УДК 53

Гладун, А.Д.

Г52 **Элементы релятивистской механики**: учебно-методическое пособие по курсу Общая физика. — 2-е изд. — М.: МФТИ, 2012. — 37 с.

Книга посвящена актуальным методологическим и методическим вопросам теории относительности в современном курсе общей физики.

Адресована преподавателям, аспирантам и студентам физических специальностей.

УДК 53

Введение

При изучении физики мы часто пользуемся понятиями пространства и времени. Что это такое? В наших рассуждениях, как правило, пространство и время являются первичными, логически неопределяемыми понятиями. Исходя из общефилософской точки зрения, восходящей ещё ко временам натурфилософии, можно сказать, что это формы существования материи. Однако такие утверждения не более чем описания этих понятий с помощью естественного метафорического языка.

Абстрактные математические представления о реально существующих вне нас пространстве и времени возникают при накоплении знаний о пространственно-временных отношениях материальных объектов окружающей действительности.

Механика Ньютона–Галилея (нерелятивистская механика) характеризует собой также определённый этап в развитии представлений о пространстве и времени. В основании этой механики лежат представления трёхмерной евклидовой геометрии, которые задаются правилами сложения векторов и определением величины расстояния между двумя точками. Экспериментальная проверка результатов теоретических предсказаний показывает, что с большой точностью трёхмерное пространство действительно является евклидовым, а время — абсолютным.

Свойства пространства и времени можно установить, анализируя преобразования, оставляющие неизменной форму уравнений движения.

В работе рассматриваются основные принципы механики Эйнштейна-Пуанкаре (релятивистской механики). В основу изложения положено уравнение движения релятивистской частицы (материальной точки). Даётся анализ преобразований Лоренца, оставляющих неизменной форму уравнений движения. Анализ показывает, что пространство и время необходимо объединить в одну так называемую четырёхмерную псевдоевклидову геометрию.

Здесь рассматриваются также некоторые приложения релятивистской динамики, в частности, обсуждается идея ускорителей со встречными пучками.

Уравнение движения релятивистской частицы

На основании многочисленных теоретических и экспериментальных исследований можно утверждать, что в классической (неквантовой) нерелятивистской механике, когда скорость частицы значительно меньше скорости света ($v \ll c$, где $c \cong 3{\cdot}10^8$ м/с), состояние частицы в данный момент времени определяется заданием шести чисел — трёх координат x, y, z и трёх компонент импульса p_x, p_y, p_z, т. е. заданием радиуса-вектора частицы $\boldsymbol{r}$ и её импульса $\boldsymbol{p}$.

Это утверждение является, по существу, фундаментальным законом физики, который справедлив во всех случаях, когда $pr \gg h$, где p — средний импульс частицы, величина r характеризует линейный размер области движения, h — постоянная Планка ($h/2\pi = \hbar = 1{,}054\cdot10^{-34}$ кг$\cdot$м^2/с).

Из этого закона следует, что все величины, характеризующие свойства любой системы классических частиц, являются функциями положений и скоростей всех частиц.

Можно видеть, однако, что в релятивистской области, когда скорость частицы сравнима со скоростью света, такое определение механического состояния применимо без дополнительных ограничений лишь для свободных классических частиц. При наличии взаимодействия возникают довольно жёсткие ограничения, из-за которых область применимости классической релятивистской механики исчерпывается движением заряженных частиц в не очень сильном электромагнитном поле. Почему? Дело в том, что в настоящее время известен единственный способ разгонять частицы до релятивистских скоростей — воздействовать на них электромагнитным полем. Частица при этом начинает генерировать электромагнитное излучение, которое в свою очередь влияет на движение частицы. Такое влияние называют реакцией излучения. Интенсивность излучения зависит от ускорения частицы, которое определяется силой внешнего поля. Это означает, что только при достаточно слабом внешнем поле можно пренебречь излучением частицы и его реакцией.

Опыт, накопленный при изучении ускорителей заряженных частиц, учит, что импульс релятивистской частицы

$$\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{1}$$

где m — масса частицы, $\boldsymbol{v}$ — её скорость. Очевидно, что при $v \ll c$ формула (1) даёт

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}.$$

Понятие импульса можно считать первичным, логически неопределяемым. Его свойства специфицируются на основе закона сохранения импульса, который мы считаем фундаментальным законом природы.

В силу (1) уравнение движения релятивистской частицы, определяющее эволюцию состояния движения, имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \boldsymbol{F}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{F}$ — сила, действующая на частицу. Если $\boldsymbol{p}$ — первичное понятие, то уравнение (2) следует считать определением силы. Существенно при этом, что $\boldsymbol{F}$ есть функция состояния частицы и времени, т. е.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t).$$

Уравнение (2) было впервые открыто в 1905 году французским математиком, физиком и механиком Анри Пуанкаре.

Характерную особенность уравнения (2) проиллюстрируем на примере. Пусть частица движется под действием постоянной силы, начальная скорость её равна нулю:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = F, \qquad v(0) = 0. \tag{3}$$

Интегрируя (3), находим

$$\frac{m^2v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = (Ft)^2,$$

т. е.

$$v = \frac{\frac{Ft}{m}}{\sqrt{1+\left(\frac{Ft}{mc}\right)^2}}. \tag{4}$$

Заметим, что в нерелятивистском пределе вместо (4) имеем

$$v_{\text{нерел}} = \frac{Ft}{m}.$$

Это означает, что

$$v = \frac{v_{\text{нерел}}}{\sqrt{1+\left(\frac{v_{\text{нерел}}}{c}\right)^2}}. \tag{5}$$

Если сила F достаточно велика и действует достаточно долго, так что можно считать, что

$$v_{\text{нерел}} \to \infty,$$

то из (5) следует, что

$$v \to c.$$

Таким образом, никакими ухищрениями невозможно ускорить частицу до скоростей, превышающих скорость света.

Кинетическая энергия релятивистской частицы

Изучая нерелятивистскую механику, мы видели, что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = \frac{dA}{dt},$$

где $dA = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ — элементарная работа.

Это означает, что кинетическая энергия частицы $E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}$ может быть определена как работа силы по ускорению частицы от нулевой начальной скорости до скорости, равной v. Воспользуемся данным определением для нахождения кинетической энергии релятивистской частицы.

Умножая уравнение (2) скалярно на вектор $\boldsymbol{v}$, имеем

$$m\boldsymbol{v}\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{dA}{dt}. \tag{6}$$

Для сокращения письма введём обозначения:

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \boldsymbol{v} = v \cdot \boldsymbol{\tau},$$

где $\boldsymbol{\tau}^2 = 1$.

Таким образом,

$$mc^2\beta\boldsymbol{\tau}\frac{d}{dt}\frac{\beta\boldsymbol{\tau}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{dA}{dt}. \tag{7}$$

Простые преобразования дают

$$\boldsymbol{\tau}\frac{d}{dt}\frac{\beta\boldsymbol{\tau}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \boldsymbol{\tau}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dt} + \boldsymbol{\tau}^2\frac{d}{dt}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \\ = \frac{d}{dt}\boldsymbol{\tau}^2 \cdot \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \boldsymbol{\tau}^2\frac{d}{dt}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{d}{dt}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Далее,

$$\frac{d}{dt}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dot{\beta}(1-\beta^2)^{-3/2},$$

т. е.

$$mc^2\beta\frac{d}{dt}\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2\beta\dot{\beta}(1-\beta^2)^{-3/2} = mc^2\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (7), находим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \frac{dA}{dt}.$$

Учитывая, что $\boldsymbol{v}(0) = 0$, получаем выражение для кинетической энергии:

$$E_{\text{к}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2. \tag{9}$$

Поскольку

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots,$$

выражение (9) при $v \ll c$ даёт

$$E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2},$$

что и следовало ожидать.

