

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

Московский физико-технический институт

(государственный университет)

Кафедра общей физики

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ**

Лабораторная работа № **34**

по курсу Общая физика

МОСКВА 2012

**Цель работы:** изучение электростатических полей прямоугольного кабеля, плоского конденсатора, четырёх заряженных цилиндров на электропроводной бумаге.

**В работе используются:** источник питания GPS23-03, делитель напряжения, переключатель, электропроводная бумага, электроды, зонд, нуль-гальванометр.

При конструировании физических приборов часто бывает необходимо знать распределение электростатического поля между электродами сложной конфигурации. Аналитический расчёт таких полей обычно невозможен. Экспериментальное измерение потенциалов внутри реальной системы электродов часто оказывается очень сложным (малые размеры деталей, искажения полей, возникающие при введении потенциального зонда). Для преодоления этих трудностей используют метод электролитической ванны [1]. Увеличенные копии электродов погружают в сосуд, заполненный слабопроводящей жидкостью (электролит или просто водопроводная вода). Между электродами создаётся разность потенциалов и при помощи зонда компенсационным методом определяются потенциалы отдельных точек. При эквипотенциальности электродов линии тока и распределение потенциала в слабопроводящей жидкости будут совпадать с силовыми линиями и распределением потенциала в статическом поле между теми же электродами. При помощи электролитической ванны можно измерять поля в плоскости симметрии пространственной системы электродов, а также двумерные (плоские) поля, которые не зависят от одной из координат.

При измерениях на электролитических ваннах используют переменное напряжение, поскольку при постоянном напряжении происходит электролиз и возникает поляризационная ЭДС. Компенсационные измерения на переменном токе тоже не очень точны. Другим недостатком электролитической ванны является необходимость использования пантографа или сложного координатного устройства для графической фиксации эквипотенциальных линий.

В последнее время при моделирование двумерных (плоских) полей предпочитают использовать в качестве среды не электролит, а электропроводную бумагу, содержащую сажу. Сопротивление  $\rho$  на  $1 \text{ см}^2$  бумаги может иметь величину от  $\sim 10^4$  Ом (бумага для упаковки фотоматериалов) до  $\sim 10^2$  Ом (специальные сорта). В реальных установках размер листа электропроводной бумаги всегда ограничен. Через свободную границу (без электродов) ток не течёт, т.е. нормальная составляющая тока на границе равна нулю. Так как плотность тока  $j$  линейно связана с напряжённостью электрического поля ( $j = \lambda E$ ), то это значит, что свободная граница бумаги должна проходить там, где поле либо пренебрежимо мало (далеко от электродов), либо не имеет нормальной составляющей к границе (в этом случае

эквипотенциали нормальны к границе). Последнее условие всегда выполняется, если граница проходит по оси симметрии электродов. В этом случае достаточно измерить распределение потенциала в одной из полуплоскостей.

**Экспериментальная установка.** Схема экспериментальной установки показана на рис. 1. Электропроводная бумага (1) с удельным поверхностным сопротивлением около 600 Ом на  $1 \text{ см}^2$  кладётся на подставку из изолирующего материала. Электроды (2), прижатые к бумаге с помощью шпилек и гаек, включены в мостовую схему. Подвижный электрод (зонд - 3) присоединен к делителю напряжения (4) через нуль-гальванометр Г. Касаясь зондом бумаги, можно найти точки, потенциал которых равен потенциалу, выбранному на делителе. При этом ток через гальванометр будет равен нулю. Найденные таким способом точки фиксируются на бумаге нажатием на зонд. С помощью шунтирующего сопротивления  $R$  можно изменять чувствительность гальванометра (грубо - точно). Нуль-гальванометр, делитель напряжения с переключателем (5) и шунтирующее сопротивление смонтированы в отдельном блоке управления, к клеммам которого подключаются источник питания И, электроды и зонд. Электроды, показанные на этом рисунке, моделируют поле прямоугольного кабеля (рис. 2а). Из соображений симметрии достаточно изучить распределение потенциала в одном квадранте кабеля (рис. 2б).

