \frac{L}{Cr_L} \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}; \quad (\text{B.68})$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{r_L}{\omega_0 L} = \frac{1}{Q}. \quad (\text{B.69})$$

Отсюда следует, что в параллельном контуре при резонансе ($\Omega = \omega_0$) условие минимума полного тока в цепи и условие отсутствия сдвига фаз между полным током и напряжением на контуре совпадают только для контура с хорошей добротностью ($Q \gg 1$).

Условия резонанса токов в параллельном контуре и резонанса напряжений в последовательном контуре совпадают: $\Omega = \omega_0$, но если в последовательном контуре резонансное сопротивление контура всегда равно чисто активному сопротивлению цепи и минимально (максимум тока), то в параллельном контуре $R_{рез}$ обратно пропорционально r_L и максимально (минимум полного тока). Сдвиг фаз при резонансе напряжений всегда равен нулю, а при резонансе токов его можно считать равным нулю только, если $Q \gg 1$. Впрочем, как правило, о резонансе и добротности говорят только тогда, когда добротность контура достаточно велика.

4. Процесс установления колебаний

4.1. Рассмотрим процесс установления колебаний в контуре с высокой добротностью вблизи резонанса. Этот процесс описывается формулой (B.52). При начальных условиях ($U = 0$, $\dot{U} = 0$) формула (B.52) в области $|\Omega - \omega_0| \ll \omega_0$ приобретает вид

$$U = U_0 [\cos(\Omega t - \psi) - e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t - \psi)], \quad (\text{B.70})$$

где через U_0 обозначена амплитуда вынужденных колебаний.

Действительно, подстановка начальных условий в уравнение (B.52) приводит к системе двух уравнений относительно B и θ :

$$B \cos \theta + U_0 \cos \psi = 0;$$

$$B\gamma \cos \theta - B\omega \sin \theta - U_0 \Omega \sin \psi = 0.$$

Решение этой системы при стремлении Ω к ω_0 имеет вид

$$\lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} \theta = \psi; \quad \lim_{\Omega \rightarrow \omega_0} B = -U_0.$$

Как видно из (B.70), напряжение U содержит два близких по частоте колебания, между которыми происходят биения. Появление биений связано с тем, что разность фаз этих колебаний медленно меняется; при нулевой разности фаз они вычитаются друг из друга, а при расхождении фаз на π — складываются. Время, необходимое для изменения разности фаз на π , равно

$$t_1 = \frac{\pi}{|\Omega - \omega_0|}.$$

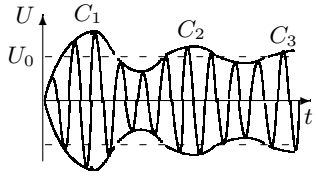


Рис. В.11. Биения ($\Omega \simeq \omega_0$)

На рисунке В.11 представлена форма колебаний в том случае, когда Ω и ω_0 мало отличаются друг от друга. При установлении колебаний их амплитуда то растёт, то падает, испытывая биения. Точки максимальных амплитуд C_1, C_2, C_3 и т. д. постепенно понижаются. Лишь когда экспонента $e^{-\gamma t}$ достаточно затухнет, биения прекратятся, и колебания станут синусоидальными.

4.2. При очень близких частотах Ω и ω_0 биения не возникают, так как за время t_1 (а это время становится очень большим) собственные колебания успевают затухнуть. Это происходит при условии

$$t_1 \gamma = \frac{\gamma \pi}{|\Omega - \omega_0|} \gg 1. \quad (\text{В.71})$$

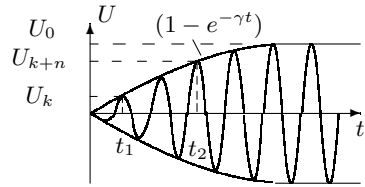


Рис. В.12. Нарастание колебаний ($\Omega = \omega_0$)

Преобразуя это выражение с помощью (В.28), найдём

$$\Delta \Omega \ll \omega / Q$$

— отклонение от резонансной частоты много меньше ширины резонансной кривой. При выполнении этого условия нет смысла различать Ω и ω_0 , и формула (В.70) становится особенно простой:

$$U = U_0 (1 - e^{-\gamma t}) \cos(\omega_0 t - \psi). \quad (\text{В.72})$$

Амплитуда колебаний в этом случае возрастает (рис. В.12), экспоненциально приближаясь к U_0 . По форме огибающей нетрудно определить логарифмический декремент затухания Θ . Рассмотрим два момента времени t_1 и t_2 , отстоящих друг от друга на n периодов. Амплитуды колебаний $U_k(t_1)$ и $U_{k+n}(t_2)$ равны соответственно:

$$U_k = U_0 (1 - e^{-\gamma t_1});$$

$$U_{k+n} = U_0 (1 - e^{-\gamma(t_1+nT)}).$$

Из этих равенств найдём

$$\Theta = \gamma T = \frac{1}{n} \ln \frac{U_0 - U_k}{U_0 - U_{k+n}}. \quad (\text{В.73})$$

4.3. В заключение напомним об основной характеристике электрического контура — добротности. Энергетический смысл добротности — отношение запасённой в контуре энергии W к потерям за период ΔW_T , умноженное на 2π (см. В.28):

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W_T}.$$

Запасённая энергия сосредоточена в чисто реактивных элементах — индуктивности L и ёмкости C , а потери связывают с протеканием тока по чисто диссипативному элементу — резистору R , при этом добротность, выраженная через отношение сопротивлений, равна [см. (В.28)]

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Добротность контура можно выразить через коэффициент затухания γ или через логарифмический декремент затухания Θ :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{\Theta} = \pi n_e, \quad (\text{В.74})$$

где n_e — число колебаний, которое совершит колебательный контур, прежде чем амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

Добротность последовательного контура (рис. В.8) может быть найдена по измеренным значениям напряжений $U_{C, \text{рез}}$ на конденсаторе и \mathcal{E}_0 на входе контура при резонансе [см. (В.54)]:

$$Q = \frac{U_{C, \text{рез}}}{\mathcal{E}_0},$$

а для параллельного контура (рис. В.12) добротность — это отношение токов [см. (В.66)]:

$$Q = \frac{I_{C, \text{рез}}}{I_{\text{рез}}},$$

где $I_{C, \text{рез}}$ — ток через конденсатор, а $I_{\text{рез}}$ — общий ток при резонансе. И, наконец, добротность характеризует резонансные свойства линейного колебательного контура: она численно равна величине, обратной относительной ширине резонансной кривой (рис. В.8) на уровне 0,7 [см. (В.57)]:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta\Omega}.$$

Можно также рассчитать добротность как величину, обратную относительной ширине кривой, выражающей зависимость сдвига фаз ψ между

током и напряжением в последовательном контуре от частоты: $\psi = f(\frac{\Omega}{\omega_0})$. Ширину следует измерять там, где сдвиг фаз $\psi = \pi/4$. Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. Гл. X, §§ 122–132.
2. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977. Гл. XX, XXI.
3. *Кингсен А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы Физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика. — М.: Физматлит, 2001. Ч. II, гл. 3, гл. 8.

4.2. Дробовой шум (эффект Шоттки)

Цель работы: измерение заряда электрона по дробовому шуму

В работе используются: стенд для измерения дробового шума, состоящий из шумового диода, блока питания, широкополосного усилителя, квадратичного детектора и кварцевого генератора синусоидальных колебаний.

Как хорошо известно, прохождение электрического тока через вакуумную лампу связано с движением электронов, испускаемых накалившимся катодом и движущихся к аноду под действием электрического поля. Прохождение электрического тока не является поэтому непрерывным процессом. Ток состоит из наложения кратковременных импульсов, возникающих при прохождении отдельных электронов. Эти импульсы случайным образом распределены во времени, вследствие чего электрический ток флуктуирует. При этом на средний — постоянный — ток накладывается флуктуационный шум. Наличие в токе шумовой составляющей, связанной с дискретностью заряда электронов, носит название эффекта Шоттки (1918). Это один из немногих способов измерения абсолютного заряда электрона, наряду с опытом Милликена и электролизом. Флуктуации анодного тока — при заданной его величине — пропорциональны заряду электрона, поэтому, исследуя их, можно измерить заряд электрона.

Рассмотрим, как меняется во времени ток, проходящий во внешней цепи электронной лампы (диода), при движении через неё отдельного электрона. Пока из катода не вылетит электрон, тока в цепи лампы нет. Ток появляется, когда электрон покидает катод, и кончается, когда он приходит на анод. Распределение этого тока во времени носит сложный характер, зависящий от геометрии электродов, от распределения потенциалов в межэлектродном пространстве и от скорости электронов.

В дальнейшем нас не будет интересовать форма токового импульса. Нам достаточно знать, что этот импульс является очень кратковременным ($\sim 10^{-8}$ с) и что за время этого импульса $\int I dt = e$, где e — заряд электрона. Будем рассматривать режим насыщения диода, когда пространственный заряд в межэлектродном пространстве отсутствует и анодный ток зависит только от количества электронов, испущенных катодом.

Для обнаружения дробового шума в анодную цепь лампы включена нагрузка — параллельный колебательный контур (рис. 1). Токковый импульс, связанный с прохождением электрона через диод, приводит к зарядке конденсатора C , который входит в состав контура LCR . В контуре возникают электрические колебания. Следующие электроны — в зависимости от фазы колебаний контура — усиливают или ослабляют колебательный процесс. Постепенно в контуре возбуждаются колебания, амплитуда и фаза которых случайным образом меняются во времени. Кроме заряда, связанного с колебательным процессом, на конденсаторе есть, конечно, заряд, возникающий из-за наличия среднего тока. Этот заряд нас интересовать не будет. Среднее значение амплитуды колебаний контура может быть найдено из энергетических соображений. Установившееся значение амплитуды определяется тем, что средняя энергия, которую приносят электроны на конденсатор, равна энергии, которая рассеивается в колебательном контуре.

Пусть при электрических колебаниях в контуре мгновенное значение напряжения на конденсаторе равно

$$U = U_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

До пролёта очередного электрона заряд на конденсаторе равен $q_1 = CU_0 \cos \omega t$, а после пролёта он принимает значение q_2 :

$$q_2 = q_1 + e = CU_0 \cos \omega t + e. \quad (2)$$

Рассчитывая энергию конденсатора по формуле

$$W = \frac{q^2}{2C}, \quad (3)$$

найдем, что приход электрона увеличивает энергию конденсатора на ΔW :

$$\Delta W = \frac{q_2^2 - q_1^2}{2C} = \frac{2eCU_0 \cos \omega t + e^2}{2C}. \quad (4)$$

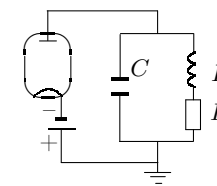


Рис. 1. Схема включения колебательного контура

Пусть в секунду через лампу проходят N электронов. Полное увеличение средней энергии конденсатора складывается из N слагаемых, определяемых формулой (4). При этом вклад от первого члена формулы обращается в нуль, так как электроны приходят на конденсатор в произвольные моменты времени, а среднее значение $\cos \omega t$ равно нулю. Средняя мощность, приносимая электронами на конденсатор, определяется поэтому только вторым слагаемым и равна

$$P = N \frac{e^2}{2C}. \quad (5)$$

Рассчитаем теперь потери в сопротивлении. Проходящий через него ток I_R складывается из постоянного тока I_{\equiv} и колебательного тока контура I_{\sim} . Выделяемая в сопротивлении мощность в среднем равна

$$\langle P_R \rangle = \langle I^2 R \rangle = R \langle (I_{\equiv} + I_{\sim})^2 \rangle, \quad (6)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени. Переменная составляющая тока может быть выражена через напряжение на конденсаторе:

$$I_{\sim} = \frac{dq}{dt} = -CU_0 \omega \sin \omega t. \quad (7)$$

Подставим (7) в (6), возведем сумму I_{\equiv} и I_{\sim} в квадрат и усредним результат по времени. Замечая, что среднее значение $\langle \sin \omega t \rangle = 0$, а $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$, найдём

$$\langle P_R \rangle = RI_{\equiv}^2 + R \langle I_{\sim}^2 \rangle = RI_{\equiv}^2 + \frac{1}{2} RC^2 U_0^2 \omega^2. \quad (8)$$

Таким образом, мощность, выделяемая в сопротивлении R , — это мощность, которую выделяют в нём постоянный ток диода и ток колебаний, возникающий в контуре из-за дробового шума.

