ЯВЛЕНИЕ ГИББСА

Булыгин В.С.

23 октября 2012 г.

1. В конце 1898 — начале 1899 годов великий американский физик Джозайа Уиллард Гиббс (1839–1903), один из основоположников статистической механики, профессор математической физики на факультете философии и изящных искусств Йельского университета (США), являющийся тонким знатоком и ценителем математики[1] опубликовал в английском общенаучном журнале «Природа» (издаётся с 1869 г.) две небольших заметки [1] и [2], в которых показал, что ряд Фурье не всегда представляет разлагаемую функцию с должной точностью. Редакция английского журнала, как и сам Гиббс, не знали, что этот результат — ряд Фурье разрывной функции не сходится к разлагаемой функции в окрестности разрыва — уже был опубликован в Англии английским учёным Г. Уилбрагамом за 50 лет до этого [3], и за этим явлением установилось название: «Явление Гиббса».

Рассмотрим явление Гиббса на частном случае разрывной функции [4, с. 91–93]

$$f(t) = \mathrm{sign(t)} = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < t < 0\,, \\ 0 & \text{при } t = 0\,, \\ +1 & \text{при } 0 < t < \pi\,, \end{cases} \tag{1}$$

продолженной с периодом 2π на всю ось t (см. рис. 1)

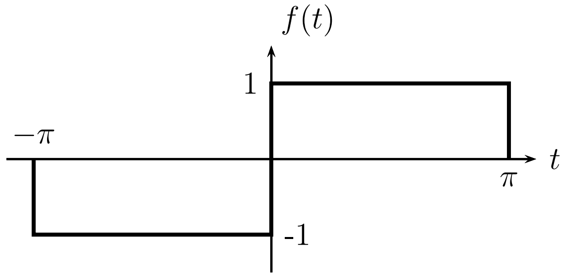

Рис. 1. Периодическая функция (1), разлагаемая в ряд Фурье (2).

Функция (1) является нечётной, поэтому её разложение в ряд Фурье будет содержать только синусы:

$$f(t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin mt\,, \tag{2}$$

где коэффициенты разложения b_m определяются, с учётом (1), выражениями [5, с. 418, формула (12)]

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin mt\,dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\sin mt\,dt = \frac{2}{\pi}\,\frac{1-\cos\pi m}{m} = \frac{2}{\pi m}\left[1-(-1)^m\right]\,,$$

[1] «Математика — это язык» — сказал Гиббс на Учёном совете при обсуждении предложения об увеличении учебных часов, предназначенных для изучения иностранных языков, за счёт уменьшения учебных часов, отведённых преподаванию математики (в 1871/72 учебном году у Гиббса занимались только 2 студента, правда, ставшие впоследствии профессорами Йельского университета и членами Национальной академии наук).

т. е. в разложении (2) отличны от нуля только члены с нечётными номерами $m = 2n - 1$ и, следовательно, разложение в ряд Фурье приводится к виду

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} S_N(t)\,,$$

где $S_N(t)$ — сумма первых N ненулевых членов ряда Фурье:

$$S_N(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}\,. \tag{3}$$

Характер приближения функции (1) частичными суммами (3) её ряда Фурье изображён на рис. 2.

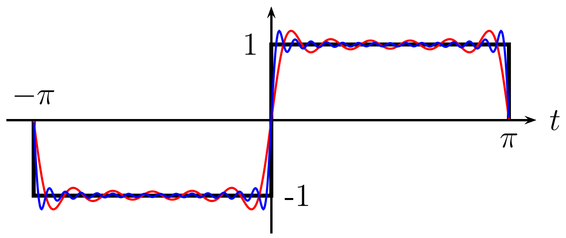

Рис. 2. Разлагаемая функция (1) и частичные суммы S_6 и S_{15} её ряда Фурье (3).

Как видно из рис. 2 частичные суммы S_N осциллируют вблизи значений ± 1 разлагаемой функции. Исследуем, как ведут себя экстремумы $S_N(t)$ (в которых S_N наиболее отклоняется от разлагаемой функции) при $N \to \infty$.