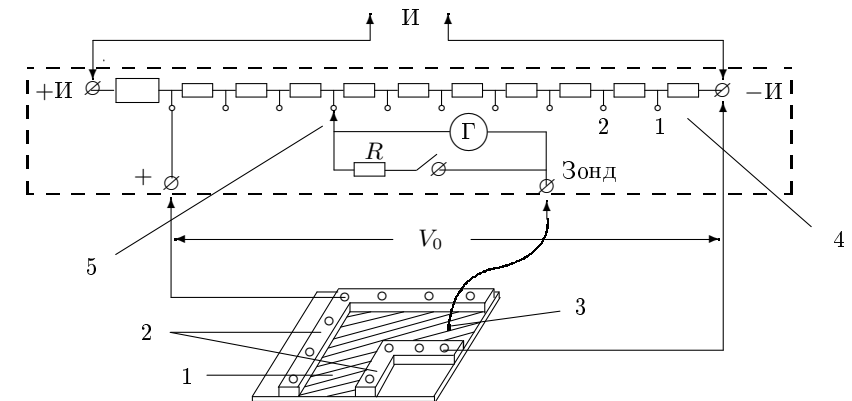


Рис. 1. Схема установки. 1 — электропроводная бумага, 2 — электроды, 3 — зонд, 4 — делитель напряжения, 5 — переключатель

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается изучить форму полей а) прямоугольного кабеля, б) плоского конденсатора, в) четырёх заряженных цилиндров и сравнить результат эксперимента с теоретическим расчётом.

## I. Моделирование поля прямоугольного кабеля

1. Соберите схему согласно рис. 1 (ТО источника GPS23-03 см. в конце папки).
2. Включите источник питания и установите напряжение около 20 В. При минимальной чувствительности зонда убедитесь, что потенциал одного зонда равен нулю, а другого — максимален (стрелка доходит до конца шкалы, если нет — добавьте напряжение).
3. Изучите форму эквипотенциальных линий для напряжения на зонде  $V = 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,8$  от напряжения  $V_0$  на электродах (проставьте наборы точек, соответствующих каждой из эквипотенциалей).

Если электроды прижимаются к бумаге недостаточно сильно, то в этом месте эквипотенциали приближаются к электроду. Постарайтесь исправить картину более равномерным и сильным затягиванием гаек. Проверяйте затяжку во время опыта. Отметьте те места, где, несмотря на принятые меры, контактное сопротивление всё же заметно искажает поле.

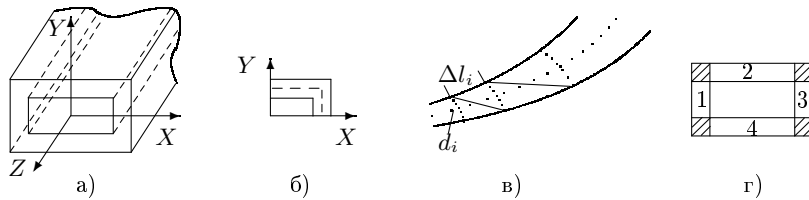


Рис. 2. а) Прямоугольный кабель б) Квадрант сечения кабеля  
в) Обработка эквипотенциалей г) Кабель как сумма плоских конденсаторов

4. Точки каждой эквипотенциали соедините плавной линией. Проанализируйте полученную картину. Выберите эквипотенциали, где поле меньше искажено (примерно в середине семейства кривых).
5. Найдите полный поток вектора напряжённости электрического поля  $\mathbf{E}$  через поверхность, окружающую внутренний электрод кабеля единичной длины (вдоль оси  $Z$ )

$$\Phi = \int_l \mathbf{E} d\mathbf{l} = 4\pi q,$$

где  $l$  — длина эквипотенциальной линии,  $q$  — заряд на электродах.