Приравняем мощность (5), возбуждаемую электронами в контуре, к мощности $R \langle I_{\sim}^2 \rangle$, теряемой в сопротивлении из-за наличия колебаний:

$$N \frac{e^2}{2C} = \frac{1}{2} R (CU_0 \omega)^2. \quad (9)$$

Заметив, что $Ne = I_a$, а амплитудное значение напряжения на конденсаторе U_0 связано с эффективным значением $U_{\text{эфф}}$ обычным соотношением $U_{\text{эфф}}^2 = U_0^2/2$, найдём для заряда электрона e следующую формулу:

$$e = \frac{2\omega^2 C^3 R U_{\text{эфф}}^2}{I_a}. \quad (10)$$

Таким образом, измеряя ток I_a , проходящий через диод, и среднеквадратичное напряжение шума на контуре $U_{\text{эфф}}^2$, можно определить заряд электрона. Формула (10) может быть записана через добротность контура. Как известно, добротность контура Q связана с его параметрами формулой

$$Q = \frac{1}{\omega RC}. \quad (11)$$

Окончательная формула для расчёта заряда электрона имеет вид

$$e = \frac{2\omega C^2 U_{\text{эфф}}^2}{I_a Q}. \quad (12)$$

Вернёмся к сделанному при написании формулы (2) предположению о том, что при прохождении электрона через диод заряд конденсатора и, следовательно, его энергия возрастают мгновенно. Как ясно из вывода, это предположение не приводит к ошибкам, если аргумент косинуса в (2) за время прохождения токового импульса меняется незначительно. Уже упоминалось, что время пролёта электрона через диод τ по порядку величины равно 10^{-8} с. Контур настроен на частоту $f \simeq 10^5$ Гц. Следовательно,

$$\omega \tau = 2\pi f \tau \simeq 2\pi \cdot 10^5 \cdot 10^{-8} \approx 10^{-2} \ll 1.$$

Экспериментальная установка. Блок-схема установки изображена на рис. 2. В качестве шумового диода используется диод 2ДЗБ, работающий в режиме насыщения. В его анодную цепь включён параллельный колебательный контур LC . Активное сопротивление катушки L играет роль резистора R . Конденсатор C непосредственно включён в цепь контура при нижнем положении переключателя « U_{κ} » (его кнопка не нажата). Измерение напряжения на контуре производится квадратичным детектором. Перед измерениями сигнал, поступающий с контура, усиливается усилителем.

Усилитель и квадратичный детектор используются не только для измерения шумовых колебаний контура, но и для других целей. При измерении шумов важно, чтобы на усилитель не попали колебания с генератора, изображённого в правой части схемы. Для этого лучше всего заземлить выход аттенюатора. Это делается нажатием кнопки « $U_{\text{ш}}$ », что соответствует на схеме рис. 2 переводу его переключателя в верхнее положение.

Сила анодного тока шумового диода в режиме насыщения определяется эмиссией (а значит, температурой) его катода. Анодный ток I_a измеряется миллиамперметром и регулируется потенциометром R_a , ручка

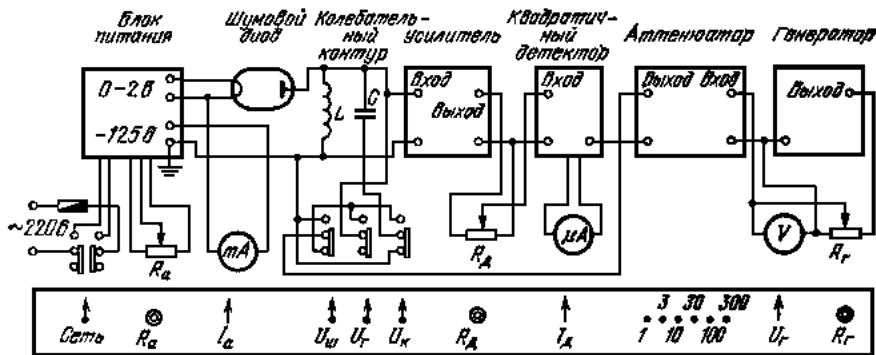


Рис. 2. Блок-схема установки для измерения дробового шума. Внизу изображена нижняя часть передней панели с ручками и кнопками управления

которого на панели прибора обозначена « R_a ». Чувствительность измерительной схемы регулируется делителем напряжения R_d , расположенным между усилителем и квадратичным детектором. Его ручка на панели обозначена « R_d ». На выходе квадратичного детектора установлен микроамперметр. Отклонение стрелки микроамперметра пропорционально квадрату напряжения на входе детектора, поэтому он пригоден для измерения переменных напряжений. Таким образом, показания микроамперметра пропорциональны квадрату шумового напряжения, причём коэффициент пропорциональности зависит от положения реостата R_d и, вообще говоря, неизвестен. Поэтому при измерениях экспериментатор замечает показание микроамперметра, а затем вместо сигнала с колебательного контура подаёт на вход усилителя калибровочный сигнал с настроенного на ту же частоту генератора. Этот сигнал измеряется вольтметром (обозначение « U_r » на панели) и ослабляется в точно известное число раз прецизионным аттенуатором. При измерениях напряжение на генераторе подбирается так, чтобы стрелка микроамперметра вернулась к отмеченному делению. В этом случае напряжение шумов равно известному напряжению, подаваемому на усилитель с аттенуатора. Делитель R_d во время этой процедуры, конечно, нельзя трогать.

Генератор используется не только для калибровки квадратичного детектора, но и для измерения добротности контура. Измерения производятся по методу Q -метра. Включим в контур генератор Γ (настроенный на собственную частоту контура), как это изображено на рис. 3. Выходное напряжение генератора U_r целиком падает на активном сопротивлении контура R . Поэтому $U_r = IR$, где I — ток в контуре. Найдём теперь

напряжение U_k , подаваемое на усилитель и измеряемое квадратичным детектором:

$$U_k = U_r - \frac{I}{i\omega C} = U_r - \frac{U_r}{i\omega RC} \approx \frac{iU_r}{\omega RC}.$$

При написании последнего равенства считалось, что контур обладает высокой добротностью, $Q = 1/\omega RC \gg 1$. Заменяя $1/\omega RC$ через добротность контура, найдём

$$Q = \frac{|U_k|}{|U_r|}. \quad (13)$$

Итак, для измерения добротности контура нужно сравнить напряжение на генераторе с напряжением на катушке самоиндукции. Напряжение на генераторе U_r измеряется вольтметром генератора (рис. 2). Измерение напряжения на катушке самоиндукции не так просто.

При измерении напряжения U_r , создаваемого генератором на катушке самоиндукции, необходимо учитывать и шумовое напряжение $U_{ш}$, имеющееся на катушке. Это напряжение при измерениях продолжает возбуждаться диодом, так как при измерениях добротности контура диод находится в рабочем режиме. Отключить диод при измерении нельзя, поскольку добротность контура от этого заметно изменится: при измерениях шума контур шунтирован диодом, что снижает его добротность; в этом положении и должна измеряться добротность контура. При включении генератора в контур на вход усилителя поступает не U_k , как показано на рис. 3, и не $U_{ш}$, а их сумма. При этом ток детектора I_d пропорционален $\langle (U_{ш} + U_k)^2 \rangle$. Сдвиг фаз между колебаниями $U_{ш}$ и U_k непрерывно изменяется. Поэтому

$$I_d \propto \langle (U_{ш} + U_k)^2 \rangle = \langle U_{ш}^2 \rangle + 2\langle U_{ш}U_k \rangle + \langle U_k^2 \rangle = \langle U_{ш}^2 \rangle + \langle U_k^2 \rangle,$$

в то время как до включения генератора ток детектора I_d был пропорционален $U_{ш}^2$.

Таким образом, U_k^2 пропорционально приращению тока квадратичного детектора, происходящему при включении напряжения U_r . Чтобы подставить это приращение в формулу (13), оно должно быть пересчитано в напряжение генератора. Это делается следующим образом. Нужно заметить показание квадратичного детектора при нулевом напряжении на

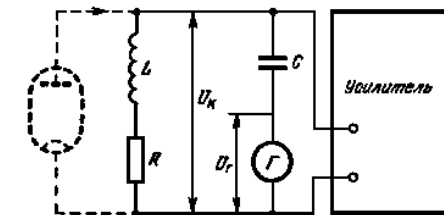


Рис. 3. Схема для измерения добротности колебательного контура

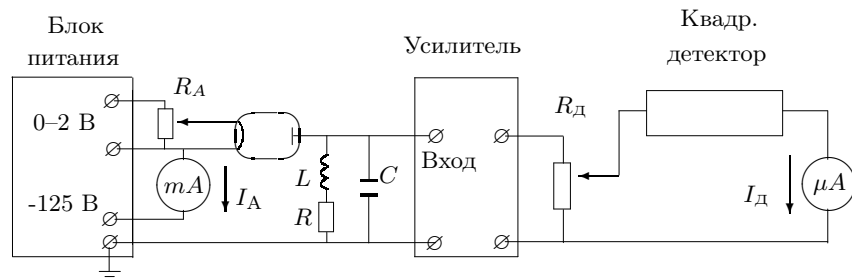


Рис. 4. Схема для измерения напряжения шума

выходе генератора. Затем нужно установить на выходе генератора некоторое напряжение U_{Γ} и зафиксировать приращение тока детектора $\Delta I_{\text{д}}$, вызванное напряжением генератора. После этого вместо колебательного контура на вход усилителя следует подключить генератор с аттенуатором. Сигнал с генератора и положение аттенуатора нужно подобрать таким образом, чтобы показание микроамперметра было равно измеренному ранее приращению $\Delta I_{\text{д}}$. Показание вольтметра генератора равно искомому напряжению $U_{\text{к}}$.

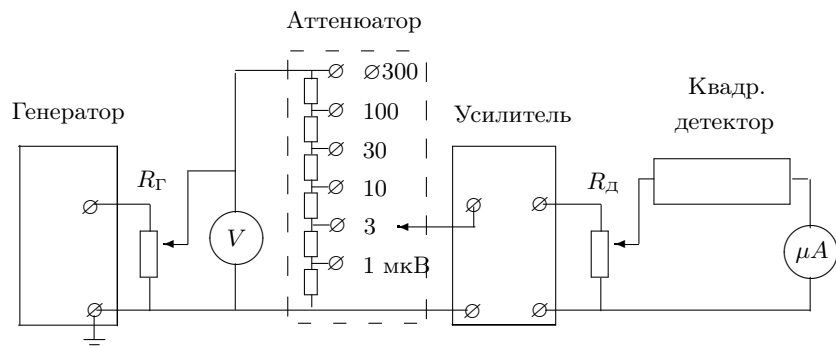


Рис. 5. Схема для измерения напряжения на генераторе

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается, измерив напряжение шумов, раскачивающих колебательный контур, и определив добротность этого контура, рассчитать заряд электрона.

Подробно правила выполнения работы изложены в ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ОПИСАНИИ, расположенном на установке.

1. Проведите проверку квадратичности детектора [$I_{\text{д}} = f(U_{\Gamma})$].
2. Проведите измерение напряжения шума для $I_{\text{А}} = 1 \text{ мА}$ (рис. 4).
3. При том же анодном токе определите добротность контура.
4. Повторите измерения по пунктам 2–3 ещё 5–6 раз при том же анодном токе (можно при другой чувствительности детектора).
5. Повторите измерения шума и добротности (2–4) при других значениях анодного тока в интервале 1–4 мА.
6. Запишите значения ёмкости и резонансной частоты колебательного контура, указанные на установке.

Обработка результатов

1. Постройте график $I_{\text{д}} = f(U_{\Gamma}^2)$ для проверки характера детектирования.
2. Вычислите среднюю величину заряда электрона для каждого значения тока анода. Представьте результаты в виде таблицы:

$I_{\text{А}}, \text{ мА}$	$U_{\text{эфф}}, \text{ мкВ}$	$\langle Q \rangle$	$e, \text{ Кл}$	$\langle e \rangle \pm \Delta e$	$e \text{ (табл.)}$

3. Определите заряд электрона, используя все полученные результаты, и оцените погрешность. Сравните полученное значение с табличным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белонучкин В.Е., Заикин Д.А., Циленюк Ю.М. Основы физики. Т. 2. Квантовая и статистическая физика. — М.: Физматлит, 2001. С. 296.
2. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976, § 5.

4.5. Свободные колебания в электрическом контуре

Цель работы: исследование отклика колебательного контура на периодические внешние импульсы.

В работе используются: генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин емкостей, индуктивность, электронный осциллограф, универсальный мост.

Исследуемый колебательный контур состоит из индуктивности L , ёмкости C и резистора R (рис. В.1). Конденсатор контура заряжается короткими одиночными импульсами, после каждого из которых в контуре

возникают свободные затухающие колебания. Подав напряжение с конденсатора на осциллограф, можно по картине, возникающей на экране осциллографа, определить период колебаний в контуре, исследовать затухание колебаний и определить основные параметры колебательного контура.