Производная частичной суммы $S_N(t)$, с учётом формулы Эйлера $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ (i — мнимая единица) и формулы для суммы геометрической прогрессии (с начальным членом e^{it} и знаменателем e^{i2t}) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\frac{dS_N}{dt} &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos(2n-1)t = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N}e^{i(2n-1)t}\right) = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(e^{it}\,\frac{e^{i2Nt}-1}{e^{i2t}-1}\right) = \\ &= \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(e^{iNt}\,\frac{e^{iNt}-e^{-iNt}}{e^{it}-e^{it}}\right) = \frac{4}{\pi}\,\mathrm{Re}\left(e^{iNt}\,\frac{\sin Nt}{\sin t}\right) = \frac{4}{\pi}\,\frac{\cos Nt\,\sin Nt}{\sin t} = \\ &= \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin 2Nt}{\sin t}\,,\end{aligned} \tag{4}$$

следовательно, точки экстремумов S_N удовлетворяют уравнению $\sin 2Nt = 0$ (кроме $t = 0$) и при $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ (картины при $\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi$, как и при $-\pi \leqslant t \leqslant 0$, полностью симметричны и могут отдельно не рассматриваться) равны:

$$t_n = \frac{\pi}{2N}\,n, \qquad n = 1, \ldots N. \tag{5}$$

Интегрируя (4), получим выражение для $S_N(t)$ (3) в интегральной форме, что для её экстремумов, с учётом (5), даёт:

$$\begin{aligned}S_N(t_n) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{t_n}\frac{\sin 2Nt}{\sin t}\,dt = [\tau = 2Nt] = \frac{1}{\pi N}\int_0^{\pi n}\frac{\sin\tau}{\sin\frac{\tau}{2N}}\,d\tau = \\ &= \int_0^{\pi n}\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin\tau}{\tau} + \frac{\tau\sin\tau}{12\pi N^2} + O(N^{-4})\right)d\tau = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi n) - \frac{(-1)^n}{12}\,\frac{n}{N^2} + O\left(\frac{n}{N^4}\right)\,,\end{aligned} \tag{6}$$

где $\mathrm{Si}(x)$ — интегральный синус [4, с. 356–357], рис. 3:

$$\mathrm{Si}(x) \equiv \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x} + O(x^{-2}) \qquad \text{при} \quad x \to \infty\,.$$

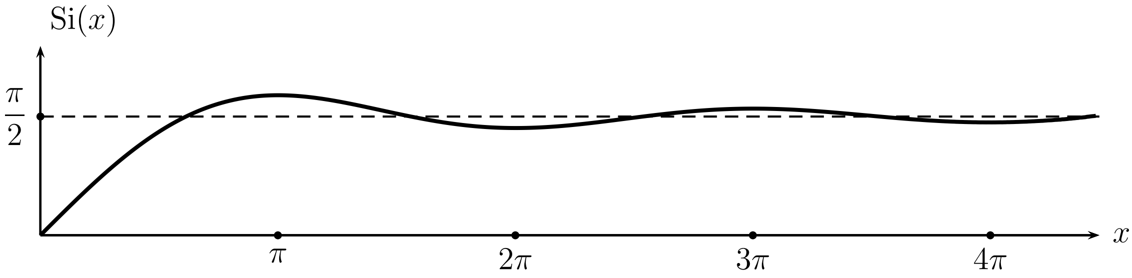

Рис. 3. Нечётная функция — интегральный синус $\mathrm{Si}(x)$ при $x \geqslant 0$.

Рассмотрим, как ведут себя экстремумы (6) при $N \to \infty$. Если номер экстремума — целое число $n = \alpha N$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то, согласно (5), этот экстремум находится внутри рассматриваемого нами интервала в точке $t_n = \frac{1}{2}\pi\alpha$, и величина этого экстремума, согласно (6) равная

$$\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi\alpha N) + O(N^{-1})\,,$$

имеет при $N \to \infty$ предел

$$\frac{2}{\pi}\lim_{N\to\infty}\mathrm{Si}(\pi\alpha N) = \frac{2}{\pi}\lim_{x\to\infty}\mathrm{Si}(x) = 1\,,$$

т. е. *вне разрыва нашей функции её ряд Фурье сходится к ней.*

Если же номер экстремума n не зависит от N, то, согласно (5), положение всех таких экстремумов при $N \to \infty$ сливается с точкой разрыва $(t = 0)$, а наибольший из этих экстремумов, согласно (6) и рис. 3, достигается при $n = 1$ и равен

$$\max\left\{\lim_{N\to\infty} S_N(t)\right\} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Si}(\pi) = 1{,}17898\ldots \tag{7}$$

Таким образом, сумма бесконечного ряда Фурье функции (1) рис. 1, проходя через точки разрыва, делает скачки, примерно на 17,9% большие, чем скачки разлагаемой функции и график этой суммы имеет вид, изображённый на рис. 4:

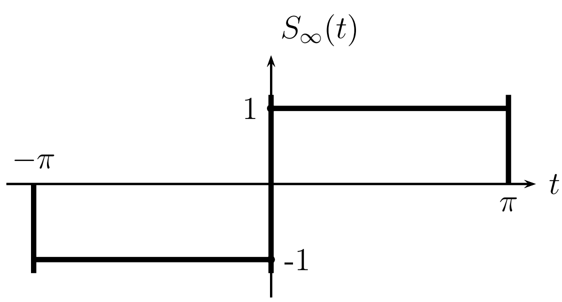

Рис. 4. Сумма ряда Фурье функции (1), рис. 1.