Для этого выберите две близких эквипотенциали (например,  $0,3V_0$  и  $0,4V_0$ ), проведите между ними среднюю линию, разбейте её на  $N$  ( $\sim 8-10$ ) интервалов  $\Delta l_i$  и проведите силовые линии  $d_i$  через выбранные точки (см. рис. 2в). Интервалы могут быть разной длины, но все отношения  $d_i/\Delta l_i$  (длины силовой линии к длине соответствующего участка эквипотенциали) не должны отличаться более, чем в 2–3 раза.

Напряжённость поля  $E_i$  между эквипотенциалами для каждого интервала  $\delta l_i$ :

$$E_i = \frac{V_4 - V_3}{d_i}.$$

Тогда полный поток  $\mathbf{E}$  (для одного квадранта прямоугольного кабеля единичной длины)

$$\Phi = \int_l \mathbf{E} d\mathbf{l} \approx (V_4 - V_3) \sum_{i=1}^N \frac{\Delta l_i}{d_i}. \quad (1)$$

Используя теорему Гаусса, можно найти заряд на электродах

$$q = \frac{\Phi}{4\pi} = \frac{(V_4 - V_3)}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta l_i}{d_i}$$

и межэлектродную ёмкость (на единицу длины):

$$C = \frac{q}{V_0} = \frac{V_4 - V_3}{4\pi V_0} \sum_{i=1}^N \frac{\Delta l_i}{d_i}. \quad (2)$$

Мы получили выражение для ёмкости (в сантиметрах) квадранта прямоугольного кабеля длиной 1 см. Полная ёмкость такого кабеля в 4 раза больше.

6. Сравните полученное значение с ёмкостью плоского конденсатора и с ёмкостью коаксиального цилиндрического кабеля аналогичных размеров.

Прямоугольный кабель можно рассматривать как сумму 4-х плоских конденсаторов (рис. 2г) без учёта заштрихованных областей или как кабель круглого сечения.

## II. Изучение квадрупольного поля

Квадрупольное поле (рис. 3) создаётся в пространстве между четырьмя противоположно заряженными бесконечными гиперболическими цилиндрами, симметрично расположенными относительно оси  $Z$  (ось  $Z \perp$  чертежу). Эквипотенциали следуют равнобочным гиперболам (в сечении плоскостью  $XY$ ). Силовые линии образуют семейство гипербол, ортогональных эквипотенциальным линиям.

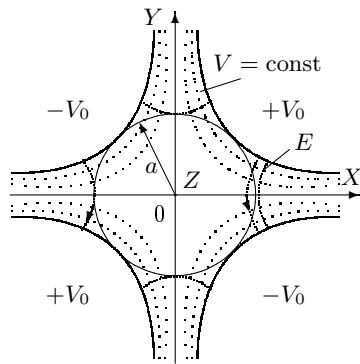


Рис. 3. Квадрупольное поле

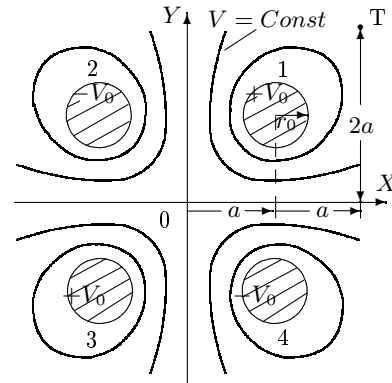


Рис. 4. Поле заряженных цилиндров

Математическое описание квадрупольного поля см. в дополнении. Идеальное квадрупольное поле создать невозможно: уходящие в бесконечность гиперболические электроды придется «обрезать». Это вызывает искажение поля. Однако можно показать, что система любых четырех симметричных электродов создаёт вблизи оси симметрии  $Z$  поле, близкое к квадрупольному.