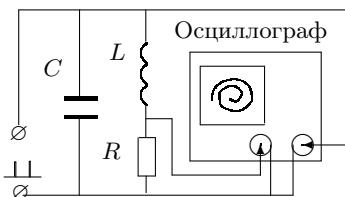


Рис. 1. Схема установки для наблюдения затухающих колебаний на фазовой плоскости

Картину колебаний можно представить не только в координатах (U, t) (рис. В.2), но и в координатах (U, \dot{U}) , или, как говорят, на фазовой плоскости. В этих координатах кривая незатухающих колебаний ($\gamma = 0$) имеет вид эллипса (или окружности — при одинаковых амплитудах U и \dot{U}), а картина реальных колебаний изображается сворачивающейся спиралью (рис. 1). Доказательство этих утверждений мы предоставляем читателю.

Схема подключения осциллографа для изучения колебаний на фазовой плоскости представлена на рис. 1. На вертикальный вход осциллографа подаётся напряжение U_C с конденсатора, а на горизонтальный — напряжение с резистора U_R ($U_R \sim I \sim dq/dt \sim dU_C/dt$).

Экспериментальная установка. На рис. 2 приведена схема для исследования свободных колебаний в контуре, содержащем постоянную индуктивность L и переменные ёмкость C и сопротивление R . Колебания наблюдаются на экране осциллографа.

Для периодического возбуждения колебаний в контуре используется генератор импульсов Г5-54. С выхода генератора по коаксиальному кабелю импульсы поступают на колебательный контур через электронное реле, смонтированное в отдельном блоке (или на выходе генератора). Реле содержит диодный тиристор¹ D и ограничительный резистор R_1 .

Импульсы с частотой $\nu_0 = 100$ Гц ($T_0 = 0,01$ с) заряжают конденсатор C . После каждого импульса генератор отключается от колебательного контура, и в контуре возникают свободные затухающие колебания. Входное сопротивление осциллографа велико (≈ 1 МОм), так что его влиянием на контур можно пренебречь. Для получения устойчивой картины затухающих колебаний используется режим ждущей развёртки с син-

¹ В схеме используется тиристор без управляющего электрода — полупроводниковый ключ, сопротивление которого зависит от напряжения на нём. При напряжениях выше порогового тиристор открывается, а при любом напряжении другого знака — закрывается. Благодаря этому сопротивление генератора не влияет на процессы в колебательном контуре.

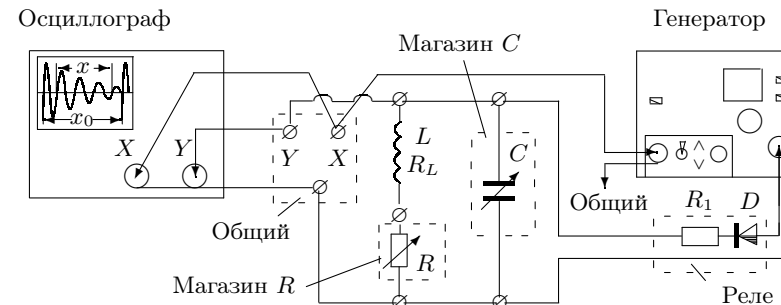


Рис. 2. Схема установки для исследования свободных колебаний

хронизацией внешними импульсами, поступающими с выхода «синхроимпульсы» генератора.

Измерив расстояние x_0 между импульсами на экране осциллографа и расстояние x , которое занимают n полных периодов, можно, зная T_0 , рассчитать период колебаний контура: $T = T_0 x / (n x_0)$.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость периода свободных колебаний контура от ёмкости, зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления, определить критическое сопротивление и добротность контура.

Подробно правила выполнения работы изложены в ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ОПИСАНИИ, расположенном на установке.

1. Соберите схему по рис. 2, и подготовьте к работе приборы.
2. Проведите измерения периодов для сопротивления $R = 0$, изменяя ёмкость от 0,02 мкФ до 0,9 мкФ (8–10 значений).
3. Приняв $L = 200$ мГн, рассчитайте ёмкость C , при которой собственная частота колебаний контура $\nu_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ составляет 5 кГц. Для выбранных значений L и C рассчитайте критическое сопротивление контура $R_{кр}$ по формуле (В.26).
4. Установите на магазине ёмкость, близкую к рассчитанной. Увеличивая сопротивление магазина R от нуля, определите $R_{кр}$ по картине на экране ЭО.
5. Для расчёта логарифмического декремента затухания Θ проведите измерения амплитуд затухающих колебаний, меняя сопротивление R от 0,1 до $0,3R_{кр}$ (6–8 значений).

6. Для наблюдения затухающих колебаний на фазовой плоскости подайте на вход «X» осциллографа напряжение с магазина сопротивлений.

При том же значении C , что и в п. 4, наблюдайте за изменением спирали при увеличении сопротивления от $0,1 \cdot R_{кр}$ до $0,3 \cdot R_{кр}$.

Определите Θ по спирали для одного-двух значений R на каждом краю рабочего диапазона.

7. Измерьте индуктивность L и омическое сопротивление катушки R_L с помощью моста E7-8.

Обработка результатов

1. Рассчитайте экспериментальные значения периодов по результатам измерений и теоретические по формуле (B.21). Постройте график $T_{эксп} = f(T_{теор})$.

2. Рассчитайте значения Θ и $R_{конт}$ (сопротивление контура состоит из сопротивления магазина R и омического сопротивления катушки R_L).

Постройте график в координатах $1/\Theta^2 = f(1/R_{конт}^2)$. Определите критическое сопротивление $R_{кр}$ по наклону прямой. Приняв обозначения: $1/\Theta^2 = Y$, $1/R_{конт}^2 = X$, можно с помощью равенств (B.7), (B.19), (B.26) и (B.29) показать, что

$$R_{кр} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta Y}{\Delta X}}. \quad (1)$$

3. Рассчитайте теоретическое значение $R_{кр}$ по формуле (B.26).
4. Рассчитайте добротность контура для максимального и минимального значений Θ , используя равенства (B.30) и (B.31), и сравните с расчётом Q через параметры контура R , L и C [см. (B.28)].
5. Рассчитайте добротность Q по спирали.
6. Сведите результаты эксперимента в таблицу:

$L_{кат}$	$R_{кр}$			R	Q		
	Теор.	Подбор	Граф.		Теор.	$f(\Theta)$	Спираль
				max			
				min			

7. Оцените погрешности и сравните результаты измерений.

Контрольные вопросы

1. Что называется собственной частотой, частотой свободных колебаний, добротностью, логарифмическим декрементом затухания колебательного контура?
2. Какая плоскость называется фазовой плоскостью колебаний?
3. Как определить логарифмический декремент затухания по картине колебаний на фазовой плоскости?

4. Получите формулу (1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 122–124.
2. Калашиников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 207–210.

4.6. Вынужденные колебания в электрическом контуре

Цель работы: исследование вынужденных колебаний и процессов их установления.

В работе используются: генератор звуковой частоты, осциллограф, вольтметр, частотомер, ёмкость, индуктивность, магазин сопротивлений, универсальный мост.

В работе исследуются колебания, возникающие в электрическом колебательном контуре под воздействием внешней ЭДС, гармонически изменяющейся во времени.

При подключении к контуру внешнего источника (рис. 1) в нём возникают колебания, которые можно представить как суперпозицию двух синусоид (см. B.52): первая — с частотой собственных колебаний контура ω и амплитудой, экспоненциально убывающей со временем; вторая — с частотой внешнего источника Ω и постоянной амплитудой. Со временем собственные колебания затухают, и в контуре устанавливаются вынужденные колебания. Амплитуда этих колебаний максимальна при совпадении частоты Ω внешнего сигнала с собственной частотой контура ω_0 . Это явление называют резонансом.

Зависимость амплитуды установившихся колебаний от частоты внешнего напряжения носит название резонансной кривой (рис. B.8).

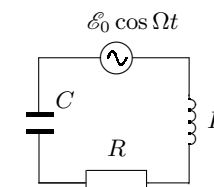


Рис. 1.
Последовательный колебательный контур

A. Резонансная кривая колебательного контура

Для экспериментального исследования резонансной кривой тока в последовательном колебательном контуре (рис. 1) можно снять зависимость амплитуды напряжения на резисторе R от частоты генератора (при постоянной амплитуде выходного напряжения генератора). Но импеданс

этого контура включает в себя выходной импеданс генератора. Мы должны быть уверены, что выходной импеданс генератора много меньше импеданса самого контура и не влияет на процессы, происходящие в контуре.

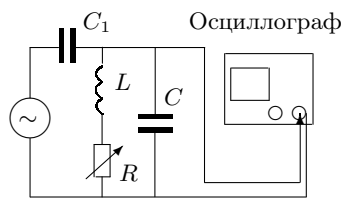


Рис. 2. Схема установки для исследования вынужденных колебаний

Для устранения этого влияния можно использовать схему, представленную на рис. 2: синусоидальный сигнал с генератора подаётся на параллельный колебательный контур через небольшую разделительную ёмкость C_1 . Напряжение с ёмкости контура C поступает на вход осциллографа.

Зависимость амплитуды этого напряжения от частоты генератора будет практически совпадать с резонансной кривой для последовательного контура, если импедансы возбуждающей и измеряющей цепей намного превосходят импеданс самого контура вблизи резонанса $Z_{\text{рез}} \approx L/(RC) = Q/(\Omega C)$. Ёмкость конденсатора C_1 выбирается настолько малой, что его импеданс ($Z_{C_1} = 1/\Omega C_1$) в рабочем диапазоне частот много больше импеданса контура, поэтому в цепи генератора течёт ток практически с постоянной амплитудой, а колебательный контур выполняет роль нагрузочного сопротивления, которое в свою очередь зависит от частоты. А так как сопротивление $Z_{\text{рез}}$ параллельного контура в резонансе максимально, то и напряжение на ёмкости C (неизменный ток, умноженный на максимальное сопротивление) тоже максимально при резонансе. Входное сопротивление осциллографа достаточно велико: $R_{\text{зо}} \approx 1 \text{ МОм}$.

Таким образом, при выполнении условий

$$Z_{C_1} = \frac{1}{\Omega C_1} \gg |Z|_{\text{рез}} = \frac{Q}{\Omega C}, \quad R_{\text{зо}} \gg \frac{Q}{\Omega C} \quad (1)$$

и при условии, что действительная часть импеданса катушки много меньше её мнимой части, резонансная кривая в нашем контуре будет выглядеть так же, как в последовательном: максимум амплитуды при резонансе. Ширина резонансной кривой определяет важную характеристику контура — *добротность* [см. (B.57)].

Б. Процессы установления и затухания колебаний в контуре

Добротность контура может быть определена и другими способами, например, по скорости нарастания амплитуды вынужденных колебаний

при резонансе или по скорости затухания свободных колебаний.

Нарастание и затухание колебаний (рис. 3) можно наблюдать на экране осциллографа, если на контур подаются цуги — отрезки синусоиды, разделённые интервалами, в течение которых сигнал отсутствует. Чем выше добротность, тем медленнее нарастают и медленнее затухают колебания в контуре. Количественные оценки можно сделать, если определить логарифмический декремент затухания по скорости нарастания или затухания колебаний [см. (B.30) и (B.73)]. В условиях резонанса огибающая затухающих колебаний — это перевёрнутая огибающая нарастающего участка. При расчёте логарифмического декремента по затуханию нет необходимости использовать амплитуду установившихся колебаний U_0 , которая в контуре с высокой добротностью иногда не успевает установиться за время продолжительности цуга.

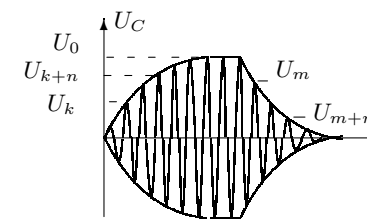


Рис. 3. Нарастание и затухание вынужденных колебаний

Экспериментальная установка. Схема установки для исследования вынужденных колебаний приведена на рис. 4. Колебательный контур состоит из ёмкости $C = 0,1 \text{ мкФ}$, индуктивности $L = 100 \text{ мГн}$ и переменного сопротивления R .

Синусоидальное напряжение от звукового генератора проходит через частотомер, позволяющий измерять рабочую частоту с высокой точностью. В корпус частотомера вмонтирован генератор цугов — электронное реле, разрезающее синусоиду на периодически повторяющиеся цуги — отрезки синусоиды, содержащие 32 или 40 периодов колебаний.