Закон сохранения энергии и импульса

Опыт, основанный на изучении взаимодействия релятивистских частиц, показывает, что энергия свободной частицы не обращается в нуль при $v = 0$, а остаётся конечной величиной, равной mc^2. Это означает, что энергией частицы следует считать величину

$$E = E_{\text{к}} + mc^2,$$

т. е.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{10}$$

Величина mc^2 называется при этом энергией покоя частицы.

Сравнивая (1) и (10), можно видеть, что импульс частицы

$$\boldsymbol{p} = \frac{E}{c^2} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{11}$$

При $v = c$ импульс и энергия частицы обращаются в бесконечность. Это означает, что частица с отличной от нуля массой не может двигаться со скоростью света. В релятивистской механике, однако, могут существовать частицы с массой, равной нулю, движущиеся со скоростью света (таковы в реальности световые кванты — фотоны, а также нейтрино). Для таких частиц из (11) имеем

$$p = \frac{E}{c}. \tag{12}$$

Всюду выше речь шла о частице, но её элементарность нигде не использовалась. В силу этого формулы (1), (10) и (11) применимы в равной степени и к любому сложному телу, состоящему из многих частиц. Под m следует при этом понимать полную массу тела, а под v — скорость его движения как целого.

Энергия покоящегося тела содержит в себе, помимо энергии покоя входящих в его состав частиц, также кинетическую энергию частиц и энергию их взаимодействия друг с другом. Другими словами,

$$mc^2 \neq \sum_i m_i c^2,$$

где m_i — массы частиц.

Таким образом, в релятивистской механике не имеет места закон сохранения массы — выполняется только закон сохранения энергии, в которую включается также и энергия покоя частиц.

Возводя в квадрат соотношения (1) и (10), можно убедиться в том, что

$$E^2 - (pc)^2 = m^2c^4, \tag{13}$$

т. е.

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}. \tag{14}$$

Соотношение (13) часто называется основным кинематическим тождеством. Причину этого мы обсудим ниже.

Отметим, что частицу, для которой $p \gg mc$, принято называть ультрарелятивистской. Для неё приближённо справедлива формула (12).

Рассмотрим для примера вопрос о рождении электронно-позитронных пар. Пусть происходит такой процесс: $\gamma \to e^- + e^+$, т. е. фотон (γ-квант), распадаясь, превращается в электрон и позитрон. Напишем уравнение для закона сохранения энергии в этом процессе:

$$E_\gamma = cp_\gamma = \sqrt{(mc^2)^2 + (p_-c)^2} + \sqrt{(mc^2)^2 + (p_+c)^2}. \tag{15}$$

Положим, что

$$p_- = 0, \qquad p_+ = 0.$$

Последнее определяет пороговую энергию рождения пары:

$$E_{\gamma\,\text{пор}} = 2mc^2.$$

Из (15) также следует, что

$$p_\gamma > p_- + p_+. \tag{16}$$

С другой стороны, закон сохранения импульса даёт

$$\boldsymbol{p}_\gamma = \boldsymbol{p}_- + \boldsymbol{p}_+. \tag{17}$$

Векторное равенство (17) представлено на рис. 1.

Поскольку сторона треугольника меньше или равна сумме двух других сторон, отсюда находим

$$p_\gamma \leqslant p_- + p_+. \qquad (18)$$

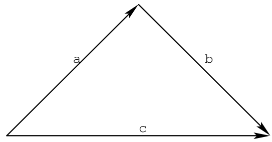

Рис. 1

Неравенство (18) противоречит (16). Это означает, что в рассматриваемом процессе нельзя одновременно удовлетворить законам сохранения энергии и импульса. Необходимо присутствие постороннего тела, которое взяло бы на себя часть импульса. Обычно рождение электронно-позитронных пар происходит вблизи атомных ядер.

Энергия отдачи

$$\frac{P^2_{\text{ядра}}}{2M_{\text{ядра}}}$$

при этом мала в силу большой массы ядра. Опыт показывает, что вблизи атомного ядра возможен также обратный процесс:

$$e^- + e^+ \to \gamma.$$

Более вероятной является аннигиляция электрона и позитрона с образованием двух фотонов:

$$e^- + e^+ \to 2\gamma.$$

Этот процесс происходит без постороннего вещества. Возможен также обратный ему процесс:

$$\gamma + \gamma \to e^- + e^+.$$

Последний, однако, никому пока не удалось наблюдать.

Преобразование Галилея

Преобразование Галилея описывает переход от одной системы координат к другой, движущейся равномерно и прямолинейно относительно первой:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t, \\ &t = t', \end{aligned} \qquad \boldsymbol{V} = \text{const}. \qquad (19)$$

Всегда можно направить оси координат так, что

$$\boldsymbol{V} = (V, 0, 0).$$

Преобразование (19) имеет при этом вид

$$\begin{aligned} x &= x' + Vt, \\ y &= y', \\ z &= z', \\ t &= t'. \end{aligned} \qquad (20)$$

Для обратного преобразования имеем

$$\begin{aligned} x' &= x - Vt, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= t. \end{aligned} \tag{21}$$

В силу (19)

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2}, \qquad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'.$$

Это означает, что уравнение движения нерелятивистской частицы форминвариантно относительно преобразования Галилея. С данным обстоятельством связан принцип относительности Галилея, утверждающий, что законы механических явлений одинаковы для неподвижного наблюдателя и для наблюдателя, совершающего равномерное поступательное движение, так что мы не имеем и не можем иметь никакого способа определить, находимся ли мы в подобном движении или нет (формулировка А. Пуанкаре).

Определим инварианты преобразования Галилея. Расстояние между двумя точками 1 и 2 в нештрихованной (неподвижной) системе отсчёта равно

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

В штрихованной (движущейся) системе отсчёта имеем

$$l' = \sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2}.$$

Используя (21), находим

$$l = l'. \tag{22}$$

Таким образом, расстояние между двумя точками в механике Ньютона является абсолютным понятием и не зависит от системы отсчёта. Очевидно, что время также является абсолютным понятием, поскольку здесь оно — некоторый параметр, не зависящий от системы отсчёта.

Можно видеть, что уравнение движения релятивистской частицы (2) не инвариантно относительно преобразований Галилея.

Математическое понятие группы

Ключевым понятием современной физики является понятие симметрии. Физики неустанно ищут, порой не осознавая этого, всё более скрытые и всё более фундаментальные типы симметрии. Понятие симметрии тесно связано с понятиями преобразования и инвариантности. Мяч, например, инвариантен относительно вращений. Инвариантность уравнения движения нерелятивистской частицы относительно преобразований

Галилея свидетельствует о наличии некоторой пространственно-временной симметрии в нерелятивистской механике.