В нашем случае изучается поле между четырьмя бесконечными противоположно заряженными цилиндрами (рис. 4). На плоскостях  $x = 0$  и  $y = 0$  потенциал равен нулю. Поэтому такое же поле будет создаваться заряженным цилиндром, расположенным на биссектрисе вблизи заземлённых ортогональных плоскостей.

Можно ещё более упростить задачу, используя симметрию относительно биссектрисы прямого угла, и провести измерения на половине квадранта  $OXY$ . Биссектриса будет свободной границей (рис. 5).

Поле от четырёх цилиндров можно непосредственно рассчитать. Пусть заряд единицы длины одного цилиндра  $q$ . Напряжённость поля  $E = 2q/r$  и направлена по радиусу. Потенциал цилиндра 1, расположенного в первом квадранте, (см. рис. 4) равен

$$V_0 = 2q \int_{r_0}^a \frac{dr}{r} + 4q \int_a^{2a} \frac{dr}{r} - 2q \int_{\sqrt{2}a}^{2\sqrt{2}a} \frac{dr}{r} = 2q \left( \ln \frac{a}{r_0} + \ln 2 \right) = 2q \ln \frac{2a}{r_0}. \quad (3)$$

При расчёте мы пренебрегли смещением зарядов внутри цилиндров вследствие поляризации. Это оправдано тем, что расстояние между осями цилиндров ( $2a$  и  $2\sqrt{2}a$ ,  $a = 8$  см) значительно больше радиуса цилиндра  $r_0 = 3$  см.

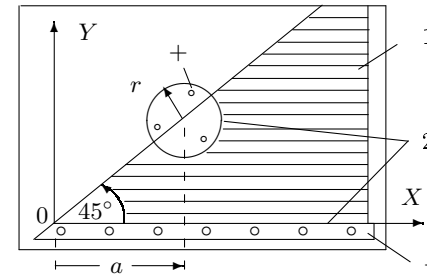


Рис. 5. Модель для изучения квадрупольного поля  
1 — электропроводная бумага, 2 — электроды

1. Соберите модель квадрупольного электростатического поля согласно рис. 5.
2. Получите точки эквипотенциальных линий для напряжений на зонде  $V = 0,2; 0,3; 0,4; 0,6; 0,8$  от напряжения  $V_0$  на электродах.
3. Вычислите поток  $\Phi$  по формуле (1), используя две соседних эквипотенциали (по аналогии с прямоугольным кабелем). Рассчитайте экспериментальную ёмкость единицы длины цилиндра относительно плоскостей по формуле (2) и сравните эту ёмкость со теоретическим значением, которое следует из формулы (3):  $C = q/V_0$ .
4. Проверьте, что для точки  $T$  ( $x = 2a$ ,  $y = 2a$ ) потенциал  $V_T = 0,449V_0$  (см. приложение).

Измерьте потенциал в точке  $T$  (рис. 4) и сравните с вычисленным ранее значением.

5. Сравните экспериментальную величину  $C$  с ёмкостью цилиндрического конденсатора с радиусами цилиндров  $r_0$  и  $a$ .
6. Убедитесь, что поле вблизи начала координат носит квадрупольный характер ( $E$  линейно зависит от расстояния до плоскости). Для этого постройте графики распределения а) потенциала  $\varphi(r)$ , используя (Д6), и б) напряжённости  $E(r)$ , используя (Д7), вдоль биссектриссы, где  $r^2 = x^2 + y^2$ ,  $x = y$ .

### III. Исследование краевого поля плоского конденсатора

Расположение электродов, показанное на рис. 6, моделирует электрическое поле плоского конденсатора (его верхнюю половину).

