

3.6.2 (151). СИНТЕЗ ГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ

3 августа 2015 г.

Сколь угодно сложный электрический сигнал $V(t)$ может быть разложен на более простые сигналы. В радиотехнике широко используется разложение сигнала $V(t)$ на совокупность гармонических сигналов различных частот ω . Функция $F(\omega)$, описывающая зависимость амплитуд отдельных гармоник от частоты, называется *амплитудной спектральной характеристикой* сигнала $V(t)$. Представление сложного периодического сигнала в виде суммы дискретных гармонических сигналов в математике называется *разложением в ряд Фурье (прямое преобразование Фурье)*.

Зная спектральный состав $F(\omega)$ периодической последовательности некоторого импульса $V(t)$, мы можем осуществить *обратное преобразование Фурье*: сложив отдельные гармоники со своими амплитудами и фазами, получить необходимую последовательность импульсов. Степень совпадения полученного сигнала с $V(t)$ определяется количеством синтезированных гармоник: чем их больше, тем лучше совпадение.

Рассмотрим конкретные примеры периодических функций, которые будут предметом исследования в нашей работе.

I. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов (рис. 1). Амплитуда импульсов равна V_0 , длительность отдельного импульса — τ , частота повторения $f_{\text{повт}} = 1/T$, где T — период повторения. Отношение $T/\tau = 7$.

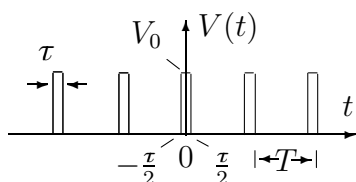


Рис. 1. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

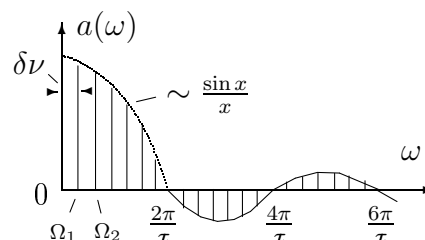


Рис. 2. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Применяя формулы (6.1) – (6.4), найдём среднее значение (постоянную составляющую):

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}.$$

Амплитуды косинусных составляющих равны:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau \sin(n\Omega_1 \tau/2)}{T n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (1)$$

Поскольку наша функция чётная, все амплитуды синусоидальных гармоник $b_n = 0$. В этом случае $A_n = a_n$, а начальная фаза колебаний $\psi_n = 0$ в области частот

$$\frac{4\pi n}{\tau} < \Omega_n < \frac{2\pi(2n+1)}{\tau} \quad (2)$$

или $\psi_n = \pi$ в области

$$\frac{2\pi(2n+1)}{\tau} < \Omega_n < \frac{2\pi(2n+2)}{\tau}, \quad (3)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Спектральное распределение амплитуд дискретных гармоник для бесконечной последовательности прямоугольных импульсов при отношении $T/\tau = 7$ представлено на рис. 2. «Отрицательные» амплитуды на рисунке соответствуют тем гармоникам, фаза которых $\psi_n = \pi$.

II. Периодическая последовательность треугольных импульсов с отношением $T/\tau = 3,5$ (рис. 3).

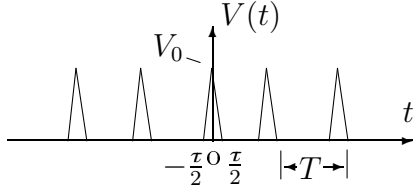


Рис. 3. Периодическая последовательность треугольных импульсов

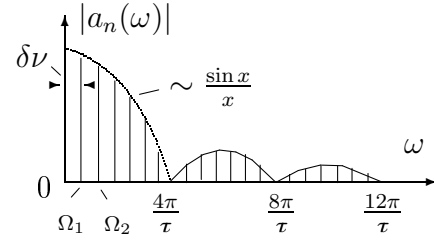


Рис. 4. Спектр периодической последовательности треугольных импульсов ($T/\tau = 3,5$)

Амплитуды в спектре последовательности треугольных импульсов меняются по закону

$$|A_n| = \frac{V_0 \tau}{2T} \left(\frac{\sin[\pi n \tau / (2T)]}{\pi n \tau / (2T)} \right)^2. \quad (4)$$

Фаза n -й гармоники $\psi_n = 0$ в области частот

$$\frac{8\pi n}{\tau} < \Omega_n < \frac{4\pi(2n+1)}{\tau} \quad (5)$$

или $\psi_n = \pi$ в области

$$\frac{4\pi(2n+1)}{\tau} < \Omega_n < \frac{4\pi(2n+2)}{\tau}. \quad (6)$$

Модуль спектральной плотности $|a(\omega)| = |A_n|$ для такой функции представлен на рис. 4.