Важным абстрактным алгебраическим понятием, удобным для описания различных симметрий, является понятие группы. Пусть, как говорят математики, имеется двойка «множество и операция»:

$$\langle \mathfrak{M}, * \rangle.$$

Будем полагать, что операция двойки бинарная — любым двум элементам, принадлежащим множеству $\mathfrak{M}$, операция ставит в соответствие третий элемент, принадлежащий этому же множеству:

$$a \in \mathfrak{M}, \qquad b \in \mathfrak{M}, \qquad a * b = c \in \mathfrak{M}.$$

Предположим, что бинарная операция на множестве $\mathfrak{M}$ удовлетворяет следующим требованиям

1. Операция ассоциативна: $(a * b) * c = a * (b * c)$.

2. Существует нейтральный элемент $e \in \mathfrak{M}$, такой, что для всех $a \in \mathfrak{M}$

$$a * e = e * a = a.$$

3. Для каждого элемента a существует обратный элемент b, такой, что

$$a * b = b * a = e, \qquad b = a^{-1}.$$

Тогда, по определению, двойка $\langle \mathfrak{M}, * \rangle$ является группой.

Рассмотрим некоторые примеры групп.

Пример 1. Множество целых чисел является группой относительно сложения. Нейтральным элементом является нуль. Обратный элемент для a есть $(-a)$.

Пример 2. Множество непрерывных, строго возрастающих функций $\varphi(x)$, определённых на отрезке $[0, 1]$, удовлетворяющих условию $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ (рис. 2).

Можно видеть, что задано при этом взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на себя.

Бинарную операцию определим как суперпозицию функций. Это означает, что функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ставится в соответствие третья функция

$$f(x) = (\varphi * \psi)(x) = \varphi(\psi(x)).$$

Нейтральным элементом является функция $\varphi(x) \equiv x$. Обратный элемент для $\varphi(x)$ есть обратная функция $\varphi^{-1}(x)$. Ассоциативность операции очевидна.

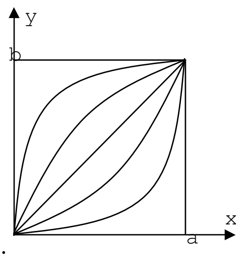

Рис. 2

Пусть для примера $\varphi(x) = x^2$, тогда $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}$. Можно видеть, что

$$(\varphi * \varphi^{-1})(x) = (\sqrt{x})^2 = x,$$

что соответствует определению обратного элемента.
Пример 3. Совокупность преобразований (19) образует группу Галилея. Элемент группы Галилея определяется заданием вектора скорости $\boldsymbol{V}$, который описывает переход от одной инерциальной системы отсчёта к другой. В качестве групповой операции над двумя такими переходами понимается «результирующий переход».

Пусть один из элементов группы Галилея есть переход от одной инерциальной системы отсчёта к другой, движущейся относительно неё с некоторой скоростью $\boldsymbol{V}_1$, и другой элемент — переход от одной инерциальной системы отсчёта к другой, движущейся относительно неё со скоростью $\boldsymbol{V}_2$. Опыт учит, что «результирующим» этих двух переходов является переход от одной инерциальной системы отсчёта к другой, движущейся относительно неё со скоростью, равной векторной сумме $\boldsymbol{V_1}$ и $\boldsymbol{V_2}$:

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_1 + \boldsymbol{V}_2.$$

Нейтральным элементом группы Галилея является, естественно, «тождественный» переход, т. е. «переход» от одной инерциальной системы отсчёта к другой, «движущейся» относительно неё с нулевой скоростью.

Преобразование Лоренца

Рассмотрим преобразование, которое впервые открыл голландский физик Г.А. Лоренц, изучая электромагнитные явления:

$$x = \frac{x' + Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad y = y', \qquad z = z', \qquad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{23}$$

Обратное преобразование имеет вид

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{24}$$

Заметим, что при $V \ll c$ соотношения (23) и (24) переходят в преобразования Галилея (20) и (21).

Каков физический смысл преобразования Лоренца? Как видно из формул (24), положению начала новых координат ($x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$) соответствует условие

$$x = Vt.$$

Это означает, что начало новых координат перемещается в системе отсчёта x, y, z со скоростью V вдоль оси x.

Другими словами, преобразование Лоренца связывает переменные $(x,\ y,\ z,\ t)$, относящиеся к одной из систем координат, с переменными $(x',\ y',\ z',\ t')$, относящимися к другой системе, движущейся равномерно и прямолинейно со скоростью V вдоль оси x по отношению к первой.

Следовательно, преобразование Лоренца — это обобщение преобразования Галилея на скорости V, сравнимые со скоростью света c. Можно видеть, что преобразования Лоренца также образуют группу.

Убедимся в том, что величина

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

инвариантна относительно преобразования Лоренца. Можно видеть, что

$$c^2t^2 = \frac{c^2{t'}^2 + \frac{V^2}{c^2}\cdot {x'}^2 + 2Vt'x'}{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

$$x^2 = \frac{{x'}^2 + V^2{t'}^2 + 2Vx't'}{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

$$y^2 = {y'}^2, \qquad z^2 = {z'}^2,$$

т. е.

$$\begin{aligned} c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = \\ = \frac{c^2{t'}^2 - {x'}^2 - {y'}^2 - {z'}^2 + \frac{V^2}{c^2}({x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2) - V^2{t'}^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \\ = c^2{t'}^2 - {x'}^2 - {y'}^2 - {z'}^2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться понятием события. Событие определяется временем, когда оно произошло, и местом, где оно произошло. Другими словами, событие, происходящее с некоторой материальной точкой, характеризуется четырьмя числами — моментом времени, когда происходит событие, и тремя координатами этой частицы.

Инвариант

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

принято называть квадратом интервала между двумя событиями — $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ и $(t,\ x,\ y,\ z)$. Часто бывает удобным пользоваться воображаемым четырёхмерным пространством, на осях которого откладываются время и три пространственные координаты. В этом пространстве событие изображается точкой.

Геометрическая интерпретация преобразования Лоренца

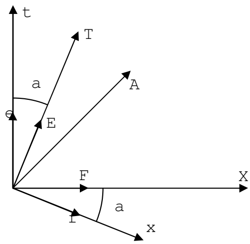

Рис. 3

Преобразования Лоренца допускают наглядную геометрическую интерпретацию на евклидовой плоскости. Рассмотрим две косоугольные системы координат (ct, x) и (ct', x'), обладающие следующим свойством: ось x' перпендикулярна оси ct, а ось x перпендикулярна оси ct' (рис. 3).

Оси x и x', а также оси ct и ct' образуют при этом одинаковые углы, обозначенные на рис. 3 греческой буквой α.

Для вектора $\boldsymbol{OA}$ можно написать:

$$\boldsymbol{OA} = ct\boldsymbol{e}_1 + x\boldsymbol{e}_2 = ct'\boldsymbol{e}'_1 + x'\boldsymbol{e}'_2. \tag{25}$$

Здесь $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}'_1$, $\boldsymbol{e}'_2$ — единичные векторы соответствующих координатных осей (рис. 3). Умножая (25) скалярно на $\boldsymbol{e}'_1$, находим

$$ct\cos\alpha = ct' + x'\sin\alpha. \tag{26}$$

Аналогично, умножая (25) скалярно на $\boldsymbol{e}'_2$, имеем

$$x\cos\alpha = ct'\sin\alpha + x'. \tag{27}$$

Полагая, что

$$\sin\alpha = \frac{V}{c}, \qquad \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}},$$

из (26) и (27) получаем

$$ct = \frac{ct' + \frac{V}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \qquad x = \frac{Vt' + x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{28}$$

Преобразования (28) совпадают с (23).