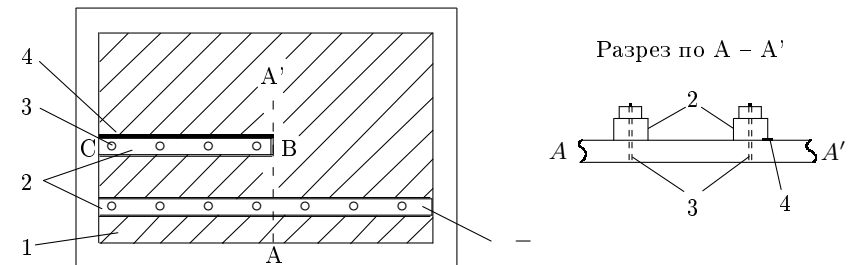


Рис. 6. Модель краевого поля плоского конденсатора: 1 — электропроводная бумага, 2 — электроды, 3 — шпильки, 4 — изолирующая прокладка

Теоретические формулы (Д.10, Д.11) (см. дополнение) получены в предположении, что толщина пластины  $BC$  пренебрежимо мала. Поэтому под одно из рёбер этого электрода подложена тонкая изолирующая прокладка. Это ограничивает область поля, доступную измерению. Формулы справедливы для полубесконечной пластины  $BC$ . Подумайте, сильно ли нарушается это условие в данной установке.

1. Соберите модель краевого поля плоского конденсатора согласно рис. 6.
2. Получите точки эквипотенциальных линий.
3. Сравните форму эквипотенциалей с теоретической. Для облегчения сравнения имеется транспарант с графиками эквипотенциалей в масштабе 1:1. Чем можно объяснить замеченное отклонение?
4. Подсчитайте поток напряжённости поля по формуле (1), и оцените увеличение ёмкости конденсатора, связанное с краевым полем (т.е. разность между измеренной ёмкостью и ёмкостью, которая получилась бы, если считать поле однородным до края пластины, а вне неё считать поле отсутствующим). От какого параметра зависит  $\Delta C$ ?

*Дополнение*

### ДВУМЕРНЫЕ ПОЛЯ

Для вычисления плоских полей существуют математические методы, основанные на теории функций комплексного переменного. Студенты будут изучать эти методы на III курсе. В лекциях Фейнмана [3] приводится элементарное введение в теорию функций комплексного переменного.

Комплексная переменная  $z$  определяется следующим образом:

$$z = x + iy.$$

Таким образом, каждой точке на плоскости  $(x,y)$  соответствует комплексное число. Функцию  $W(z)$  можно записать в виде суммы чисто действительной и чисто мнимой частей:

$$W(z) = U(x,y) + iV(x,y).$$

Если функция  $W(z)$  регулярная и  $W'(z) = \frac{dW}{dz}|_0 \neq 0$ , то

$$W_0 + \Delta_1 W = W_0 + W'(z_0) \cdot \Delta_1 z,$$

$$W_0 + \Delta_2 W = W_0 + W'(z_0) \cdot \Delta_2 z,$$

где

$$W'(z_0) = |W'(z_0)| \cdot e^{i\varphi}, \quad \varphi = \arg W'(z_0), \quad \Delta z = \Delta(x + iy).$$

При этом  $\Delta_1 z$  и  $\Delta_2 z$  поворачиваются на угол  $\varphi$  и растягиваются в  $W'(z_0)$  раз, область  $X,Y$  преобразуется в область  $W(U,V)$  конформно, т.е. углы между кривыми, проходящими через некоторую точку, сохраняются (см. рис. Д1 и Д2).

Если  $U + iV = W(x + iy) = W(z)$ , то поскольку  $dz/dx = 1$ ,  $dz/dy = i$ ,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = W'(z) \frac{\partial z}{\partial x} = W'(z), \quad (\text{Д.1})$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + i \frac{\partial V}{\partial y} = W'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = iW'(z). \quad (\text{Д.2})$$

Умножив (1) на  $i$  и приравняв левые части, получаем

$$i \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} + i \frac{\partial V}{\partial y}, \quad (\text{Д.3})$$

т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad (\text{Д.4})$$

(Д.4) обычно называют уравнениями Коши-Римана.