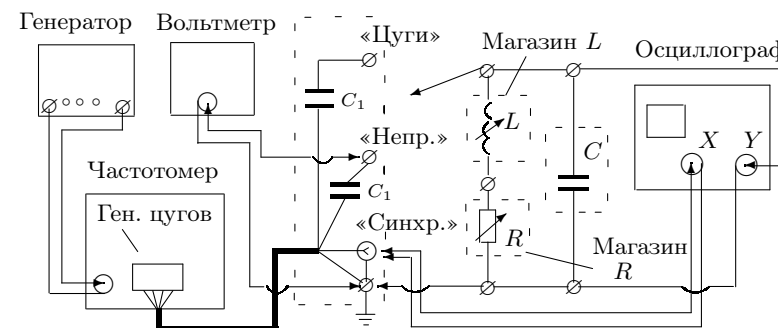


Рис. 4. Схема экспериментальной установки для исследования вынужденных колебаний

После частотомера через небольшую ёмкость $C_1 \approx 600$ пкФ сигнал поступает на клеммы, смонтированные на отдельной панельке. При подключении контура к клеммам «⚡» (земля) и «Непр» на контур подаётся непрерывный сигнал — синусоида; если контур подключён к клеммам «⚡» и «Цуги» — на контур поступают отрезки синусоиды.

Для наблюдения за процессом колебаний напряжение с ёмкости подаётся на вход осциллографа. Чтобы картина на экране была устойчивой, частота развёртки осциллографа принудительно синхронизируется с частотой повторения цугов. Для этого на генератор развёртки ЭО подаются следующие с частотой повторения цугов управляющие импульсы, которые вырабатываются в блоке электронного реле (клемма «Синхр», смонтированная на панельке). Для измерений напряжения на ёмкости используется электронный вольтметр.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается при двух значениях сопротивления магазина ($R = 0$ и 100 Ом) исследовать резонансные кривые и определить по ним добротность контура; затем рассчитать добротность, определив логарифмический декремент затухания при нарастании и при затухании колебаний.

Подробно правила выполнения работы изложены в ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ОПИСАНИИ, расположенном на установке.




1. Соберите схему по рис. 4 и подготовьте приборы к работе.
2. Установите на магазине индуктивностей $L = 100$ мГн и рассчитайте резонансную частоту контура по формуле $\nu_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$.
3. Исследуйте резонансные кривые контура [$U_C = f(\nu)$] для сопротивлений $R = 0$ и $R = 100$ Ом.
4. Определите добротность контура по нарастанию и затуханию колебаний для $R = 0$ и $R = 100$ Ом, для этого переключите контур на вход «Цуги» и установите резонансную частоту.
5. Сместите частоту генератора с резонансного значения и получите на экране картину биений. Зарисуйте и объясните её.
6. Измерьте активное сопротивление R_L магазина индуктивностей с помощью моста E7–8.

Обработка результатов

1. Постройте на одном графике резонансные кривые в координатах $U/U_0 = f(\nu/\nu_0)$, где U_0 — напряжение при резонансной частоте ν_0 .

Определите добротность по формуле (B.57). Сравните теоретическое и экспериментальное значения резонансной частоты.

2. Рассчитайте добротность контура по скорости нарастания и затухания колебаний (см. (B.30), (B.31) и (B.73)).
3. Рассчитайте теоретическое значение добротности через параметры контура L , C и R (см. (B.28)).
4. Сведите результаты определения Q в таблицу:

R Ом	$R_{\text{конт}}$	Q			
					$f(LCR)$
0					
100					

5. Оцените погрешности измерений и сравните результаты расчётов Q .

Контрольные вопросы

1. Выведите формулу (B.57).
2. Найдите частное решение уравнения (B.44), не переходя к комплексным величинам. (Указание: решение (B.44) следует искать в виде $A_1 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t$.)
3. Получите все равенства (B.28), определяющие добротность контура. В чём состоит физический смысл добротности?
4. В каких случаях можно говорить, что колебательный контур слабо связан с другими элементами схемы?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 124, 127.
2. Калашиников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 221, 222, 210.

4.7. Сдвиг фаз в цепи переменного тока

Цель работы: изучить влияние активного сопротивления, индуктивности, ёмкости и частоты на сдвиг фаз между током и напряжением в цепи переменного тока.

В работе используются: генератор звуковой частоты, двухканальный осциллограф, магазин ёмкостей, магазин сопротивлений, катушка индуктивности, резисторы, мост переменного тока.

Удобным, хотя и не очень точным прибором для измерения фазовых соотношений служит электронный осциллограф. Пусть нужно измерить

сдвиг фаз между двумя напряжениями U_1 и U_2 . Подадим эти напряжения на горизонтальную и вертикальную развёртки осциллографа. Смещение луча по горизонтали и вертикали определяется выражениями

$$x = x_0 \cos \Omega t, \quad y = y_0 \cos(\Omega t + \alpha),$$

где α — сдвиг фаз между напряжениями U_1 и U_2 , а x_0 и y_0 — амплитуды напряжений, умноженные на коэффициенты усиления соответствующих каналов осциллографа. Исключив время, после несложных преобразований найдём:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 + \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \alpha = \sin^2 \alpha.$$

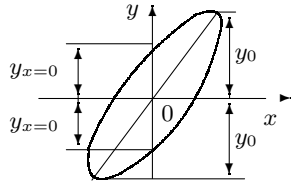


Рис. 1. Эллипс на экране осциллографа

Полученное выражение определяет эллипс, описываемый электронным лучом на экране осциллографа (рис. 1). Ориентация эллипса зависит как от искомого угла α , так и от усиления каналов осциллографа. Для расчёта сдвига фаз можно измерить отрезки $2y_{x=0}$ и $2y_0$ (или $2x_{y=0}$ и $2x_0$, на рисунке не указанные) и, подставляя эти значения в уравнение эллипса, найти

$$\alpha = \pm \arcsin \left(\frac{y_{x=0}}{y_0} \right).$$

Для правильного измерения отрезка $2y_{x=0}$ важно, чтобы центр эллипса лежал на оси y .

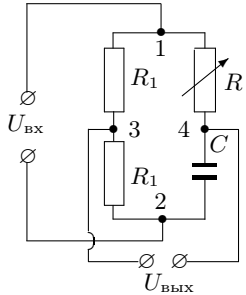


Рис. 2. Принципиальная схема фазовращателя

Другой способ измерения сдвига фаз изложен в описании экспериментальной установки.

На практике часто используются устройства, позволяющие в широких пределах изменять фазу напряжения ($0 < \psi < \pi$). Такие устройства называются фазовращателями. Схема простого фазовращателя приведена на рис. 2. Она включает в себя два одинаковых резистора R_1 , ёмкость C и переменное сопротивление R .

Используя метод комплексных амплитуд, найдём зависимость сдвига фаз между входным напряжением $U_{\text{вх}} = U_0 \cos \Omega t$ и выход-

ным $U_{\text{вых}}$ от соотношения между импедансами сопротивления R и ёмкости C . Для этого выразим выходное напряжение $U_{\text{вых}}$ через $U_{\text{вх}}$, параметры контура и частоту внешнего источника Ω : $U_{34} = f(U_{12}, R, C, \Omega)$.

Обозначим комплексную амплитуду входного напряжения через \hat{U}_0 . Тогда напряжение между точками 1 и 3 в силу равенства сопротивлений R_1

$$\hat{U}_{13} = \frac{\hat{U}_0}{2}.$$

Если фазу напряжения $\hat{U}_{\text{вх}}$ положить равной нулю, то \hat{U}_0 будет действительной величиной: $\hat{U}_0 = U_0$. Приняв напряжение в точке 1 равным нулю, получим амплитуду напряжения в точке 3:

$$\hat{U}_{03} = \frac{U_0}{2}.$$

Рассчитаем \hat{U}_{04} — амплитуду напряжения в точке 4. Импеданс Z последовательно соединённых сопротивления R и ёмкости C равен

$$Z = R - \frac{i}{\Omega C}.$$

Для комплексной амплитуды тока \hat{I}_0 , проходящего через R и C , имеем

$$\hat{I}_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R - i/(\Omega C)},$$

а для комплексной амплитуды напряжения в точке 4 —

$$\hat{U}_{04} = \hat{I}_0 R = U_0 \frac{R}{R - i/(\Omega C)}.$$

Выходное напряжение $\hat{U}_{\text{вых}}$ равно разности напряжений в точках 3 и 4:

$$\hat{U}_{\text{вых}} = \hat{U}_{04} - \hat{U}_{03} = \hat{U}_{04} - U_0/2 = \frac{U_0}{2} \frac{R + i/(\Omega C)}{R - i/(\Omega C)}.$$

В числитель и знаменатель последнего выражения входят комплексно-сопряжённые величины, модули которых одинаковы, поэтому величина выходного напряжения не меняется при изменении R . Модуль $U_{\text{вых}}$ всегда равен $U_0/2$ — половине $U_{\text{вх}}$. Сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями равен $2 \arctg[1/(\Omega RC)]$ и меняется от π (при $R \rightarrow 0$) до 0 (при $R \rightarrow \infty$).

Экспериментальная установка. Схема для исследования сдвига фаз между током и напряжением в цепи переменного тока представлена на

рис. 3. Эталонная катушка L , магазин емкостей C и магазин сопротивлений R соединены последовательно и через дополнительное сопротивление r подключены к источнику синусоидального напряжения — звуковому генератору.

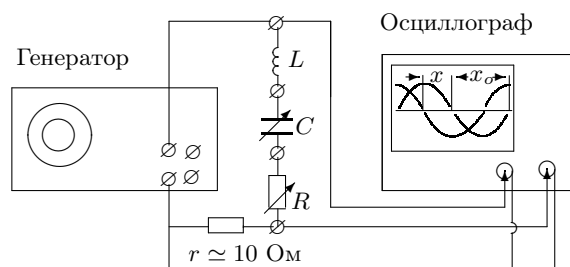


Рис. 3. Схема установки для исследования сдвига фаз между током и напряжением

Сигнал, пропорциональный току, снимается с сопротивления r , пропорциональный напряжению — с генератора. Оба сигнала подаются на универсальный осциллограф. Этот осциллограф имеет два канала вертикального отклонения, что позволяет одновременно наблюдать на экране два сигнала. В нашей работе это две синусоиды (рис. 3), смещённые друг относительно друга на расстояние x , зависящее от сдвига фаз между током и напряжением в цепи.

Измерение сдвига фаз удобно проводить следующим образом:

- 1) подобрать частоту развёртки, при которой на экране осциллографа укладывается чуть больше половины периода синусоиды;
- 2) отцентрировать горизонтальную ось;
- 3) измерить расстояние x_0 (рис. 3) между нулевыми значениями одного из сигналов, что соответствует смещению по фазе на π ;
- 4) измерить расстояние x между нулевыми значениями двух синусоид и пересчитать в сдвиг по фазе: $\psi = \pi \cdot x/x_0$.

На рис. 3 синусоиды на экране ЭО сдвинуты по фазе на $\pi/2$.

Схема фазовращателя, изображённая на рис. 4, содержит два одинаковых резистора R_1 , смонтированных на отдельной плате, магазин сопротивлений R и магазин емкостей C .

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость сдвига фаз между током и напряжением от сопротивления в RC - и в RL -цепи; определить добротность колебательного контура, сняв зависимость сдвига фаз от частоты вблизи резонанса; оценить диапазон работы фазовращателя.

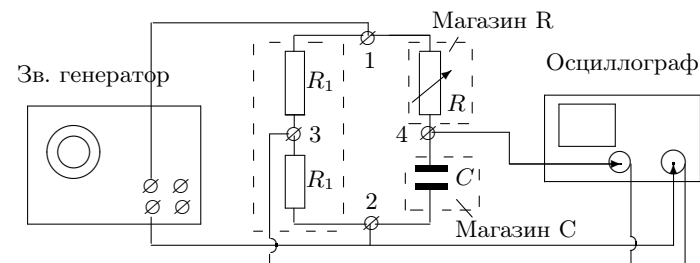


Рис. 4. Схема установки для исследования фазовращателя

Подробно правила выполнения работы изложены в ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ОПИСАНИИ, расположенном на установке.