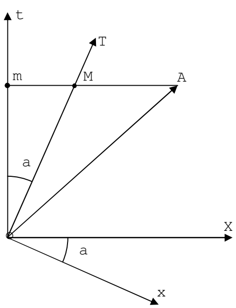

Рис. 4

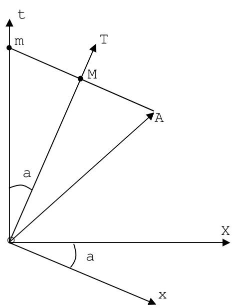

Рис. 5

Покажем, как можно использовать такую интерпретацию. Пусть произошли два события, одному из которых соответствует на рис. 4 точка O, а другому — точка A. Какой промежуток времени прошёл между этими событиями? Ответ на данный вопрос зависит от системы координат. Рассмотрим ситуацию в системе $(ct,\, x)$ (рис. 4).

Если ввести обозначения $OM = c\Delta t$, а $OM' = c\Delta t'$, то очевидно, что

$$\Delta t = \Delta t' \cos\alpha = \Delta t' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

В системе отсчёта $(ct',\, x')$ всё выглядит иначе (рис. 5). Здесь

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}.$$

Это означает, что движущиеся часы идут медленнее неподвижных.

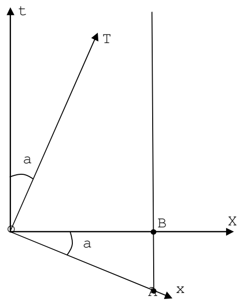

Рис. 6

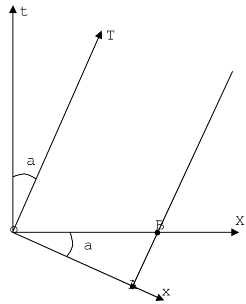

Рис. 7

Аналогично, пусть в системе отсчёта $(ct,\, x)$ покоится линейка, параллельная оси x. Её длина, измеренная в этой системе в момент времени $t = 0$, равна отрезку $OA = \Delta x$. В системе отсчёта $(ct',\, x')$ длина равна отрезку $OA' = \Delta x'$ (рис. 6). Очевидно, что $\Delta x' = \Delta x \cos\alpha$, т. е.

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Если линейка покоится в системе $(ct',\, x')$, то её длина, измеренная в этой системе в момент времени $t = 0$, равна отрезку $OA' = \Delta x'$ (рис. 7). В системе отсчёта $(ct,\, x)$ длина равна $OA = \Delta x$. Очевидно, что

$$\Delta x = \Delta x' \cos\alpha,$$

т. е.

$$\Delta x' = \frac{\Delta x}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.$$

Собственной длиной линейки называется её длина в той системе отсчёта, в которой она покоится. Обозначим её через l_0, а длину той же линейки в движущейся системе отсчёта — через l, тогда

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}.$$

Можно видеть, что самую большую длину линейка имеет в той системе отсчёта, где она покоится.

В задании первого семестра имеется задача следующего содержания. Взволнованный школьник пишет студенту МФТИ: «Теория относительности — наверняка недоразумение. Возьмём шест длиной 20 м и будем двигать его в направлении его длины с такой скоростью, чтобы в лабораторной системе он оказался длиной 10 м. Тогда в некоторый момент времени этот шест можно целиком спрятать в сарае, длина которого также 10 м. Но рассмотрите то же самое в системе отсчёта бегуна с шестом. Для него наполовину сократившимся в длину оказывается сарай. Как же можно спрятать 20-метровый шест в 5-метровом сарае?! Разве этот невероятный вывод не доказывает, что в основе теории относительности где-то есть противоречие?»

Давайте разберёмся, в чём здесь дело. Прежде всего определим относительную скорость двух систем отсчёта. Поскольку

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{V}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Рассмотрим пространственно-временную диаграмму в системе сарая (рис. 8). Пространственно-временная диаграмма в системе отсчёта бегуна имеет совершенно другой вид (рис. 9). Можно видеть, что разрешение парадокса задачи состоит в том, что в системе отсчёта бегуна шест ни в какой момент времени не находится в сарае целиком.

Мы видим, что события, одновременные в одной системе отсчёта, не являются таковыми в другой.

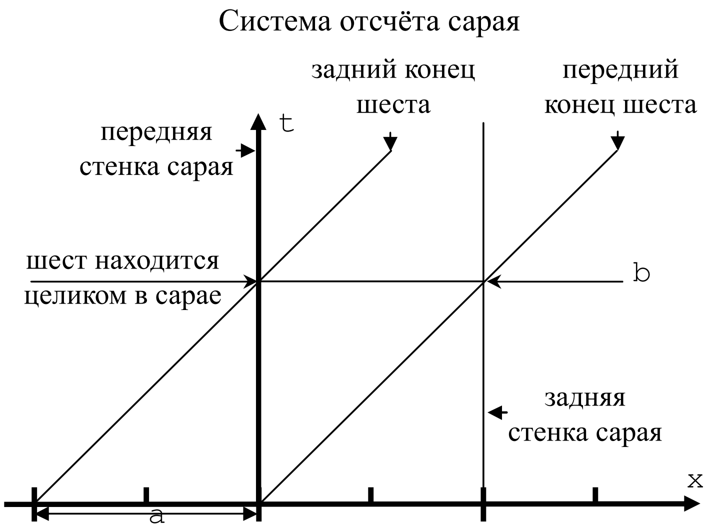
Система отсчёта сарая
задний конец
шеста
передний
конец шеста
передняя
стенка сарая
t
шест находится
целиком в сарае
b
задняя
стенка сарая
x
a

Рис. 8

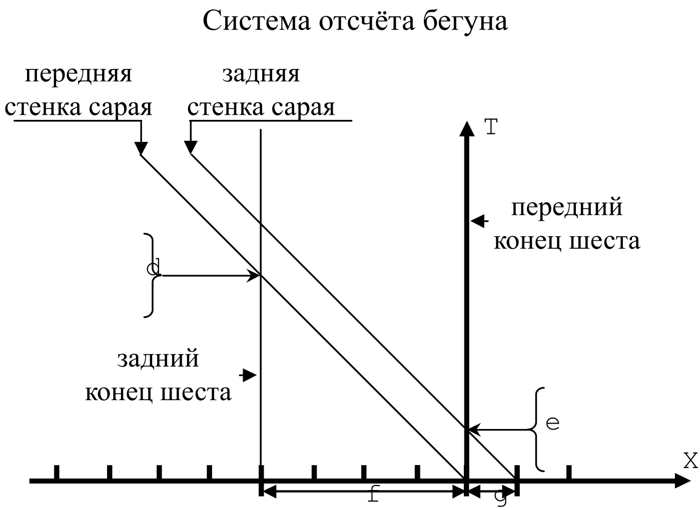
Система отсчёта бегуна
передняя
стенка сарая
задняя
стенка сарая
T
передний
конец шеста
d
задний
конец шеста
e
X
f
g

Рис. 9

Закон сложения скоростей

С помощью (23) находим

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{dx' + V\,dt'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}},\\
dy &= dy', \qquad dz = dz',\\
dt &= \frac{dt' + \frac{V}{c^2}\,dx'}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}.
\end{aligned} \tag{29}
$$

Очевидно, что величина

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \text{invariant}. \tag{30}$$

Заметим, что ds есть интервал между двумя бесконечно близкими событиями, происходящими с материальной точкой.