Дифференцируя (Д.3) по  $x$ , а (Д.4) по  $y$  и складывая, получаем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \Delta U = 0.$$

Аналогично

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \Delta V = 0.$$

Таким образом, каждая из функций  $U$  и  $V$  удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа<sup>1</sup> и даёт нам решение некоторой электростатической задачи. Кривые  $U(x,y) = A = \text{const}$  и кривые  $V(x,y) = B$  на плоскости  $(X,Y)$  образуют семейства взаимно ортогональных кривых. Ортогональность является прямым следствием соотношений (Д.4).

Если рассматривать семейство линий  $V(x,y) = \text{const}$  как потенциальные линии, то семейство линий  $U(x,y) = \text{const}$  будет соответствовать силовым линиям. Справедливо и обратное утверждение: если  $U(x,y)$  описывает потенциал, то  $V(x,y)$  — силовые линии этого поля.

<sup>1</sup> Напомним, что  $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$  и в отсутствие зарядов  $\text{div } \mathbf{E} = 0$ . Следовательно,  $\text{div grad } \varphi = 0$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

т.е. потенциал  $\varphi$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

Трудность состоит в том, чтобы найти функцию комплексного переменного, для которой эквипотенциальные линии совпали бы с границами электродов в решаемой электростатической задаче. Для этого используют конформные отображения.

Если на плоскости  $z = x + iy$  задана некоторая область  $D$  внутри границы  $C$ , то функция  $W(z)$  каждой точке из  $D$  ставит в соответствие некоторую точку внутри области  $D'$  на плоскости  $W = U + iV$ , причём граница  $C$  переходит в границу  $C'$  в области  $D'$ . Такое преобразование является конформным: малая окружность переходит в окружность, углы между пересекающимися кривыми сохраняются.

Если мы можем получить решение электростатической задачи на плоскости  $W$  с границами  $C'$ , то, применяя обратное конформное преобразование, мы автоматически получаем решение в плоскости  $Z$  с границами  $C$ .

Часто случается, что выразить в явном виде функцию обратную  $W$  невозможно, тогда уравнения эквипотенциальных линий в плоскости  $(X, Y)$  получаются в параметрическом виде.

Функция  $W = z^2$  отображает первый квадрант плоскости  $(X, Y)$  на верхнюю полуплоскость  $(U, V)$ . Действительно, представим  $z$  в полярной системе координат

$$z = \rho e^{i\theta},$$

где модуль  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , а  $\operatorname{tg} \theta = y/x$ . При возведении в квадрат имеем  $z^2 = \rho^2 e^{2i\theta}$ , т.е. аргумент  $\theta$  удваивается и происходит растяжение по радиусу. При этом ось  $(0, Y)$  перейдёт в отрицательную часть оси  $U$  ( $\pi/2 \rightarrow \pi$ ) (рис. Д.1).

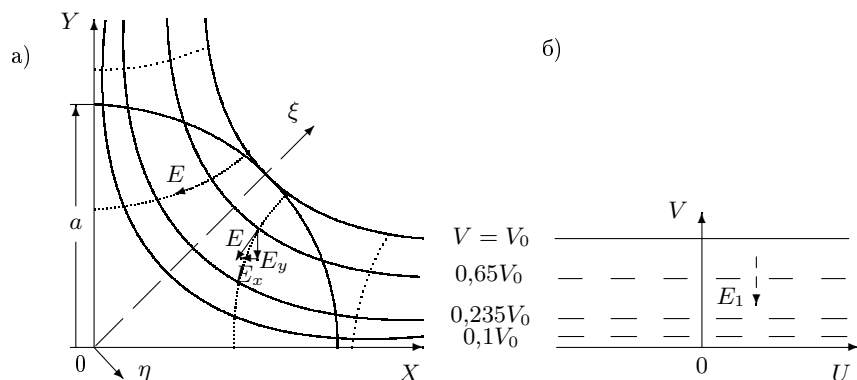


Рис. Д.1. Функция  $W = z^2$

Пусть в плоскости  $(U, V)$  имеется однородное электрическое поле  $E_1$  ( $|E_1| = 1$ ), направленное вдоль оси  $V$  (т.е. ось  $U$  на рис Д1б) параллельна