1. Соберите схему по рис. 3 и подготовьте приборы к работе.
2. Исследуйте зависимость сдвига фаз ψ от R в RC -цепи. Для этого соберите схему, изображённую на рис. 3, закоротите катушку и установите $C = 0,5$ мкФ, $\nu = 1$ кГц. Рассчитайте реактивное сопротивление цепи $X_1(\Omega) = 1/(\Omega C)$. Циклическая частота $\Omega = 2\pi\nu$.
Проведите измерения сдвига фаз ψ , увеличивая R от нуля до $10 \cdot X_1$ (6–8 значений).
3. Исследуйте зависимость сдвига фаз от R в RL -цепи. Для этого в схеме, собранной согласно рис. 3, закоротите магазин емкостей и установите $L = 50$ мГн, $\nu = 1$ кГц. Рассчитайте реактивное сопротивление цепи $X_2(\Omega) = \Omega L$.
Проведите измерения сдвига фаз ψ , изменяя сопротивление R от 0 до $10X_2$ (6–8 значений).
4. Исследуйте зависимость сдвига фаз от частоты в RCL -цепи. Для этого в цепи, собранной согласно рис. 3, установите значения $C = 0,5$ мкФ, $L = 50$ мГн, $R = 0$. Рассчитайте резонансную частоту $\nu_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$.
Оцените по картине на экране ЭО диапазон изменения частоты, в котором сдвиг фаз меняется от $\pi/3$ до $-\pi/3$. Снимите зависимость сдвига фаз от частоты в этом диапазоне.
Повторите измерения сдвига фаз от частоты для сопротивления $R = 100$ Ом.
5. Запишите значения r и R_L — активное сопротивление катушки, указанное на её крышке. Проверьте значения r , L и R_L с помощью моста Е7-8.
6. Исследуйте работу фазовращателя. Для этого соберите схему по рис. 4 и установите $C = 0,5$ мкФ, $\nu = 1$ кГц. Оцените визуально диапазон изменения сдвига фаз при изменении R от 0 до 10 кОм.

Подберите сопротивление R , при котором сдвиг фаз равен $\pi/2$.

Обработка результатов

1. Для RC -цепи постройте графики $\psi = f(R_\Sigma)$ и $\text{ctg } \psi = f(\Omega CR_\Sigma)$. Здесь R_Σ — суммарное активное сопротивление цепи: $R_\Sigma = R + r$; $r = 10$ Ом — сопротивление резистора. С помощью первого графика определите сопротивление R для $\psi = \pi/2$ и сравните с рассчитанным; ко второму добавьте теоретическую зависимость.
2. Постройте графики $\psi = f(R_\Sigma)$ и $\text{ctg } \psi = f(R_\Sigma/\Omega L)$ для RL -цепи. Здесь $R_\Sigma = R + r + R_L$. С помощью первого графика определите сопротивление R для $\psi = \pi/2$ и сравните с рассчитанным; второй график сравните с теоретическим.
3. Постройте на одном листе графики $|\psi| = f(\nu/\nu_0)$ для $R = 0$ и 100 Ом (величину ψ удобно откладывать в долях π). Определите по графикам добротность контура: $Q = \nu_0/(2\Delta\nu)$, где $2\Delta\nu/\nu_0$ — ширина графика при сдвиге фаз $\psi = \pi/4$.
4. Рассчитайте добротность через параметры контура L , C и R (см. (В.28)).
5. Постройте векторную диаграмму для фазовращателя¹; с её помощью рассчитайте величину R , при которой сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями равен $\pi/2$. Сравните расчёт с экспериментом.
6. Сведите результаты эксперимента в таблицу:

$L_{\text{кат}}$	R_M	R_Σ	Q		Фазовращ. $R_M(\psi = \pi/2)$
			Рез. кр.	$f(LCR)$	
	0				Эксп
	100				Теор

7. Оцените погрешности и сравните результаты.

Контрольные вопросы

1. Что называется импедансом электрической цепи?
2. Как складываются импедансы при последовательном и параллельном соединении элементов электрической цепи?
3. Докажите, что для определения добротности следует измерять ширину резонансной кривой на уровне $\psi = \pi/4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 129, 130.

¹ Отложите по горизонтали вектор входного напряжения, укажите на нём точки 1, 2, 3 (см. рис. 2); зная, каков сдвиг фаз между напряжениями U_C и U_R (при едином токе) изобразите траекторию точки 4 при изменении величины R . Отложите вектор 3,4 для сдвига фаз $\psi = \pi/2$ и сравните соответствующие величины U_C и U_R .

2. Калашиников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 220, 227, 228.

4.8. Резонанс напряжений

Цель работы: изучение последовательной цепи переменного тока, наблюдение резонанса напряжений.

В работе используются: регулировочный автотрансформатор, катушка индуктивности с выдвигным сердечником, магазин емкостей, резисторы, амперметр, три вольтметра, ваттметр, осциллограф, универсальный мост.

В теории переменных токов напряжения и токи принято выражать комплексными числами. Модуль комплексного числа равен эффективному значению напряжения (или тока), а фаза — сдвигу фаз, измеренному по отношению к какому-либо одному напряжению или току, принятому в качестве опорного. Параметры основных элементов цепи задаются их импедансами, т. е. тоже некоторыми комплексными числами.

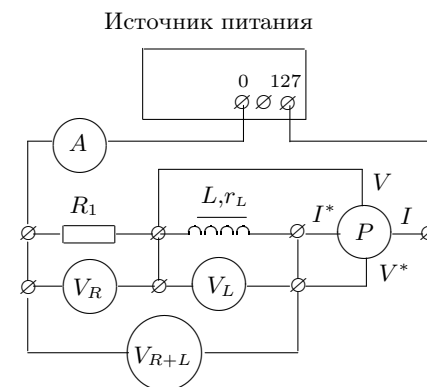


Рис. 1. Схема установки для изучения закона Ома в цепи переменного тока

Рассмотрим электрическую цепь, состоящую из резистора R и катушки индуктивности L с импедансом $Z_L = r_L + i\Omega L$, последовательно подключённых к внешнему источнику, ЭДС которого меняется по синусоидальному закону с частотой Ω (рис. 1).

Обозначим через U_R напряжение на резисторе, через U_L — напряжение на катушке и через U_{R+L} — суммарное напряжение на катушке и на резисторе. Для этих напряжений справедливы комплексные соотношения:

$$\hat{U}_R = \hat{I}R, \quad \hat{U}_L = \hat{I}(r_L + i\Omega L), \quad \hat{U}_{R+L} = \hat{I}(R + r_L + i\Omega L). \quad (1)$$

Напомним, что здесь r_L — активное сопротивление катушки, которое характеризует суммарные потери энергии в катушке, в том числе потери в её ферромагнитном сердечнике.

Переходя к модулям и фазам токов и напряжений, найдём из (1):

$$U_R = I \cdot R, \quad \text{tg } \psi_1 = 0; \quad (2)$$

$$U_L = I \cdot \sqrt{r_L^2 + (\Omega L)^2}, \quad \text{tg } \psi_2 = \frac{\Omega L}{r_L}; \quad (3)$$

$$U_{R+L} = I \sqrt{(R + r_L)^2 + (\Omega L)^2}, \quad \text{tg } \psi_3 = \frac{\Omega L}{R + r_L}. \quad (4)$$

В этих формулах U и I обозначают эффективные значения напряжений и токов (показания приборов).

Измеряя с помощью трёх вольтметров значения U_R , U_L и U_{R+L} и зная сопротивление резистора R , нетрудно вычислить, пользуясь формулами (2), (3) и (4), силу тока в цепи, активное сопротивление катушки r_L , её индуктивность L , мощность P_L , выделяемую на катушке, и сдвиг фаз между током и напряжением на катушке.

Рассчитаем мощность переменного тока, выделяемую в катушке. Мгновенное значение мощности равно

$$P = U(t) \cdot I(t).$$

Средняя мощность за период T определяется формулой

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T U(t) \cdot I(t) dt.$$

Полагая $I(t) = I\sqrt{2} \cos \Omega t$, $U(t) = U\sqrt{2} \cos(\Omega t + \psi)$, получим после интегрирования:

$$\bar{P}_L = U_L \cdot I \cos \psi = I^2 \cdot r_L. \quad (5)$$

Средняя мощность, выделяющаяся в катушке самоиндукции, определяется, таким образом, действительной частью её импеданса.

Активное сопротивление катушки r_L можно определить, если включить её в последовательный колебательный контур с известными параметрами — сопротивлением R и ёмкостью C (рис. 2). В контуре, настроенном в резонанс на частоту Ω внешнего источника (собственная частота контура и внешняя совпадают: $\omega_0 = \Omega$), реактивные сопротивления индуктивности и ёмкости одинаковы:

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \quad (6)$$

Определив каким-либо экспериментальным способом добротность Q этого контура, можно рассчитать полное сопротивление контура R_Σ в резонансе, поскольку

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R_\Sigma} = \frac{1}{\omega_0 C R_\Sigma}. \quad (7)$$

Резонансное сопротивление контура R_Σ включает в себя известное сопротивление резистора R и активное сопротивление катушки r_L :

$$R_\Sigma = R + r_L. \quad (8)$$

Экспериментальная установка. Схема установки для исследования закона Ома в цепи переменного тока представлена на рис. 1. Цепь, состоящая из резистора $R_1 \simeq 100$ Ом и катушки L с выдвигаемым сердечником, подключена к автотрансформатору, выходное напряжение которого можно менять от 0 до 127 В. Напряжения на каждом из элементов и суммарное напряжение цепи измеряются тремя вольтметрами: V_R , V_L и V_{R+L} . Амперметр A измеряет ток в цепи, а ваттметр P — мощность, выделяющуюся на катушке.

Ваттметр электродинамической системы состоит из двух катушек, одна из которых вращается в магнитном поле другой, если через них течёт ток. Токочувствительная катушка ваттметра II^* включается последовательно в исследуемую цепь, а катушка напряжений (потенциальная) VV^* — параллельно к элементу, в котором измеряется выделяемая мощность.

Два из четырёх зажимов ваттметра помечены звёздочкой (*). Эти зажимы надо соединить вместе. Предел измерений устанавливается при помощи переключателей или штепселей, которые вставляются в соответствующие гнезда: произведение цифр против штепселя токовой катушки II^* и против переключателя катушки напряжений VV^* определяет мощность, соответствующую отклонению стрелки на всю шкалу. Отсчёт мощности ведётся по любой из шкал, обозначенных буквой P .

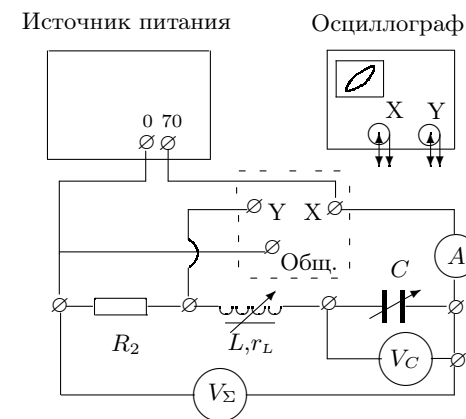


Рис. 2. Схема установки для наблюдения резонанса напряжений

Схема установки для изучения резонанса напряжений изображена на рис. 2. Последовательно соединены резистор $R_2 \approx 5$ Ом, катушка L и магазин ёмкостей C . Амперметр A измеряет ток в цепи, вольтметр V_C — напряжение на ёмкости, вольтметр V_Σ — суммарное напряжение на контуре. Резонанс можно зафиксировать с помощью осциллографа, если подать на вход X напряжение с контура, а на вход Y — напряжение с резистора R_2 , пропорциональное току в цепи. В общем случае на экране виден эллипс. При резонансе эллипс вырождается в прямую линию.

Резонансные напряжения на контуре $U_{\Sigma, \text{рез}}$ и на ёмкости $U_{C, \text{рез}}$ равны соответственно

$$U_{\Sigma, \text{рез}} = I_{\text{рез}} R_\Sigma, \quad U_{C, \text{рез}} = \frac{I_{\text{рез}}}{\Omega C}. \quad (9)$$

Сравнивая (7) и (9), получим

$$Q = \frac{U_{C, \text{рез}}}{U_{\Sigma, \text{рез}}}. \quad (10)$$

Формула (10) показывает, что добротность контура может быть найдена по измеренным значениям напряжений на контуре и на конденсаторе при резонансе. Зная добротность контура и ёмкость C , можно рассчитать R_Σ по формуле (7), а затем определить r_L .

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость индуктивности L и сопротивления r_L катушки от глубины погружения сердечника (рис. 1) и определить резонансные характеристики контура: добротность Q , сопротивление контура R_Σ , параметры катушки L и r_L (рис. 2). Студент выполняет оба упражнения с одной катушкой, подключая её к каждой цепи через розетку.

Подробно правила выполнения работы изложены в ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ОПИСАНИИ, расположенном на установке.

I. Закон Ома в цепи переменного тока

1. В схеме, собранной по рис. 1, подготовьте приборы к работе.
2. Перемещая сердечник катушки малыми шагами, снимите зависимости тока I , напряжений U_R, U_L, U_{R+L} и мощности P_L от координаты сердечника x . Включите в серию среднее положение сердечника.
3. Запишите сопротивление реостата R_1 и характеристики приборов.