Разделив первые три равенства (29) на четвёртое и введя скорости

$$\boldsymbol{V} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}, \qquad \boldsymbol{V}' = \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt'},$$

находим

$$v_x = \frac{v_x' + V}{1+\frac{v_x'V}{c^2}}, \qquad v_y = \frac{v_y'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v_x'V}{c^2}}, \qquad v_z = \frac{v_z'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{v_x'V}{c^2}}. \tag{31}$$

Формулы (31) представляют собой релятивистский закон сложения скоростей. В предельном случае $c \to \infty$ имеем

$$v_x = v_x' + V, \qquad v_y = v_y', \qquad v_z = v_z'.$$

Пусть $v_x = v$, $v_y = 0$, $v_z = 0$, тогда $v_y' = 0$, $v_z' = 0$, а $v_x' = v'$, при этом

$$v = \frac{v' + V}{1+\frac{v'V}{c^2}}. \tag{32}$$

Можно убедиться в том, что в силу (32) сумма двух скоростей, меньших или равных скорости света, есть снова скорость, не большая скорости света.

Относительность времени и сокращение длины

Рассмотрим выражение для интервала между двумя бесконечно близкими событиями:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Оно может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Это выражение можно записать в виде

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\boldsymbol{r}^2.$$

Пусть $ds^2 > 0$, тогда

$$c^2dt^2 - d\boldsymbol{r}^2 = c^2dt'^2 - d\boldsymbol{r}'^2. \tag{33}$$

Можно видеть, что в данном случае существует такая система отсчёта, скажем, штрихованная, в которой два бесконечно близких события происходят в одной точке пространства ($d\boldsymbol{r}' = 0$). Интервал, для которого $ds^2 > 0$, называется времениподобным. Из (33) находим

$$c^2dt'^2 = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2 = c^2dt^2\left[1 - \frac{v^2(t)}{c^2}\right]$$

или

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}},$$

где $\boldsymbol{V}(t) = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$. Отсюда имеем

$$dt' = dt\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}};$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}dt. \tag{34}$$

Формула (34) выражает относительность времени. Её впервые получил Эйнштейн.

Пусть теперь $ds^2 < 0$. Такой интервал называется пространственно-подобным. В таком случае существует система отсчёта, в которой эти два события одновременны. Поскольку

$$c^2dt^2 - d\boldsymbol{r}^2 = c^2{dt'}^2 - {d\boldsymbol{r}'}^2 < 0,$$

то, возможно, $dt' = 0$:

$$c^2dt^2 - d\boldsymbol{r}^2 = -d\boldsymbol{r}'^2. \tag{35}$$

Введём обозначения:

$$d\boldsymbol{r}^2 \equiv dl_0^2, \qquad d\boldsymbol{r}'^2 \equiv dl^2.$$

Из (35) находим

$$c^2dt^2 + dl^2 = dl_0^2. \tag{36}$$

Это означает, что $dl < dl_0$.

Используя преобразования Лоренца (23), находим

$$dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c}}}. \tag{37}$$

Поскольку $dt' = 0$, то, подставляя (37) в (36), получаем

$$dl = dl_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Мы видим, что сокращение длины есть не что иное, как следствие инвариантности интервала и способа измерения длины движущегося отрезка.

Собственное время

Время, отсчитываемое по часам, движущимся вместе с данным объектом, принято называть собственным временем этого объекта. В системе координат, связанной с движущимися часами, последние покоятся. Будем поэтому считать, что

$$dx' = dy' = dz' = 0.$$

В силу инвариантности интервала имеем

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 \equiv c^2d\tau^2, \tag{38}$$

где $d\tau$ — интервал собственного времени. Соотношение (38) означает, что

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \tag{39}$$

Заметим, что мы рассматриваем времениподобный интервал ($ds^2 > 0$). Только в этом случае существует такая система координат, в которой два бесконечно близких события происходят в одной точке пространства.

Рассмотрим поучительный мысленный эксперимент. Пусть два кольца вращаются вокруг общей оси с равными по величине и противоположными по направлению угловыми скоростями ω. Предположим, что на одном кольце сидит Адам, на другом — Ева. В некоторый момент времени, когда они проезжают мимо друг друга, показания часов совпадают. Поравнявшись с Адамом, Ева замечает, что его часы идут медленнее. Она ожидает поэтому, что к их следующей встрече её часы уйдут вперед, а Адам придерживается, естественно, противоположного мнения. Что произойдёт в действительности?

Из соображений симметрии ясно, что при следующей встрече Адама и Евы показания часов будут одинаковыми. Убедимся в этом. Рассмотрим ситуацию в неподвижной инерциальной системе отсчёта. Запишем интервал в цилиндрических координатах:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2. \tag{40}$$

Траектория Адама: $r = r_0 = \text{const}$, $z = 0$, $\varphi_A = \omega t$; траектория Евы: $r = r_0 = \text{const}$, $z = 0$, $\varphi_E = -\omega t$.

В силу (40) имеем

$$d\tau_A^2 = d\tau_E^2 = dt^2 \left(1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}\right),$$

т. е. промежутки собственного времени для Адама и Евы одинаковы.

Проведём теперь анализ в неинерциальной системе отсчёта, связанной с Адамом. Совершим для этого следующее преобразование координат:

$$\begin{aligned}
&\varphi \to \varphi' = \varphi - \omega t,\\
&t \to t' = t,\\
&r \to r' = r,\\
&z \to z' = z.
\end{aligned}$$

Опуская штрихи, из (40) находим

$$c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{2\omega r^2}{c} d\varphi \cdot c dt - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2. \tag{41}$$

Траектория Адама: $\varphi_A = 0$, $r = r_0$, $z = 0$;
траектория Евы: $\varphi_E = -2\omega t$, $r = r_0$, $z = 0$.

В силу (41) имеем

$$d\tau_A^2 = dt^2 \left(1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}\right),$$

$$d\tau_E^2 = dt^2 \left(1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}\right) + 4\omega^2 r_0^2 dt^2 - 4\omega^2 r_0^2 dt^2 = dt^2 \left(1 - \frac{\omega^2 r_0^2}{c^2}\right).$$

Таким образом, показания часов Адама и Евы одинаковы.

Другой пример — распад мюонов. Известно, что мюоны распадаются по схеме

$$\mu^- \to e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu,$$
$$\mu^+ \to e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu,$$

в среднем через время $\tau = 2{\cdot}10^{-6}$ с после своего рождения. В атмосфере на большом расстоянии от Земли они создаются быстрыми космическими частицами, приходящими из мирового пространства. Опыт показывает, что мюоны в большом количестве достигают уровня моря. Типичная скорость мюонов $2{,}994{\cdot}10^8$ м/с, что составляет 0,998 скорости света, т. е.

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0{,}063.$$

За время жизни мюона частицы проходят расстояние $v\tau \approx 600$ м, в то время как в действительности они создаются на высотах, на порядок больших указанной величины. Как объяснить этот факт?

Рассмотрим ситуацию в системе отсчёта, связанной с мюоном (штрихованная система координат). Здесь имеем

$$\Delta t' = \tau, \qquad \Delta x' = \Delta x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Это означает, что если мы находимся на Земле и получаем в результате измерений, что высота, на которой возник мюон, равна H, то сам мюон «видит» её равной

$$h = H\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Если $h = 600$ м, то $H = 9500$ м.