бесконечной заряженной плоскости). Тогда потенциал  $\varphi$  этого поля линейно изменяется с координатой  $V$ :  $\varphi = -|E_1|V = -V$ . Комплексный потенциал

$$W = U + iV = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

описывает как потенциал, так и силовые линии этого поля. В плоскости  $(X, Y)$  эквипотенциали  $V = \text{const}$  образуют равнобочные гиперболы

$$xy = \frac{V}{2}. \quad (\text{Д.5})$$

Кривые  $U = a^2 = \text{const}$  описывают силовые линии поля. Это семейство равнобочных гипербол  $x^2 - y^2 = a^2$ , ортогональных гиперболом (Д.5).

Описываемое поле образуется в пространстве между четырьмя бесконечными заряженными гиперболическими цилиндрами (рис. 3). Такое поле называется квадрупольным.

На поверхности электрода  $V = V_0$ ,  $xy = \frac{a^2}{2}$  ( $a$  — радиус вписанного круга), и вместо (Д.5) можно записать

$$xy = \frac{a^2}{2} \frac{V}{V_0}. \quad (\text{Д.6})$$

Напряжённость поля  $E$  линейно изменяется с расстоянием от начала координат:

$$E_x = -\frac{2V_0}{a^2} y, \quad E_y = -\frac{2V_0}{a^2} x, \quad E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{2V_0}{a^2} r. \quad (\text{Д.7})$$

Если повернуть систему координат на  $45^\circ$  (рис. Д.1), то уравнения эквипотенциалей (Д.6) перейдут в уравнения

$$\xi^2 - \eta^2 = B = \text{const}. \quad (\text{Д.8})$$

совпадающие с уравнениями силовых линий в системе  $(X, Y)$ . Составляющие напряжённости поля будут  $E_\xi = -2B_x$ ,  $E_\eta = 2B_y$ .

Линейная зависимость поля от расстояния до плоскости используется для фокусировки заряженных частиц квадрупольными линзами, электродами которых служат гиперболические цилиндры (рис. 3). Правда, эти электроды приходится «обрезать», что искажает поле. Искажения возникают и при замене гиперболических поверхностей на другие. Однако можно показать, что система любых четырёх симметричных электродов создаёт вблизи оси симметрии поле, близкое к квадрупольному.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА

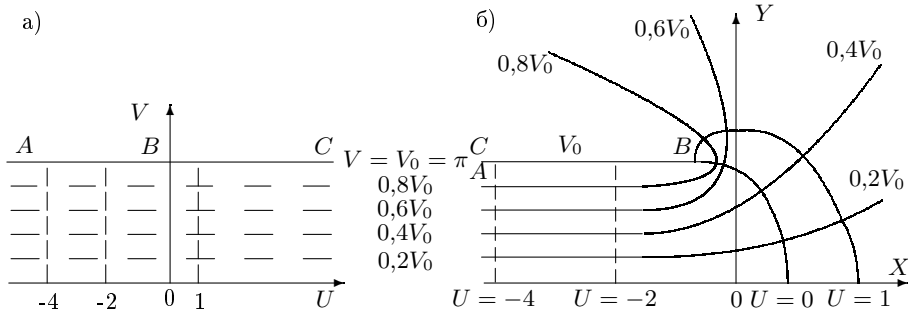


Рис. Д.2. Функция  $z = W + e^W$

Функция

$$z = W + e^W \tag{Д.9}$$

отображает полосу на верхней полуплоскости  $0 \leq V \leq \pi$  (рис. Д.2а) на область на плоскости  $z = 0$ , показанную на рис. Д.2б (на обоих рисунках изображены только верхние половины). Соответственные точки обозначены одинаковыми буквами.