II. Резонанс напряжений

4. В схеме, собранной по рис. 2, подготовьте приборы к работе.
5. Меняя ёмкость и наблюдая за изменением эллипса на экране ЭО, настройте контур в резонанс с частотой сети.
6. Измерьте резонансный ток I и резонансные напряжения: на ёмкости — $U_{C, \text{рез}}$ и на контуре — $U_{\Sigma, \text{рез}}$.
Оцените на месте добротность контура по формуле (10).
7. Запишите резонансное значение ёмкости C , координату положения сердечника при резонансе, величину дополнительного сопротивления R_2 и характеристики приборов.
8. Отключите питание и отсоедините катушку от цепи. Для среднего (резонансного) положения сердечника, измерьте омическое сопротивление витков катушки сначала с помощью омметра, а затем — L и r_L с помощью моста переменного тока Е7–8.

III. Обработка результатов

1. По результатам измерений P_L и I вычислите значения r_L по формуле (5), а затем определите L [см. (3)]. Частота сети $\nu_0 = 50$ Гц.
Постройте на одном листе графики зависимостей L и r_L от положения сердечника и определите по ним значения L и r_L , соответствующие среднему (резонансному) положению сердечника.
2. Для среднего положения сердечника постройте векторную диаграмму напряжений: треугольник по трём сторонам при горизонтальном расположении U_R (рис. В.7).
Отложите на диаграмме активную ($U_{L, \text{акт}}$) и реактивную ($U_{L, \text{реакт}}$) составляющие напряжения на катушке и рассчитайте по ним значения L и r_L .
Определите по диаграмме $\cos \theta$ — сдвиг фаз между током и напряжением на катушке — и сравните с расчётом по формуле (5).
3. С помощью векторной диаграммы по теореме косинусов выразите мощность P_L , выделяемую на катушке, через напряжения U_R, U_L, U_{R+L} и сопротивление R_1 (метод трёх вольтметров).
Рассчитайте этим методом величину P_L для среднего положения сердечника и сравните с показаниями ваттметра.
4. Рассчитайте активное сопротивление катушки r_L через ток и напряжение на контуре [см. (9) и (8)].
5. Рассчитайте L и r_L через добротность Q [см. (10), (6), (7) и (8)].
6. Сведите результаты измерений в таблицу:

	Омметр	Мост Е7-8	График	Вект.диагр	$f(I, U_{\Sigma_{рез}})$	$f(Q)$
r_L						
L	–				–	

7. Сравните величины L и r_L , определённые разными способами. Оцените погрешности и подумайте о причинах расхождения результатов.

Контрольные вопросы

1. Почему показание вольтметра V_{R+L} не равно сумме показаний вольтметров V_R и V_L ? В нашем случае $V_{R+L} < V_R + V_L$. Может ли неравенство иметь другой знак?
2. Почему при резонансе в схеме рис. 2 эллипс на экране осциллографа вырождается в прямую?
3. Из чего складывается активное сопротивление катушки с сердечником?
4. Поясните принцип работы ваттметра.
5. Выполняется ли условие квазистационарности токов в используемой схеме? Почему?
6. На какой частоте гудит катушка?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. — Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 129, 130.
2. Калашников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 220, 227, 228.

4.8А. Резонанс токов

Цель работы: изучение параллельной цепи переменного тока, наблюдение резонанса токов.

В работе используются: лабораторный автотрансформатор (ЛАТР), разделительный понижающий трансформатор, ёмкость, дроссель с переменной индуктивностью, три амперметра, вольтметр, реостат, электронный осциллограф, омметр, мост переменного тока.

В работе изучается параллельный контур, одна из ветвей которого содержит индуктивность L , другая — ёмкость C (см. рис. В.9). Через r_L обозначено активное сопротивление катушки, которое включает в себя как чисто омическое сопротивление витков катушки, так и сопротивление, связанное с потерями энергии при перемагничивании сердечника катушки. Активным сопротивлением емкостной ветви контура можно пренебречь, т. к. используемый в работе конденсатор обладает малыми потерями.

Экспериментальная установка. Схема экспериментальной установки приведена на рис. 1. Напряжение от сети (220 В, 50 Гц) с помощью ЛАТРа через понижающий трансформатор Тр подаётся на параллельный контур, содержащий конденсатор ($C = 120$ мкФ) и катушку, индуктивность которой зависит от глубины погружения сердечника. Полный ток в цепи измеряется с помощью многопредельного амперметра A_1 ; для измерения токов в L - и C -ветвях используются два одинаковых амперметра A_2 и A_3 ; напряжение на контуре контролируется электронным вольтметром V . Последовательно с контуром включён резистор r — реостат с полным сопротивлением ≈ 100 Ом.

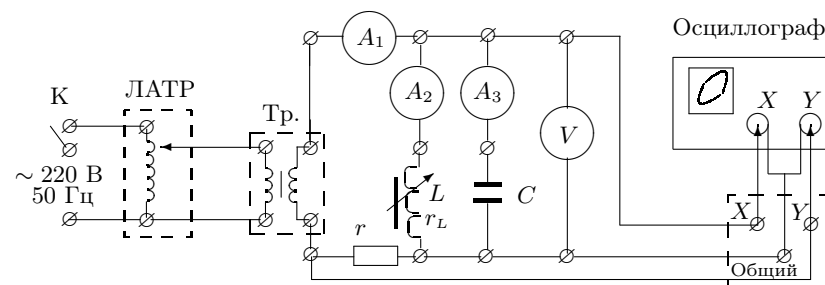


Рис. 1. Схема для исследования резонанса токов

Для наблюдения за сдвигом фаз между полным током и напряжением на контуре используется осциллограф. Сигнал, пропорциональный току, снимается с резистора r и подаётся на вход Y осциллографа. На вход X подаётся напряжение непосредственно с контура. При наличии сдвига фаз между этими напряжениями на экране виден эллипс, а при нулевом сдвиге фаз эллипс вырождается в прямую.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается снять при постоянном напряжении U зависимости токов I , I_L и I_C от индуктивности катушки (глубины погружения сердечника), а также определить резонансные характеристики контура: полное сопротивление $R_{рез}$, добротность Q , активное сопротивление r_L и индуктивность катушки $L_{рез}$.

Подробно правила выполнения работы изложены в ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ОПИСАНИИ, расположенном на установке.

1. В схеме, собранной по рис. 1, подготовьте к работе приборы.
2. Снимите зависимости I , I_L и I_C от координаты сердечника ($U = \text{const}$).

- Измерьте резонансные значения трёх токов и напряжение и убедитесь с помощью осциллографа, что в резонансе полное сопротивление цепи чисто активное.

Оцените на месте добротность контура по формуле (В.66).

- Убрав напряжение до нуля, отключите питание цепи.
- Измерьте сопротивление витков катушки с помощью омметра.
- Измерьте активное сопротивление катушки r_L и резонансное значение индуктивности L с помощью моста Е7–8.

Обработка результатов

- Постройте на одном графике зависимости токов I , I_L и I_C от положения сердечника: $I = f(x)$ (x — отсчёт по шкале в мм).
- Рассчитайте добротность контура Q через токи [см. (В.66)], а резонансное сопротивление $R_{рез}$ — через полный ток и напряжение [см. (В.62) и (В.65)].
- Рассчитайте $L_{рез}$ через ёмкость C и частоту ω_0 ($\nu_0 = 50$ Гц), а r_L — через ёмкость и добротность [см. (В.61)].
- Рассчитайте индуктивность $L_{рез}$ через U и $I_{L, рез}$ [см. (В.63)].
- Постройте в масштабе векторную диаграмму токов при резонансе: треугольник по трём сторонам при вертикальном векторе $I_{C, рез}$ (рис. В.10). Отложите на этой диаграмме напряжение на катушке $U_L = U_C$ и постройте активную ($U_{L, акт}$) и реактивную ($U_{L, реакт}$) составляющие напряжения на катушке. Рассчитайте по ним r_L и $L_{рез}$.
- Сведите результаты измерений в таблицу:

	Омметр	Мост Е7-8	$f(U_{рез}, I_{L, рез})$	$f(Q)$	Вект.диагр.
r_L	—		—		
L					

- Сравните резонансные значения $L_{рез}$ и r_L , определённые разными способами. Оцените погрешности и подумайте о причинах расхождения результатов.

Контрольные вопросы

- Приведите все известные Вам определения резонанса.
- Как установить наличие резонанса в цепи? Перечислите все известные Вам признаки.
- Получите формулу, связывающую добротность и параметры контура.
- Какие причины приводят к потерям энергии в контуре?
- Зависят ли потери энергии от частоты тока?
- Получите формулу, связывающую $R_{рез}$ и r_L .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. §§ 126, 127, 129, 130.
- Калашиников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977. §§ 245–250, 254–256.

4.9. Исследование гальванометра

Цель работы: изучение работы высокочувствительного зеркального гальванометра магнитоэлектрической системы в режимах измерения постоянного тока и электрического заряда.

В работе используются: зеркальный гальванометр с осветителем и шкалой, источник постоянного напряжения, делитель напряжения, магазин сопротивлений, эталонный конденсатор, вольтметр, переключатель, ключи, линейка.

Гальванометром называют электроизмерительный прибор высокой чувствительности. С его помощью измеряют малые токи, напряжения, заряды, магнитные потоки. Выпускаются гальванометры различных систем: электромагнитные, магнитоэлектрические, электростатические и электродинамические. Наибольшее распространение получили гальванометры постоянного тока магнитоэлектрической системы,

Главной частью высокочувствительного гальванометра магнитоэлектрической системы является подвешенная на вертикальной нити рамка, помещённая в поле постоянного магнита (рис. 1). Вырез цилиндрической формы в полюсах магнита и ферромагнитный цилиндр на оси системы делают поле в зазоре радиальным. Скреплённое с рамкой зеркальце служит для измерения угла поворота рамки. Магнит и подвижная система заключены в защитный кожух. В чувствительных гальванометрах применяют сильные постоянные магниты и рамки с большим количеством витков, подвешенные на тонких нитях с малой упругостью.

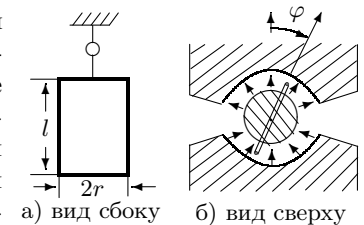


Рис. 1. Рамка с током в магнитном поле

Гальванометр магнитоэлектрической системы с большим периодом колебаний ($T > 10$ с) называют баллистическим. К рамке баллистического гальванометра прикреплен полый цилиндр, который сильно увеличивает момент инерции и, следовательно, период колебаний подвижной

системы, не очень её утяжеляя. Баллистический гальванометр позволяет измерять как постоянный ток (стационарный или динамический режим), так и заряд, протекший через рамку за некоторое время (баллистический режим). В баллистическом режиме гальванометр может работать, если время протекания заряда много меньше периода собственных колебаний подвижной рамки. Поэтому период колебаний рамки делают большим. Это время учитывает также реакцию экспериментатора, которому надо успеть сделать отсчёт максимального отклонения рамки.

Уравнение движения подвижной системы. На помещённую в магнитное поле обтекаемую током рамку гальванометра действуют следующие моменты сил: момент закрученной нити, момент магнитных сил и тормозящий момент, зависящий от сил сопротивления воздуха и от индукционных токов, вызывающих электромагнитное торможение. Рассмотрим каждый из этих моментов в отдельности.

Механический момент M_1 упругих сил нити пропорционален углу поворота рамки

$$M_1 = -D\varphi, \quad (1)$$

где D — модуль кручения нити, а φ — угол поворота рамки от положения равновесия.

Если рамка с числом витков N , обтекаемая током I , помещена в магнитное поле с индукцией B , то на боковые стороны рамки (перпендикулярные чертежу на рис. 1) действуют силы, равные $lNBI$, где l — длина боковой стороны. Обозначив через r расстояние от боковой стороны до оси вращения, найдём момент пары сил

$$M_2 = 2rlBNI = BSNI, \quad (2)$$

где S — площадь одного витка рамки.

Тормозящий момент складывается из моментов сил электромагнитного торможения и сил трения о воздух. В рамке, движущейся в магнитном поле с угловой скоростью $\dot{\varphi}$, наводится ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -BSN\dot{\varphi},$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий рамку. Пренебрегая самоиндукцией рамки, можно считать, что эта ЭДС вызывает ток индукции $I_{\text{инд}} = -BSN\dot{\varphi}/R_{\Sigma}$. Здесь R_{Σ} — полное сопротивление цепи, состоящее из сопротивления рамки R_0 и сопротивления R внешнего участка цепи: $R_{\Sigma} = R_0 + R$. Тормозящий момент

$$M_3 = BSNI_{\text{инд}} = -\frac{(BSN)^2}{R_{\Sigma}}\dot{\varphi}. \quad (3)$$

Обычно этот момент значительно превосходит момент сил трения рамки о воздух, которым мы и пренебрежём для простоты расчёта.