Исследуем проблему с точки зрения наземного наблюдателя, т. е. в инерциальной системе отсчёта, связанной с Землёй. Здесь имеем

$$H = v\Delta t, \qquad \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 31{,}7{\cdot}10^{-6}\ \text{с},$$

т. е. $H = 9500$ м.

Представляет также интерес рассмотреть данное физическое явление в системе отсчёта, связанной с наземной системой отсчёта преобразованием Галилея:

$$\tilde{x} = x - vt, \qquad \tilde{t} = t, \qquad \tilde{y} = y, \qquad \tilde{z} = z.$$

Очевидно, что

$$ds^2 = c^2 d\tilde{t}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 2v d\tilde{x} d\tilde{t} - d\tilde{x}^2 - d\tilde{y}^2 - d\tilde{z}^2.$$

Можно показать, что

$$ds^2 = c^2 \left[d\tilde{t}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]^2 - \frac{d\tilde{x}^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - d\tilde{y}^2 - d\tilde{z}^2.$$

Для физического времени и расстояния это даёт

$$d\tau = d\tilde{t}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{v}{c^2} \cdot \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad dl^2 = \frac{d\tilde{x}^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - d\tilde{y}^2 - d\tilde{z}^2.$$

В данной системе отсчёта имеем

$$d\tilde{x} = 0, \qquad \Delta\tilde{t} = \Delta t.$$

Физическое время жизни мюона

$$\tau = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

За это время мюоны пролетают путь

$$\Delta x = v\Delta t = \frac{v\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 9500 \text{ м}.$$

Отметим, что все рассуждения данного параграфа основывались на инвариантности интервала между двумя бесконечно близкими событиями.

Векторы в физике

На вопрос «Что такое вектор?» некоторые студенты отвечают: «Упорядоченная тройка чисел». Немедленно следует возражение: «Рассмотрим некоторую массу газа и напишем для неё упорядоченную тройку — давление, объём, температуру — (P, V, T). Разве это вектор?» После паузы диалог продолжается следующим образом. Студент: «Вектор — это отрезок, имеющий величину, направление и точку приложения». Преподаватель: «Представьте себе, что Вы стоите в г. Долгопрудном на перекрёстке Первомайской улицы и Институтского переулка. Каждый час по Институтскому переулку проезжает a машин, а по Первомайской улице — b машин (имеем определённую точку приложения, величину и направление). В силу Вашего определения вектора, складывая эти векторы по правилу параллелограмма, заключаем, что каждый час в студенческий городок МФТИ врывается $\sqrt{a^2+b^2}$ машин...» Студент обескуражен.

В самом деле, что такое вектор? Эталоном вектора в физике является радиус-вектор. Что нам известно о радиусе-векторе? Для того чтобы описывать адекватно события, происходящие в трёхмерном мире, выберем некоторую декартову систему координат. Точка в трёхмерном пространстве, в том числе точка, где находится какая-то частица, характеризуется тройкой $(x,\ y,\ z)$, где $x,\ y,\ z$ — координаты частицы. Сокращённо координаты точки представляются радиусом-вектором

$$\boldsymbol{r} \equiv (x, y, z).$$

Длина радиуса-вектора определяется как

$$r \equiv \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Изучая на опыте перемещение малых тел (материальных точек), можно убедиться в том, что имеет смысл ввести две операции над радиусом-вектором: «умножение на скаляр» и «сложение векторов» —

$$\alpha\boldsymbol{r} \equiv (\alpha x, \alpha y, \alpha z);$$

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2).$$

Геометрически сумма векторов $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ есть диагональ параллелограмма со сторонами $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ или, что то же самое, третья сторона треугольника, образованного векторами $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$, последовательно приставленными друг к другу. Можно видеть, что сложение векторов является ассоциативным и коммутативным, а умножение на скаляр — дистрибутивным. Например,

$$\boldsymbol{r}_1+(\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3) = (\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2)+\boldsymbol{r}_3;$$

$$\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_1;$$

$$\alpha(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2) = \alpha\boldsymbol{r}_1+\alpha\boldsymbol{r}_2;$$

$$(\alpha_1+\alpha_2)\boldsymbol{r} = \alpha_1\boldsymbol{r}+\alpha_2\boldsymbol{r}.$$

Свойства этих математических операций соответствуют реальной действительности.

Для физики существенно то, что можно дать определение радиусу-вектору, не зависящее от системы координат. Пусть имеются две системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $Ox'_1x'_2x'_3$ с общим началом O. Обозначим через α_{ik} косинус угла между осями x'_i и x_k. Радиус-вектор характеризуется тем, что при вращении системы координат его компоненты преобразуются по закону:

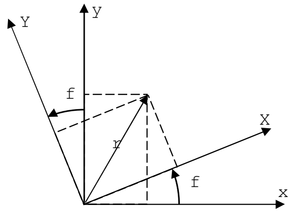

Рис. 10

$$x_i \to x'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} x_k. \tag{42}$$

Рассмотрим для примера поворот системы координат вокруг оси z на угол φ (рис. 10). Имеем

$$\begin{aligned} x \to x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y \to y' &= -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) & 0 \\ \cos(\pi - \varphi) & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задавая преобразование (42), мы определяем радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ сразу для всех систем координат, не отдавая предпочтения ни одной из них. Произвольный вектор $\boldsymbol{A} \equiv (A_1, A_2, A_3)$ определяется по образу и подобию радиуса-вектора: при вращении системы координат он преобразуется по закону

$$A_i \to A'_i = \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik} A_k, \tag{43}$$

т. е. при вращении системы координат компоненты вектора преобразуются как компоненты радиуса-вектора. Этим исчерпывается определение векторной величины в физике.

Форминвариантность уравнения движения

Сделаем несколько предварительных замечаний. Рассмотрим уравнение движения нерелятивистской частицы:

$$m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{F}. \tag{44}$$

Как убедиться в том, что уравнение (44) не изменяет свою форму, скажем, при повороте системы координат вокруг оси z на угол α (рис. 11)?

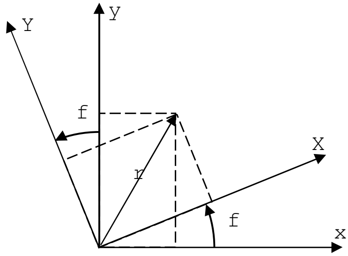

Рис. 11

Координаты частицы (компоненты радиуса-вектора) преобразуются по закону:

$$x \to x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y \to y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \tag{45}$$

Какой смысл вкладываем мы в утверждение, что скорость частицы $\boldsymbol{v}$ есть вектор? В данном случае это означает, что при повороте системы координат компоненты скорости v_x, v_y преобразуются по закону:

$$v_x \to v'_x = v_x\cos\alpha + v_y\sin\alpha,$$
$$v_y \to v'_y = -v_x\sin\alpha + v_y\cos\alpha, \tag{46}$$

т. е. как компоненты радиуса-вектора. То же самое можно сказать и о векторе $\boldsymbol{F}$:

$$F_x \to F'_x = F_x\cos\alpha + F_y\sin\alpha,$$
$$F_y \to F'_y = -F_x\sin\alpha + F_y\cos\alpha. \tag{47}$$

В общем случае трёхмерным вектором называется совокупность трёх величин, которые при преобразовании системы координат преобразуются как компоненты радиуса-вектора.