А. СИНТЕЗ ГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ (реальный генератор)

В работе используются: генератор гармонических сигналов Г6-1, источник питания, осциллограф.

Экспериментальная установка. Основным элементом экспериментальной установки является генератор гармонических сигналов Г6-1, который генерирует одновременно основной сигнал (на выбранной частоте) и пять гармоник, кратных основному сигналу и синхронных с ним. Например, если частота основного сигнала (1-ая гармоника) составляет 1 кГц, то частоты остальных пяти гармоник — 2 кГц, 3 кГц, 4 кГц, 5 кГц и 6 кГц. Все 6 гармоник могут складываться при помощи электронного сумматора, на выходе которого образуется сигнал сложной формы. Этот сигнал с выхода генератора подаётся на вход Y осциллографа, на экране которого можно наблюдать (в режиме непрерывной развёртки) периодическую последовательность синтезированных сигналов. Технические данные генератора и порядок работы с ним изложены в отдельном техническом описании, расположенном на установке.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается подобрать амплитуды синусоидальных колебаний с кратными частотами, сумма которых даёт периодическую последовательность прямоугольных или треугольных импульсов.

I. Синтез последовательности прямоугольных импульсов

1. Прочтите техническое описание (ТО) генератора Г6-1.
2. Тумблером 1 (рис. 1 ТО) включите в сеть блок питания генератора. За время прогрева генератора (около 10 мин) рассчитайте относительные значения амплитуд первых шести гармоник в спектре периодической последовательности прямоугольных импульсов с отношением $T/\tau = 7$: нулевая гармоника (постоянная составляющая) не используется; первая гармоника соответствует основному сигналу генератора; приняв амплитудное значение первой гармоники за единицу, рассчитайте относительные амплитудные значения (a_n/a_1) остальных пяти гармоник по формуле (1). Амплитуда седьмой гармоники в наших условиях (при $T/\tau = 7$) равна нулю. Значения синусов, необходимые для вычислений, приведены в таблице:

n	1	2	3	4	5	6
α_n	$\pi/7$	$2\pi/7$	$3\pi/7$	$4\pi/7$	$5\pi/7$	$6\pi/7$
$\sin \alpha_n$	0,434	0,782	0,975	0,975	0,782	0,434
$a_n \sim \frac{\sin \alpha_n}{n}$						
$\frac{a_n}{a_1} = \frac{\sin(n\pi/7)}{n \sin(\pi/7)}$	1					

3. Установите частоту первой гармоники — 10 кГц (см. ТО, I).

Все шесть гармоник при суммировании должны иметь одинаковые фазы, поскольку их начальные фазы равны нулю [см. (2)]. Предварительная регулировка фаз проводится при одинаковых напряжениях гармоник.

Откалибруйте (уравняйте) напряжения гармоник [см. ТО, II]. Если напряжение какой-либо гармоники не достигает калибровочного, оставьте максимально возможное (для следующего этапа — предварительной регулировки фазы — это несущественно).

4. Включите в сеть осциллограф и проведите регулировку фазы гармоник (см. ТО, III).

С помощью осциллографа установите рассчитанные Вами относительные амплитуды гармоник [см. ТО, IIв)].

5. Последовательно увеличивая число гармоник, копируйте на кальку сигнал, возникающий на экране осциллографа. Перед тем, как подключить новую гармонику, ещё раз подстройте её фазу так, как Вы это делали, выполняя п. 4.

По результирующей осциллограмме, соответствующей сумме всех шести гармоник, определите отношение T/τ и сравните его с теоретическим значением.

II. Синтез последовательности треугольных импульсов

6. Рассчитайте с помощью формулы (4) относительные амплитуды гармоник в спектре периодической последовательности треугольных импульсов с отношением $T/\tau = 3,5$. Для этого возведите в квадрат относительные амплитудные значения гармоник для спектра прямоугольных импульсов [см. (1), (4) и таблицу в п. 2].

7. Установите относительные амплитуды гармоник, [см. ТО, IIв)].

8. Получите осциллограмму от всех шести гармоник и скопируйте её на кальку. Определите отношение T/τ и сравните его с теоретическим.

9. Закончив упражнения с реальным генератором, переходите к компьютерному варианту работы (см. дополнительное описание).

Б. СИНТЕЗ ГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ (виртуальный генератор)

В работе используются: компьютер, осциллограф.