Уравнение движения рамки имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = \Sigma M,$$

где J — момент инерции подвижной системы, а ΣM — сумма моментов всех сил, действующих на рамку; подставляя (1), (2) и (3), получим

$$J\ddot{\varphi} + \frac{(BSN)^2}{R_{\Sigma}}\dot{\varphi} + D\varphi = BSNI.$$

Разделим обе части уравнения на J и введём обозначения

$$\frac{(BSN)^2}{JR_{\Sigma}} = 2\gamma, \quad \frac{D}{J} = \omega_0^2, \quad \frac{BSN}{J} = K. \quad (4)$$

Уравнение движения рамки примет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = KI. \quad (5)$$

Величина γ называется коэффициентом затухания подвижной системы гальванометра, ω_0 — собственной частотой колебаний рамки.

Следует отметить, что ток I в уравнении (5) определяется величиной ЭДС \mathcal{E} внешнего источника, к которому подключён гальванометр: $I = \mathcal{E}/R_{\Sigma}$, а влияние индукционного тока, тормозящего движение рамки, отражает слагаемое, пропорциональное $\dot{\varphi}$.

Измерение постоянного тока (динамический или стационарный режим). Если через рамку пропускать постоянный ток (достаточно долго, чтобы затухли колебания подвижной системы), то в уравнении (5) можно положить $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = 0$, и угол поворота определится формулой

$$\varphi = \frac{K}{\omega_0^2}I = \frac{BSN}{D}I = \frac{I}{C_I}.$$

Величина C_I называется динамической постоянной гальванометра:

$$C_I = \frac{I}{\varphi} = \frac{D}{BSN}.$$

Свободные колебания рамки. Исследуем свободное движение рамки (т. е. движение в отсутствие внешних источников тока, когда $I = 0$). Предположим, что выполнены следующие начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0. \quad (6)$$

При этом уравнение (5) примет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) полностью аналогично уравнению (B.8) Введения. Исследование решений (B.8) подробно проведено во введении к разделу. Применим полученные результаты для анализа движения рамки. Общее решение уравнения (7) имеет вид

$$\varphi = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (8)$$

где A_1 и A_2 нужно выбрать так, чтобы удовлетворить начальным условиям. Здесь возможны следующие случаи.

1. Затухание мало, $\gamma < \omega_0$ (колебательный режим).

Решение уравнения (7), удовлетворяющее начальным условиям (6), имеет в этом случае вид

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega} e^{-\gamma t} \sin \omega t, \quad (9)$$

где

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2. \quad (10)$$

Движение рамки имеет колебательный характер и затухает со временем.

Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{D}{J} - \frac{(BSN)^4}{(2JR_\Sigma)^2}}}. \quad (11)$$

Если затухание очень мало, $\gamma \ll \omega_0$ ($\omega \simeq \omega_0$), то движение рамки близко к синусоидальному:

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (12)$$

2. $\gamma = \omega_0$ (критический режим). Решение уравнения (7) в этом случае имеет вид

$$\varphi = \dot{\varphi}_0 t e^{-\gamma t}. \quad (13)$$

Движение не имеет колебательного характера: отклонённая подвижная система после отброса почти экспоненциально приближается к нулю.

3. Затухание велико, $\gamma > \omega_0$ (случай переуспокоенного гальванометра). Решение (7) в этом случае имеет вид

$$\varphi = \frac{\dot{\varphi}_0}{\varkappa} e^{-\gamma t} \operatorname{sh} \varkappa t, \quad (14)$$

где

$$\varkappa^2 = \gamma^2 - \omega_0^2.$$

Движение остаётся аperiодическим.

Измерение заряда (баллистический режим). Как уже было отмечено, период свободных колебаний баллистического гальванометра благодаря искусственному увеличению момента инерции рамки оказывается очень большим (порядка десяти секунд). Если пропустить через рамку короткий импульс тока, то можно считать, что весь ток успеваеет пройти при неотклонённом положении рамки. Рамка, однако, при этом получает толчок, в результате которого возникает движение, описываемое уравнением свободных колебаний (7) при начальных условиях (6).

Для вычисления скорости $\dot{\varphi}_0$, полученной в результате толчка, умножим уравнение (4) на dt и проинтегрируем его по времени от 0 до τ — момента окончания токового импульса:

$$\int_0^\tau \ddot{\varphi} dt + 2\gamma \int_0^\tau \dot{\varphi} dt + \omega_0^2 \int_0^\tau \varphi dt = K \int_0^\tau I dt. \quad (15)$$

Рассмотрим первое слагаемое этого равенства:

$$\int_0^\tau \ddot{\varphi} dt = \dot{\varphi} \Big|_0^\tau = \dot{\varphi}(\tau). \quad (16)$$

Второе и третье слагаемые пренебрежимо малы:

$$2\gamma \int_0^\tau \dot{\varphi} dt = 2\gamma \varphi \Big|_0^\tau \approx 0, \quad \omega_0^2 \int_0^\tau \varphi dt \approx 0, \quad (17)$$

поскольку, согласно принятому условию, к моменту времени τ рамка практически не сдвигается из положения равновесия.

$$K \int_0^\tau I dt = Kq,$$

где q — полный электрический заряд, прошедший через рамку за время импульса. Строго говоря, заряд q определяется не только током I , вызванным внешней ЭДС \mathcal{E} , но и током индукции, возникающим при движении рамки, но в наших условиях, согласно (17), вкладом индукционного тока можно пренебречь.

Итак, уравнение (15) сводится к следующему:

$$\dot{\varphi}(\tau) = Kq. \quad (18)$$

Таким образом, при пропускании коротких импульсов тока через баллистический гальванометр начальная скорость движения рамки пропорциональна полному электрическому заряду, прошедшему через рамку за всё время импульса. Подставляя выражение (18) в решения (9), (13) или (14), легко увидеть, что наибольший угол, на который отклоняется рамка, также пропорционален q .

Величина $C_Q = q/\varphi_{\max}$ называется баллистической постоянной гальванометра. Баллистическая постоянная наряду с динамической является важнейшей характеристикой гальванометра, но в отличие от динамической она существенно зависит от режима работы гальванометра (от сопротивления цепи).

Выбирая оптимальный режим работы гальванометра, приходится одновременно исходить из двух противоречивых требований: желания получить максимальную чувствительность гальванометра к заряду и стремления по возможности сократить время, затрачиваемое на измерения.

Расчёт показывает, что максимальный отброс достигается при полном отсутствии затухания (тормозящий индукционный ток отсутствует при обрыве в цепи):

$$\varphi_{\max \text{ св}} = \frac{\dot{\varphi}(\tau)}{\omega_0} = \frac{Kq}{\omega_0}. \quad (19)$$

В этом случае, однако, возникшие в результате отброса колебания рамки не будут успокаиваться, и прибор не скоро сможет быть использован для повторных измерений. Поэтому обычно заботятся о том, чтобы затухание гальванометра не было слишком малым. Кроме того, отметим что затухание приводит к тому, что зайчик начинает вести себя более спокойно и слабее реагирует на посторонние электрические и механические импульсы.

Обычно удобнее всего работать в режиме, близком к критическому. При этом обеспечивается быстрое затухание колебаний, и чувствительность прибора достаточно велика.

Как следует из уравнения (13), в случае критического затухания

$$\varphi_{\max \text{ кр}} = \frac{Kq}{\omega_0 e}. \quad (20)$$

Таким образом, в критическом режиме максимальное отклонение зайчика в e раз меньше, чем в режиме свободных колебаний. Отсюда, в част-

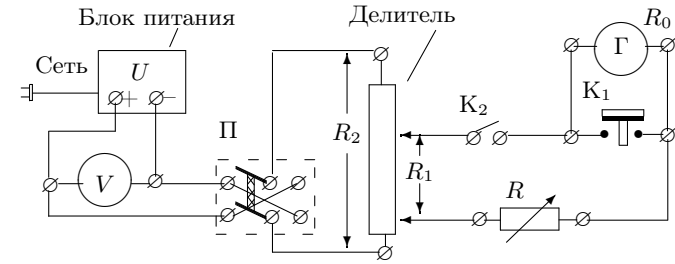


Рис. 2. Схема установки для работы гальванометра в стационарном режиме

ности, следует, что отношение баллистических постоянных

$$\frac{C_{Q \text{ кр}}}{C_{Q \text{ св}}} = e.$$

А. Определение динамической постоянной

Экспериментальная установка. Схема для исследования гальванометра в стационарном (или динамическом) режиме представлена на рис. 2. Постоянное напряжение $U \approx 1,5$ В снимается с блока питания и измеряется вольтметром V . Ключ Π позволяет менять направление тока через гальванометр Γ , делитель напряжения — менять величину тока в широких пределах. Ключ Π служит для включения гальванометра, кнопка K_1 — для его успокоения. Магазин сопротивлений R позволяет менять режим работы гальванометра от колебательного до апериодического.

При малых R_1 сила тока, протекающего через гальванометр может быть вычислена по очевидной формуле:

$$I = U_0 \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{R + R_0}, \quad (21)$$

где U_0 — показания вольтметра, R_1/R_2 — положение делителя, R — сопротивление магазина, R_0 — внутреннее сопротивление гальванометра.

Угол отклонения рамки от положения равновесия измеряется с помощью осветителя, зеркальца, укрепленного на рамке, и шкалы, на которую отбрасывается луч света от зеркальца. Координата x светового пятна на шкале связана с углом отклонения рамки формулой

$$x = a \operatorname{tg}(2\varphi),$$

где a — расстояние от шкалы до зеркальца. При малых углах можно считать, что $\varphi = x/2a$. Динамическую постоянную

$$C_I = \frac{I}{x/2a}, \quad (22)$$

как правило, выражают в единицах $\left[\frac{\text{А}}{\text{мм/м}}\right]$ (ток I измеряется в амперах, x — в мм, a — в метрах). Расстояние a обычно около метра, поэтому величина C_I определяет ток, при котором зайчик отклоняется на одно деление (1 мм).

Б. Определение критического сопротивления гальванометра, работающего в динамическом режиме

Измерение критического сопротивления гальванометра можно выполнить с помощью той же цепи (рис. 2).

При больших R свободное движение рамки имеет колебательный характер. С уменьшением R затухание увеличивается [см. (4)], и колебательный режим переходит в апериодический.

Скорость затухания колебаний принято характеризовать декрементом затухания Δ , равным отношению углов двух последовательных отклонений в одну сторону. С помощью (9) находим

$$\Delta = \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = \frac{x_n}{x_{n+1}} = e^{\gamma T},$$

где T — период колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (23)$$

Вместо декремента затухания Δ можно рассматривать логарифмический декремент затухания Θ :

$$\Theta = \ln \Delta = \gamma T = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}}. \quad (24)$$

Измеряя зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления внешней цепи, можно найти $R_{\text{кр}}$, т. е. значение R , при котором $\Theta \rightarrow \infty$. Измерения логарифмического декремента при сильном затухании затруднены, поэтому исследуем зависимость Θ от R . Подставляя в (24) значения T из (23), ω из (10), γ и ω_0 из (4), получим

$$\Theta = \gamma T = 2\pi \frac{\gamma}{\omega} = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi R_3}{\sqrt{(R_0 + R)^2 - R_3^2}}, \quad (25)$$

где введено обозначение

$$R_3 = \frac{(BSN)^2}{2\sqrt{JD}} = R_0 + R_{\text{кр}}. \quad (26)$$

После простого преобразования равенства (25) получим

$$\frac{1}{\Theta^2} = \frac{(R_0 + R)^2}{4\pi^2 R_3^2} - \frac{1}{4\pi^2}. \quad (27)$$

Последнее уравнение, представленное на графике в координатах $X = (R_0 + R)^2$, $Y = 1/\Theta^2$ имеет вид прямой, угол наклона которой позволяет рассчитать критическое сопротивление:

$$R_{\text{кр}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\Delta X}{\Delta Y}} - R_0. \quad (28)$$

В. Определение баллистической постоянной и критического сопротивления гальванометра, работающего в баллистическом режиме

Экспериментальная установка. Для изучения работы гальванометра в режиме измерения заряда используется схема, представленная на рис. 3. Система ключей устроена так, что нормально ключ K_2 замкнут, а ключи K_3 и K_4 разомкнуты. При нажатии на кнопку K_0 сначала размыкается ключ K_2 , затем замыкается K_3 и через некоторое время — K_4 .