Вернёмся, однако, к уравнению (44).

Отметим, что $d\boldsymbol{r}$ — вектор; dt, а следовательно, и $\frac{1}{dt}$ — инварианты, так что $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$ — вектор.

Если сила $\boldsymbol{F}$ обладает свойствами вектора, то это же справедливо и для разности: $\left(m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} - \boldsymbol{F}\right)$ — вектор.

Если вектор равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю и в любой другой декартовой системе координат, что и доказывает форминвариантность уравнения движения (44).

Рассмотрим теперь уравнение движения (2). Придадим ему более удобную для анализа форму. Введём в рассмотрение обозначения:

$$\dot{f} \equiv \frac{df}{dt}, \qquad \mathring{f} \equiv \frac{df}{ds},$$

где ds — интервал между бесконечно близкими событиями. Деля (30) на dt^2, находим

$$\frac{ds^2}{dt^2} = c^2 - v^2$$

или, считая $ds > 0$,

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \mathring{t}.$$

Очевидно, что
$$\mathring{f} = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \dot{f} \cdot \mathring{t},$$
т. е.
$$\dot{f} = \frac{\mathring{f}}{\mathring{t}} = \mathring{f} \cdot c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$
Следовательно,
$$\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc\mathring{x}, \qquad \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc\mathring{y}, \qquad \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = mc\mathring{z}.$$
Поскольку
$$\frac{d}{dt} = \frac{1}{\mathring{t}} \cdot \frac{d}{ds} = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\frac{d}{ds},$$
из (2) находим
$$mc^2\overset{\circ\circ}{x} = \frac{F_x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad mc^2\overset{\circ\circ}{y} = \frac{F_y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad mc^2\overset{\circ\circ}{z} = \frac{F_z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{48}$$
Отсюда видно, что для инвариантности системы уравнений (48) относительно преобразований Лоренца необходимо, чтобы правые части уравнений преобразовались как величины x, y, z. Однако, поскольку при этом преобразуется также и время, нужно получить ещё одно уравнение. Его мы получим следующим образом.

Разделив (30) на ds^2, имеем
$$1 = c^2\mathring{t}^2 - \mathring{x}^2 - \mathring{y}^2 - \mathring{z}^2. \tag{49}$$
Дифференцируя по s, находим
$$c^2 \cdot \mathring{t} \cdot \overset{\circ\circ}{t} - \mathring{x} \cdot \overset{\circ\circ}{x} - \mathring{y} \cdot \overset{\circ\circ}{y} - \mathring{z} \cdot \overset{\circ\circ}{z} = 0$$
или
$$c^2 \cdot \overset{\circ\circ}{t} = \frac{\mathring{x}}{\mathring{t}} \cdot \overset{\circ\circ}{x} + \frac{\mathring{y}}{\mathring{t}} \cdot \overset{\circ\circ}{y} + \frac{\mathring{z}}{\mathring{t}} \cdot \overset{\circ\circ}{z} = \dot{x} \cdot \overset{\circ\circ}{x} + \dot{y} \cdot \overset{\circ\circ}{y} + \dot{z} \cdot \overset{\circ\circ}{z}. \tag{50}$$
Умножая (50) на mc и учитывая (48), окончательно имеем
$$mc^2 \cdot (c\overset{\circ\circ}{t}) = \frac{1}{c \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}. \tag{51}$$

Полученным результатам можно дать красивую интерпретацию. Будем рассматривать совокупность координат события (ct, x, y, z) как компоненты четырёхмерного радиуса-вектора (для краткости, 4-радиус-вектор). Его компоненты мы будем обозначать через x_μ, где μ пробегает значения 0, 1, 2, 3, причём

$$x_0 = ct, \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Квадрат «длины» 4-радиуса-вектора даётся выражением

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2. \tag{52}$$

Он не меняется при любых поворотах четырёхмерной системы координат, которыми являются, в частности, преобразования Лоренца.

Инвариантность уравнений (48), (51) относительно преобразований Лоренца требует, чтобы совокупность величин

$$\left(\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{F_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{F_y}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{F_z}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \right)$$

обладала свойствами 4-вектора, компоненты которого по определению преобразуются как компоненты 4-радиуса-вектора x_μ.

Преобразование энергии и импульса

На основании предыдущего можно написать

$$\frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc\overset{\circ}{\boldsymbol{r}}, \qquad \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2(c\overset{\circ}{t}).$$

Это означает, что совокупность величин $\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}$ обладает свойствами 4-вектора:

$$\left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right) = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right) = p_\mu. \tag{53}$$

Вектор p_μ называется 4-импульсом частицы. Квадрат его «длины» равен

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2. \tag{54}$$

Соотношение (54) совпадает с (13). Однако, если эти соотношения относить к системе материальных точек, формулу (54) полезно представить в другом виде:

$$\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i \boldsymbol{p}_i c\right)^2 = \text{invariant}. \tag{55}$$

Основой кинематики элементарных частиц является закон сохранения 4-импульса: полный 4-импульс системы сохраняется, т. е. сумма всех 4-импульсов в начальном состоянии равна сумме всех 4-импульсов в конечном состоянии. Часто поэтому соотношение (54) называют основным кинематическим тождеством.

При решении задач полезными могут оказаться формулы преобразования 4-вектора (53):

$$p_x = \frac{p'_x + \frac{V}{c}E'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad p_y = p'_y, \quad p_z = p'_z, \quad E = \frac{E' + Vp'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}.$$

Геометрия пространства-времени

Какой смысл содержится в утверждении, что реальное трёхмерное пространство евклидово? Под евклидовостью понимается тот факт, что квадрат расстояния между бесконечно близкими точками

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{56}$$

остаётся инвариантным при любых преобразованиях системы координат. Аналогичную интерпретацию можно дать инвариантности квадрата интервала (30).

Следуя Герману Минковскому, немецкому математику, будем считать, что «пространство само по себе и время само по себе суть фикции, и лишь некоторый вид соединения обоих сохраняет самостоятельность». Другими словами, пространство и время едино. Физические процессы протекают в четырёхмерном пространстве (ct и пространственные координаты), геометрия которого определяется инвариантностью выражения

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{57}$$

Поскольку в (57) пространственная и временная части входят с разными знаками, следуя немецким математикам Ф. Клейну и Д. Гильберту, будем называть такое пространство псевдоевклидовым.

Расстояние между точками в трёхмерном пространстве и время между двумя событиями не являются, следовательно, понятиями абсолютными, как в механике Ньютона. Абсолютен интервал. Если назвать $ds^2 > 0$ времениподобным интервалом, $ds^2 < 0$ — пространственноподобным интервалом, $ds^2 = 0$ — изотропным интервалом, то эти понятия тоже абсолютны.

К инвариантности интервала (57) мы пришли, рассматривая преобразования Лоренца, т. е. переходя от одной инерциальной системы отсчёта к другой. Однако постулат Минковского существенно расширяет класс допустимых координатных систем: когда задана геометрия пространства, в ней можно вводить различные системы координат. Последнее хорошо понятно для трёхмерного евклидового пространства. Выражение (56) можно записать, например, в цилиндрических (r, φ, z) или сферических (ρ, θ, φ) координатах:

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2,$$
$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Релятивистскую механику часто называют механикой специальной теории относительности (СТО). СТО — это теория пространства и времени. Её создали физики-гиганты Г.Л. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Г. Минковский. Минковский первый осознал, что суть СТО в том, что все физические процессы протекают в пространстве-времени, геометрия которого псевдоевклидова. Принцип относительности Эйнштейна является «бледной тенью» — частным проявлением этого фундаментального постулата.