ЗАДАНИЕ

В работе предлагается подобрать амплитуды синусоидальных колебаний с кратными частотами, сумма которых даёт периодическую последовательность прямоугольных импульсов разной скважности.

III. Синтез последовательности прямоугольных импульсов («меандра») со скважностью $1/7$

1. Прочтите техническое описание (ТО) виртуального генератора гармоник.
2. Включите компьютер и связанный с ним осциллограф в сеть.
3. Откройте в компьютере окно «Виртуальный генератор гармоник»; используя клавиатуру и текстовое поле над бегунками установите: число гармоник $n = 6$ (амплитуда седьмой гармоники равна нулю); частоту первой гармоники — 200 Гц (выбор частоты определяется рабочей частотой компьютера).
4. С помощью «Графического генератора» рассчитайте амплитуды 6-и гармоник сигнала «меандр» (периодическая последовательность прямоугольных импульсов) со скважностью $1/7$. Для этого в окне «Графический генератор» выберите стандартный сигнал «меандр», в окне «Параметры станд. сигнала» установите амплитуду $a_1 = 1$ и скважность $1/7$ ($\simeq 0,142$). Нажмите кнопку «Принять», при этом в окне «Графического генератора» появится изображение сигнала. Нажмите кнопку «Принять» ещё раз — будет произведено преобразование Фурье и полученные значения амплитуд будут переданы генератору гармоник.

Убедитесь, что амплитуды и фазы гармоник соответствуют рассчитанным для реального генератора: $a_1 = 0,434$, $a_2 = 0,391$, ...; $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 1,507$, ...

5. Включите «Генерацию»; с этого момента генератор начинает работать, выдавая сигнал как на внешний ЭО, так и на внутренние виртуальные измерительные приборы компьютера.

Полученный на ЭО сигнал заметно отличается от меандра, т.к. используемых семи гармоник мало для качественного воспроизведения меандра (крутые фронты и спады сигналов всегда содержат в себе значительную долю высокочастотных компонент).

6. Зарисуйте с экрана ЭО картину сигнала для 6-и гармоник и сравните с тем, что было получено с реальным генератором.

IV. Операции с фазовой плоскостью

7. Откройте панель виртуальной фазовой плоскости: для этого

а) правой кнопкой мыши вызовите на экран всплывающее меню, выберите «Управление» → «Фаз. плоск.» — на экране появится окно «Фазовая плоскость»;

б) снова вызовите на экран всплывающее меню, выберите «Панель» → «Фаз. плоск.» — на экране появится окно фазовая диаграмма меандра для семи гармоник (X — сигнал, Y — производная сигнала).

С помощью движков подберите усиление по вертикали и горизонтали так, чтобы вся фазовая диаграмма была видна. Движки «Смещение» позволяют вывести на экран отдельные области диаграммы.

8. Вернитесь в окно «Виртуальный генератор» и отключите все гармоники, кроме 1-й (галочкой «Вкл» возле соответствующей гармоники). На экране фазовая диаграмма синусоидального сигнала — эллипс.

Проследите за изменением фазовой диаграммы при увеличении числа гармоник от 1-й до 6-й.

V. Влияние числа гармоник и скважности на форму синтезированного сигнала

9. Используя «Графический генератор» для расчёта амплитуд гармоник, получите синтезированный сигнал для 10, 15, 20 гармоник¹: повторите пп. 3–5 для 10-й, 15-й, 20-й гармоник.

Зарисуйте с экрана ЭО синтезированные сигналы для 6-й, 10-й, 15-й, 20-й гармоник при скважности $1/7$ и сравните картины.

Посмотрите, как выглядит спектр при 20-й гарм. Для этого с помощью всплывающего меню включите окно «Управл.» и панель спектроанализатора. Подберите масштаб спектра и зарисуйте картину.

10. Повторите операции для меандра для 6-ти и 20-ти гармоник со скважностью $1/2$.

Сравните спектры при скважностях $1/2$ и $1/7$ для 6-й гармоник. (С ростом скважности растёт роль высоких частот — требуется больше гармоник для воспроизведения правильной формы сигнала.)

11. Сравните спектры при 20-й гармониках и скважности $1/2$ и $1/7$. Отметьте, как скважность влияет на скорость уменьшения амплитуд гармоник: оцените на глаз, во сколько раз 5-я гармоника меньше 1-й.

Исправлено 3-VIII-2015

¹ При числе гармоник >20 возможно замедление работы программы, частота последней гармоники не должна превышать 10 кГц.