Явление Гиббса, установленное им в [1] и [2] на частном примере тригонометрического разложения, имеет место и в общем случае. Как подробно показывается в [5, с. 495–497] этот же результат (7) оказывается справедливым и при разложении в ряд Фурье разрывной функции общего вида:

В точках разрыва функции, разложенной в ряд Фурье, скачки значений суммы ряда Фурье превышают величину скачков значений самой функции на одинаковые доли, равные 17,9%.

2. Если заменить разрывную функцию (1) непрерывной кусочно-монотонной функцией, быстро меняющейся в окрестности разрывов функции (1), то по признаку Дирихле [5, с. 438] ряд Фурье такой функции будет в каждой точке сходиться к этой функции и, следовательно, явление Гиббса в этом случае исчезает несмотря на то, что такая функция может отличаться от исходной разрывной только на сколь угодно малых промежутках.

Рассмотрим, как ведёт себя разложение Фурье непрерывного аналога разрывной функции (1):

$$f(t) = \begin{cases} -\varphi\left(\frac{t+\pi}{\varepsilon}\right) & \text{при } -\pi \leqslant t \leqslant -\pi+\varepsilon\,, \\ -1 & \text{при } -\pi+\varepsilon \leqslant t \leqslant \varepsilon\,, \\ \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) & \text{при } -\varepsilon \leqslant t \leqslant \varepsilon\,, \\ +1 & \text{при } \varepsilon \leqslant t \leqslant \pi-\varepsilon\,, \\ \varphi\left(\frac{\pi-t}{\varepsilon}\right) & \text{при } \pi-\varepsilon \leqslant t \leqslant \pi\,, \end{cases} \tag{8}$$

где $\varphi(x)$ — монотонно растущая нечётная функция, $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, $\varphi(1) = 1$. Функция (8) изображена на рис. 5.

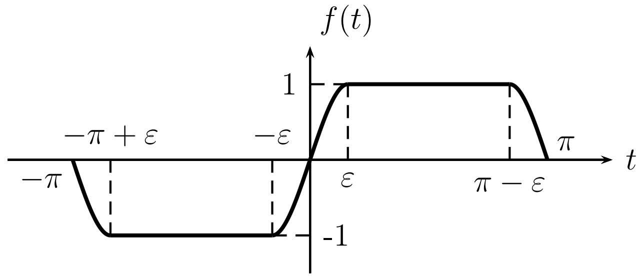

Рис. 5. Непрерывная аппроксимация разрывной функции (1), рис. 1.

Коэффициенты разложения Фурье (см. (2)) функции (8) определяются выражениями:

$$b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin mt\,dt = \frac{2}{\pi}\left[\int_0^\varepsilon \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin mt\,dt + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\sin mt\,dt + \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\varphi\left(\frac{\pi-t}{\varepsilon}\right)\sin mt\,dt\right]. \tag{9}$$

Поскольку

$$\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\sin mt\,dt = -\left.\frac{\cos mt}{m}\right|_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} = \frac{\cos m\varepsilon}{m}\left[1-(-1)^m\right]$$

а также

$$\int_0^\varepsilon \varphi\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\sin mt\,dt = [t=\varepsilon x] = \varepsilon\int_0^1 \varphi(x)\sin(m\varepsilon x)\,dx$$

и

$$\int\limits_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \varphi\left(\frac{\pi-t}{\varepsilon}\right)\sin mt\,dt = [t=\pi-\varepsilon x] = -\varepsilon\int\limits_{1}^{0}\varphi(x)\sin(\pi m - m\varepsilon x)\,dx =$$

$$= -\varepsilon\int\limits_{0}^{1}\varphi(x)\sin(m\varepsilon x - \pi m)\,dx = -(-1)^m\varepsilon\int\limits_{0}^{1}\varphi(x)\sin(m\varepsilon x)\,dx$$

то коэффициенты разложения (9)

$$b_m = \frac{2}{\pi}\left[1-(-1)^m\right]\left(\frac{\cos m\varepsilon}{m} + \varepsilon\int\limits_{0}^{1}\varphi(x)\sin(m\varepsilon x)\,dx\right)$$

снова отличны от нуля при $m = 2n-1$ и частичная сумма N первых членов фурье-разложения функции (8) равна

$$S_N(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\Phi(m\varepsilon)\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}\,, \tag{10}$$