Столкновения частиц

Рассмотрим столкновение двух одинаковых частиц массы m. Пусть одна из них покоится, а вторая налетает на неё, обладая в лабораторной системе отсчёта энергией E_1 (рис. 12).

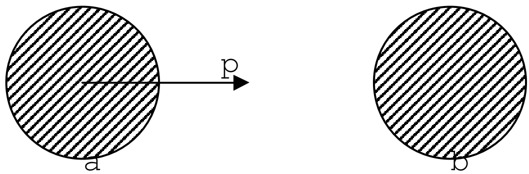

Рис. 12

Определим энергию частиц в системе их центра инерции (в Ц-системе). В этой системе отсчёта суммарный импульс частиц равен нулю, поэтому в силу (54) частицы обладают одинаковой энергией E_0.

Рассматривая обе частицы вместе как одну сложную систему, воспользуемся инвариантом (55). Левая часть (55) в Л-системе (лабораторной системе отсчёта) равна

$$(E_1 + mc^2)^2 - p_1^2 c^2,$$

в Ц-системе — $(2E_0)^2$. Приравнивая эти величины друг к другу, имеем

$$(E_1 + mc^2)^2 - p_1^2 c^2 = 4E_0^2.$$

Поскольку $p_1^2c^2 = E_1^2 - m^2c^4$, находим

$$E_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(E_1 + mc^2)mc^2}. \tag{58}$$

Переданный импульс в данном случае определяется соотношением

$$(qc)^2 = E_0^2 - m^2c^4.$$

Если

$$E_0 \gg mc^2,$$

то

$$q = \frac{E_0}{c}.$$

На основании соотношения неопределённостей можно утверждать, что для «прощупывания» расстояний порядка l необходимо, чтобы при столкновении частиц переданный импульс

$$q \sim \frac{\hbar}{l},$$

где постоянная Планка $\hbar \approx 10^{-34}$ Дж·с.

Сделаем численные оценки. Пусть сталкиваются электроны ($mc^2 = 0{,}5\cdot10^{-3}$ ГэВ). Для того чтобы зондировать расстояния $l \sim 10^{-15}$ см, необходимо, чтобы E_0 было порядка

$$\frac{\hbar c}{l} \sim \frac{10^{-34}\ \text{Дж·с} \cdot 3\cdot10^{8}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}}{10^{-17}\ \text{м} \cdot 1{,}6\cdot10^{-19}\ \frac{\text{Дж}}{\text{эВ}}} \approx 20\ \text{ГэВ}.$$

В силу (33) это означает, что

$$E_1 = \frac{2E_0^2}{mc^2} = \frac{2\cdot 4\cdot10^{2}\ (\text{ГэВ})^2}{0{,}5\cdot10^{-3}\ \text{ГэВ}} \approx 1{,}6\cdot10^{6}\ \text{ГэВ}.$$

Это фантастически огромная энергия. Почему так получается? Дело в том, что электроны-снаряды, разогнанные до энергии E_1, отдают покоящимся электронам-мишеням ничтожную часть своей энергии.

Ситуация существенно улучшается, если воспользоваться принципом встречных пучков, т. е. принципом подвижной мишени.

Пусть сталкиваются два электрона, летящих навстречу друг другу с одинаковыми энергиями E_1. В этом случае Л-система совпадает с Ц-системой и поэтому

$$E_0 = E_1.$$

Конечно, ничто не даётся даром: число рассеянных частиц в случае ускорителя со встречными пучками частиц оказывается чрезвычайно малым, так как плотность подвижной мишени — встречного пучка — ничтожна по сравнению с обычной массивной мишенью. В типичном случае различие достигает 17 порядков.

Пусть частица массы m_1 сталкивается с покоящейся частицей m_2. В результате столкновения рождаются n частиц с массами m'_1, m'_2, … Законы сохранения энергии и импульса имеют вид

$$
\begin{aligned}
&E_1 + m_2c^2 = E'_1 + E'_2 + \ldots + E'_n, \\
&\boldsymbol{P}_1 = \boldsymbol{p}'_1 + \boldsymbol{p}'_2 + \ldots + \boldsymbol{p}'_n.
\end{aligned} \tag{59}
$$

Воспользуемся соотношением (27):

$$
\left(\sum_i E_i\right)^2 - \left(\sum_i (\boldsymbol{p}_i c)\right)^2 = \text{invariant}. \tag{60}
$$

Суммирование здесь производится в заданный момент времени (начальный или конечный). Поскольку величина (35) составлена из интегралов движения, она является интегралом движения.

Вычислим инвариант (60) в начальном состоянии в лабораторной системе, в конечном — в системе центра инерции. Имеем

$$
(E_1 + m_2c^2)^2 - p_1^2c^2 = (m'_1c^2 + m'_2c^2 + \ldots + m'_nc^2)^2.
$$

Поскольку

$$
p_1^2c^2 = E_1^2 - m_1^2c^4, \qquad E_{1k} = E_1 - m_1c^2,
$$

отсюда находим

$$
(E_{1k})_{\min} = \frac{\left(\sum\limits_i m_i + m_1 + m_2\right)\left(\sum\limits_i m'_i - m_1 - m_2\right)}{2m_2},
$$

или

$$
(E_{1k})_{\min} = Q\left(1 + \frac{m_1}{m_2} + \frac{Q}{2m_2c^2}\right). \tag{61}
$$

Выражение (61) определяет пороговую кинетическую энергию реакции. Величина

$$
Q = \sum_i m'_ic^2 - (m_1 + m_2)c^2
$$

называется энергией реакции (аналог нерелятивистской теплоты реакции, взятой с обратным знаком).

Энергия Q также представляет собой порог, но только не в лабораторной системе, а в системе центра инерции сталкивающихся частиц. Порог $(E_{1k})_{\min}$ всегда больше Q, потому что пороговая энергия включает как энергию Q, так и кинетическую энергию движения центра инерции сталкивающихся частиц.

Заключение

Итак, что наиболее существенно из того, что Вы узнали? Конечно, важны приложения релятивистской динамики, которые свидетельствуют о том, что релятивистская механика — это рабочий инструмент современного физика и инженера. Последнее является лучшим доказательством её справедливости. Однако принципиально важно другое — вопрос о сущности специальной теории относительности.

Что составляет её сущность? Мы видели, что основная идея специальной теории относительности содержится в следующем утверждении: физические процессы протекают в четырёхмерном пространстве (ct, x, y, z), геометрия которого псевдоевклидова. Принцип относительности есть частное проявление этого фундаментального постулата.

Расстояние между двумя точками в трёхмерном пространстве и время между двумя событиями не являются абсолютными, как в механике Ньютона.

Абсолютен интервал

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

который может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Никакие преобразования координат не могут нарушить этот абсолютизм.

Познающий — всегда исследователь. Успех исследования в значительной мере зависит от того, насколько нова и неожиданна точка зрения его автора. Склонность к сомнениям и перепроверкам является ценнейшим качеством всякого исследователя. Мы надеемся, что эта работа укрепит здоровый скептицизм читателя и послужит ему стимулом в творческом постижении научной истины.

Содержание