Действительно, используя формулу Эйлера  $e^{iV} = \cos V + i \sin V$ , можно записать:

$$x = U + e^U \cos V, \tag{Д.10}$$

$$y = V + e^U \sin V. \tag{Д.11}$$

Граница  $V = V_0 = \pi$  переходит в линию  $y = \pi$ , на которой координата  $x$  изменяется от  $-\infty$  ( $U = \pm\infty$ ) до максимального значения  $x = -1$  ( $U = 0$ ). Если в плоскости задано однородное поле (вдоль линии потенциал постоянен), то, меняя  $U$  при постоянном  $V$  по формулам (Д.10) и (Д.11) получаем уравнение эквипотенциала в параметрической форме. Эти линии ( $V = \text{const}$ ) показаны на рис. Д.2б, линии  $U = \text{const}$ , ортогональные первым, дают направления силовых линий.

Конфигурация поля соответствует краевому полю полубесконечного плоского конденсатора (ось  $y = 0$  — медианная плоскость). Видно, что у края пластины напряжённость поля бесконечно велика. Это получается из-за предположения, что толщина электродов пренебрежимо мала.

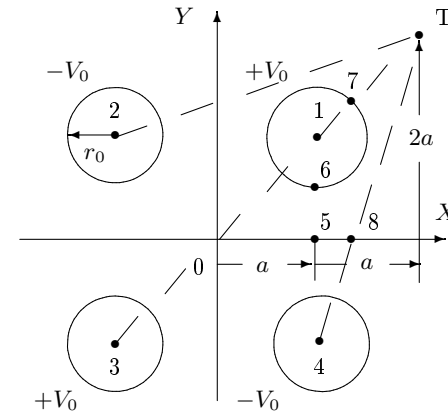


Рис. П.1. К расчёту потенциала

Потенциал точки Т на рис. П.1 определяется полями  $E = 2q/r$  цилиндров 1–4. Принимая обозначения:  $2q(1) \int_7^T \frac{dr}{r}$  как «потенциал, созданный цилиндром 1 на пути от точки 7 до точки Т», (причём  $r$  здесь отсчитывается от оси цилиндра 1) и учитывая, что потенциалы осей X и Y равны нулю, получим

$$\begin{aligned} V_T &= 2q(1) \left( \int_6^5 \frac{dr}{r} - \int_7^T \frac{dr}{r} \right) + 2 \cdot 2q(2,4) \int_8^T \frac{dr}{r} - 2q(3) \int_0^T \frac{dr}{r} = \\ &= 2q \left( \int_{r_0}^a \frac{dr}{r} - \int_{r_0}^{a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} \right) + 2 \cdot 2q \int_{a\sqrt{10}/3}^{a\sqrt{10}} \frac{dr}{r} - 2q \int_{a\sqrt{2}}^{3a\sqrt{2}} \frac{dr}{r} = \\ &= -2q \ln \sqrt{2} + 2q \ln 3 = 2q \ln \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Поскольку, согласно формуле (3), потенциалы цилиндров  $V_0 = 2q \ln(16/3)$ ,

$$\frac{V_T}{V_0} = \frac{\ln(3/\sqrt{2})}{\ln(16/3)} = 0,449.$$

### Контрольные вопросы

1. Каким должно быть соотношение между проводимостью электродов и проводимостью электролита или электропроводной бумаги?
2. Докажите, что электрическое поле от системы эквипотенциальных электродов в слабо проводящей среде совпадает с полем от такой же системы в вакууме.
3. Докажите ортогональность линий  $U = \text{const}$ ,  $V = \text{const}$  в теории функций комплексного переменного.
4. Искажает ли картину эквипотенциалей наличие конечного сопротивления в месте контакта зонда и бумага?

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество. — М.: Наука, 1983. Гл. II, §§ 46, 47.
2. *Фейнман, Лейтон, Сэндс* Фейнмановские лекции по физике. Ч. 5. Электричество и магнетизм. — М.: Мир, 1967. Гл. 7.

2-ХП-2012