где

$$\Phi(m\varepsilon) = \cos m\varepsilon + m\varepsilon\int\limits_{0}^{1}\varphi(x)\sin(m\varepsilon x)\,dx \qquad (m=2n-1) \tag{11}$$

Если $m\varepsilon$ мало, то $\cos m\varepsilon = 1 - \frac{1}{2}(m\varepsilon)^2 + O\left(m^4\varepsilon^4\right)$, $\sin(m\varepsilon x) = m\varepsilon x + O\left(m^3\varepsilon^3\right)$ и

$$\Phi(m\varepsilon) = 1 - \gamma(m\varepsilon)^2 + O\left(m^4\varepsilon^4\right) \qquad (m=2n-1) \tag{12}$$

где обозначено

$$\gamma = \frac{1}{2} - \int\limits_{0}^{1}\varphi(x)\,x\,dx\,, \qquad 0<\gamma<\frac{1}{2}\,,$$

поскольку для монотонно растущей от 0 до 1 функции $\varphi(x)$

$$\int\limits_{0}^{1}\varphi(x)x\,dx < \int\limits_{0}^{1}\max\{\varphi(x)\}\,x\,dx = \int\limits_{0}^{1}x\,dx = \frac{1}{2}\,.$$

Таким образом, с ростом N, до тех пор, пока величина $\gamma(m\varepsilon)^2 = \gamma\left[(2N-1)\varepsilon\right]^2$ будет оставаться малой, можно считать $\Phi(m\varepsilon)\simeq 1$, частичные суммы $S_N(t)$ ряда Фурье (10) будут совпадать с частичными суммами (3) ряда Фурье разрывной функции (1) и, следовательно, и для непрерывной функции (8) в этом случае будет наблюдаться явление, аналогичное явлению Гиббса:

> **вблизи границы зоны быстрого изменения непрерывной функции значения частичных сумм её ряда Фурье $S_N(t)$ с ростом N будут сначала иметь выбросы** (превышающие величину изменения значений самой функции примерно на 18%)**, которые с дальнейшим увеличением N будут стремиться к нулю и ряд Фурье** в силу признака Дирихле **станет сходиться к разлагаемой непрерывной функции.**

Оценим номер гармоники $N_г = 2N - 1$, являющийся условной границей наблюдения эффекта Гиббса. Из выражения (12) следует оценка: $\gamma(N_г\varepsilon)^2 \sim 1$, или

$$N_г\varepsilon \sim \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sim \sqrt{2}\,. \tag{13}$$

Вводя обозначение для относительного размера области резкого изменения функции

$$\delta\tau = \frac{\tau}{T}\,,$$

где τ — длительность перехода и T — период функции имеем для рассматриваемой функции (8): $\delta\tau = \frac{2\varepsilon}{2\pi}$, откуда

$$\varepsilon = \pi \cdot \delta\tau$$

и оценка (13) принимает вид:

$$N_г \cdot \delta\tau \sim \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}45 \sim \frac{1}{2}\,.$$

Эту оценку можно также получить из следующих соображений: чтобы начать описывать переход шириной τ нужна гармоническая составляющая ряда Фурье с периодом $T_г \equiv \frac{T}{N_г} = 2\tau$ (см. рис. 6), откуда получаем:

$$\frac{\tau}{T_г} = N_г\frac{\tau}{T} = N_г \cdot \delta\tau = \frac{1}{2}\,.$$

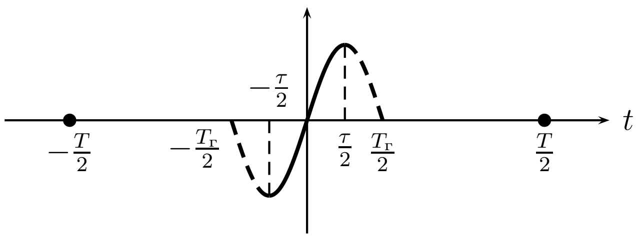

Рис. 6. Соотношение между областью τ резкого изменения функции и необходимым периодом гармоники $T_г$.

Список литературы

[1] *J. Willard Gibbs.* Fourier's Seriés. // Nature. — 1898. — Vol. 59, Num. 1522. — P. 200.

[2] *J. Willard Gibbs.* Fourier's Seriés. // Nature. — 1899. — Vol. 59, Num. 1539. — P. 606.

[3] *Willbraham H.* // Cambrige and Dublin Math. Journ. — 1848. — Vol. 3. — P. 198—201.

[4] *Андре Анго.* Математика для электро- и радиоинженеров (с предисловием Луи де Бройля). — М.: Наука, 1964.

[5] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III. — М.: Наука, 1966.