При нормальном положении кнопки K_0 конденсатор C заряжается до напряжения

$$U_c = \frac{R_1}{R_2} U_0.$$

Заряд конденсатора равен

$$q = CU_c = \frac{R_1}{R_2} U_0 C. \quad (29)$$

При нажатии на ключ K_0 конденсатор отключается от источника постоянного напряжения (размыкается ключ K_2) и подключается к гальванометру (замыкается ключ K_3).

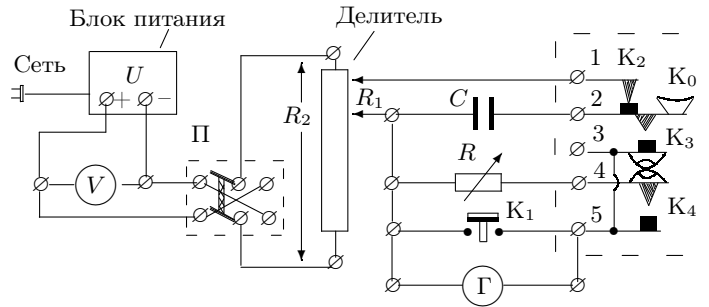


Рис. 3. Схема установки для определения баллистической постоянной

Ёмкость конденсатора выбрана так, что к моменту замыкания ключа K_4 весь заряд успевает пройти через гальванометр, и рамка получает начальную скорость $\dot{\varphi}(\tau)$ (см. (18)). При этом можно считать, что отклонение рамки, происходящее за время, протекающее между замыканием ключей K_3 и K_4 , равно нулю.

При замыкании ключа K_4 гальванометр шунтируется внешним сопротивлением R , и в зависимости от величины этого сопротивления движение рамки описывается одним из уравнений (12), (13) или (14).

Первый отброс зайчика l_{\max} после нажатия на кнопку K_0 зависит от сопротивления внешней цепи, подключённой к гальванометру. Для определения $R_{\text{кр}}$ используется то обстоятельство, что в критическом режиме максимальное отклонение зайчика в e раз меньше, чем у гальванометра без затухания [см. (19) и (20)].

Следует помнить, что наблюдать колебания рамки при полном отсутствии затухания, конечно, невозможно, т. к. даже при разомкнутой внешней цепи ($R = \infty$) остаётся трение в подвеске и трение рамки о воздух. Величину максимального отклонения гальванометра без затухания φ_0 можно, однако, рассчитать, если при разомкнутой цепи измерены максимальное отклонение рамки φ_1 и логарифмический декремент затухания Θ_0 .

Из уравнений (9) и (24) следует, что при $\gamma \ll \omega_0$

$$\varphi_0 = \varphi_1 \cdot e^{\Theta_0/4} \quad \text{или} \quad l_0 = l_1 \cdot e^{\Theta_0/4}. \quad (30)$$

Баллистическая постоянная гальванометра $C_{Q \text{ кр}} \left[\frac{\text{Кл}}{\text{мм/м}} \right]$ определяется при критическом сопротивлении ($R = R_{\text{кр}}$):

$$C_{Q \text{ кр}} = \frac{q}{\varphi_{\text{макс кр}}} = 2a \frac{R_1}{R_2} \frac{U_0 C}{l_{\text{макс кр}}}, \quad (31)$$

где $l_{\text{макс кр}}$ — величина первого отброса в критическом режиме, выраженная в делениях шкалы (мм), a — расстояние от зеркальца до шкалы, выраженное в метрах, произведение $U_0 C$ — заряд, выраженный в кулонах.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается определить динамическую постоянную, критическое сопротивление и оценить линейность шкалы гальванометра, работающего в стационарном (токовом) режиме; определить критическое сопротивление и баллистическую постоянную гальванометра, работающего в баллистическом режиме (режиме измерения заряда).

Подробно правила выполнения работы изложены в ДОПОЛНИТЕЛЬНОМ ОПИСАНИИ, расположенном на установке.

1. Соберите электрическую цепь по рис. 2 и подготовьте приборы к работе.
2. Для определения динамической постоянной снимите зависимость отклонения зайчика x от сопротивления магазина R , увеличивая сопротивление магазина, но не меняя делителя (8–10 значений).
3. Запишите показания вольтметра U_0 , положение делителя R_1/R_2 , величину R_2 и внутреннее сопротивление гальванометра R_0 , указанное на установке.
4. Проведите измерение логарифмического декремента затухания Θ_0 в режиме свободных колебаний.
5. Измерьте период T_0 свободных колебаний рамки (приблизённо).
6. Определите критическое сопротивление. Для этого подберите **наибольшее** сопротивление магазина, при котором при размыкании ключа Π зайчик не переходит за нулевое значение. Это сопротивление близко к критическому сопротивлению цепи $R_{\text{кр}}$.
7. Для расчёта Θ проведите измерение отклонений зайчика после размыкания ключа Π , увеличивая R от $\simeq 3 R_{\text{кр}}$ (близкое целое) до $10 R_{\text{кр}}$.
8. Для исследования работы гальванометра в баллистическом режиме соберите схему по рис. 3.

В режиме свободных колебаний (при разомкнутой цепи R) определите первый отброс зайчика после замыкания ключа K_0 . Подберите делитель так, чтобы при замыкании ключа K_0 первый отброс $l_{\text{макс}}$ соответствовал отклонению зайчика почти на всю шкалу.

Вновь подключите магазин R . Не меняя положения делителя, снимите зависимость первого отброса от величины R (8–10 значений).

9. Запишите положение делителя R_1/R_2 и значение ёмкости C . Измерьте расстояние a от шкалы до зеркальца гальванометра.

Обработка результатов

1. Рассчитайте токи I по формуле (21) и постройте график $I = f(x)$. Оцените линейность шкалы гальванометра. По наклону прямой рассчитайте динамическую постоянную C_I [А/(мм/м)] по формуле (22).
2. Рассчитайте логарифмический декремент затухания Θ_0 разомкнутого гальванометра по формуле (24).
3. Постройте график $1/\Theta^2 = f[(R + R_0)^2]$ и по наклону прямой (в области малых R) рассчитайте критическое сопротивление по формуле (28).
4. Постройте график $l_{\max} = f[(R_0 + R)^{-1}]$. Определите по графику критическое сопротивление гальванометра [с учётом (30)].
5. Рассчитайте баллистическую постоянную в критическом режиме $C_{Q\text{кр}}$ [Кл/(мм/м)] по формуле (31).
6. Сравните время релаксации $t = R_0 C$ и период свободных колебаний гальванометра T_0 .
7. Сведите результаты эксперимента в таблицу:

$N_{\text{уст}}$	R_0	$R_{\text{кр}}$			C_I А/(мм/м)	$C_{Q\text{кр}}$ Кл/(мм/м)
		Подбор	$1/\Theta^2$	Балл.		

8. Оцените погрешности и сравните полученные значения $R_{\text{кр}}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение динамической постоянной гальванометра. От чего она зависит и в каких единицах указывается в паспорте гальванометра?
2. Какие виды движения рамки возможны при работе гальванометра в динамическом режиме? Какой из них следует использовать для измерения постоянного тока?
3. Как влияет увеличение омического сопротивления цепи на затухание колебаний рамки гальванометра?
4. Почему рамка гальванометра быстро успокаивается при замыкании кнопки K_1 (см. рис. 2)?
5. Зачем в полюсах магнита гальванометра делают вырез цилиндрической формы? (рис. 1)
6. В чём сущность баллистического режима работы гальванометра? Дайте определение баллистической постоянной гальванометра.
7. При каких условиях первый отброс гальванометра, работающего в баллистическом режиме, максимален?
8. Выведите формулу (30).
9. При значениях $R > 10R_{\text{кр}}$ возможно отклонение графика $1/\Theta^2 = f[(R_0 + R)^2]$ от прямой. Какие силы следует учесть для объяснения этого отклонения?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т.III. Электричество. — М.: Наука, 1983, §§ 124, 125.
2. Калашиников С.Г. Электричество. — М.: Наука, 1977, §§ 56, 209, 210.

Соотношение некоторых единиц систем СИ и СГС

Длина	l	1 м = 100 см
Масса	m	1 кг = 1000 г
Сила	F	1 Н = 10^5 дин
Энергия	$W = Fl$	1 Дж = 10^7 эрг
Давление	$P = F/S$	1 Па = 10 дин/см ²
Заряд	q	1 Кл = $3 \cdot 10^9$ ед. СГС
Напряжение	$U = W/q$	300 В = 1 ед. СГС
Сила тока	$I = q/t$	1 А = $3 \cdot 10^9$ ед. СГС
Сопротивление	$R = U/I$	$9 \cdot 10^{11}$ Ом = 1 с/см
Проводимость	$\Lambda = 1/R$	1 Сименс = $9 \cdot 10^{11}$ см/с
Удельное сопротивление	ρ	$9 \cdot 10^9$ Ом·м = 1 с
Удельная проводимость	$\lambda = 1/\rho$	1 См/м = $9 \cdot 10^9$ с ⁻¹
Ёмкость	$C = q/U$	1 Ф = $9 \cdot 10^{11}$ см
Индуктивность	$L = \Phi/I$	1 Гн = 10^9 см
Напряжённость электрического поля	$E = F/q$	$3 \cdot 10^4$ В/м = 1 ед. СГС
Индукция магнитного поля	B	1 Тл = 10^4 Гс
Вектор поляризации	P	1 Кл/м ² = $3 \cdot 10^5$ ед. СГС
Намагниченность	M	1 А/м = $\frac{1}{4\pi} \cdot 10^4$ Гс
Магнитный поток	$\Phi = BS$	1 Вебер = 10^8 Максвелл
Индукция электрического поля	D	1 Кл/м ² = $12\pi \cdot 10^5$ ед. СГС
Напряжённость магнитного поля	H	1 А/м = $4\pi \cdot 10^{-3}$ Э

Основные физические постоянные

Величина	Обозначение или формула	Числовое значение
Скорость света в вакууме	c	299 792 458 м/с (точно) $2,99792458 \cdot 10^{10}$ см/с
Постоянная Планка	h	$6,62607 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $6,62607 \cdot 10^{-27}$ эрг·с
	$\hbar = h/2\pi$	$1,05457 \cdot 10^{-34}$ Дж·с $1,05457 \cdot 10^{-27}$ эрг·с
Постоянная Больцмана	k	$1,38065 \cdot 10^{-23}$ Дж/К $1,38065 \cdot 10^{-16}$ эрг/К
Постоянная Авогадро	N_A	$6,02214 \cdot 10^{23}$ моль ⁻¹
Атомная единица массы	1 а.е.м	$1,66054 \cdot 10^{-27}$ кг
		$1,66054 \cdot 10^{-24}$ г
Газовая постоянная	$R = kN_A$	$8,3145$ Дж/(моль·К) $8,3145 \cdot 10^7$ эрг/(моль·К)
Число Лошмидта	$N_L = N_A/V_0$	$2,6868 \cdot 10^{19}$ см ⁻³
Гравитационная постоянная	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ Н·м ² /кг ²
		$6,67 \cdot 10^{-8}$ дин·см ² /г ²
Постоянная Фарадея	$F = N_A e$	$9,64853 \cdot 10^4$ Кл/моль
Магнитная постоянная	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$	$1,2566370614 \dots \cdot 10^{-6}$ Гн/м
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8,854187817 \dots \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Элементарный заряд	e	$1,6021765 \cdot 10^{-19}$ Кл
		$4,8032042 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ
Удельный заряд электрона	$\frac{e}{m_e}$	$1,758820 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
		$5,2728 \cdot 10^{17}$ ед. СГСЭ
Масса электрона	m_e	$0,910938 \cdot 10^{-30}$ кг
		$0,910938 \cdot 10^{-27}$ г
Масса протона	m_p	$1,672622 \cdot 10^{-27}$ кг
		$1,672622 \cdot 10^{-24}$ г
Масса нейтрона	m_n	$1,674927 \cdot 10^{-27}$ кг
		$1,674927 \cdot 10^{-24}$ г
Магнетон Бора	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$0,927401 \cdot 10^{-23}$ А·м ²
		$0,927401 \cdot 10^{-20}$ эрг/Гс
Магнитный момент электрона	μ_e	$0,928476 \cdot 10^{-23}$ А·м ²
		$0,928476 \cdot 10^{-20}$ эрг/Гс

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Свободные колебания	4
2. Вынужденные колебания. Метод комплексных амплитуд	10
3. Вынужденные колебания. Резонанс	14
4. Процесс установления колебаний	21
Лабораторные работы	24
4.2. Дробовой шум (эффект Шоттки)	24
4.5. Свободные колебания в электрическом контуре	31
4.6. Вынужденные колебания в электрическом контуре	35
4.7. Сдвиг фаз в цепи переменного тока	39
4.8. Резонанс напряжений	45
4.8А. Резонанс токов	50
4.9. Исследование гальванометра	53