Московский физико-технический институт
(государственный университет)

ОТНОСИТЕЛЬНО ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ НА ПЕРВОМ КУРСЕ

Учебно-методическое пособие

Мудрец Эйнштейн играть на скрипке мог.
Но славу принесло ему другое:
Теории его могли понять лишь двое —
Он сам, да временами Бог.

Д.К. Россеттер

Естественные сложности, возникающие при знакомстве с основами теории относительности на первом курсе, усугубляются затруднениями с подбором подходящей литературы. В курсе Сивухина [1] соответствующий материал отнесён в IV том (Оптика); изложение Фейнмана [2] не слишком хорошо согласуется с программой курса; у Киттеля [3] велик объём раздела, посвященного релятивистским вопросам.

В настоящем пособии сделана попытка достаточно компактно изложить элементарные вопросы Частной или Специальной теории относительности (СТО), изучаемые в курсе общей физики Московского физико-технического института (в разделе Механика, т.е. в первом семестре).

В теоретической части автор в определённой мере следовал логике Киттелева изложения; в подборе задач использованы разработки кафедры.

Некоторые вопросы, не являющиеся обязательными, но нередко вызывающие интерес у активных студентов (в том числе предыстория СТО), вынесены в Приложения.

Механика Галилея–Ньютона — теория движения тел со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света. Это естественно, так как эта механика и возникла из обобщения результатов соответствующих наблюдений и экспериментов. Специальная теория относительности описывает движения со всевозможными скоростями. Она как бы является обобщением механики Ньютона, или конкретнее — принципа относительности Галилея, и её основной инструмент — преобразования Лоренца — обобщение преобразований Галилея. В этом смысле СТО можно считать «механической» теорией, т.е. теорией, относящейся к механике.

Исторически, однако, СТО возникла из потребностей теории электромагнитных явлений. Не случайно основополагающая статья Эйнштейна (1905) называлась «К электродинамике движущихся тел».

Основные уравнения электродинамики — уравнения Максвелла — не удавалось согласовать с преобразованиями Галилея.

Попытки изменить уравнения Максвелла так, чтобы они не входили в противоречие с преобразованиями Галилея, оказались бесплодными. Потребовалось изменение преобразований.

Этим, однако, дело не ограничилось. Когда место преобразований Галилея окончательно заняли преобразования Лоренца (см. Приложение 1), выяснилось, что необходим коренной пересмотр представлений о свойствах пространства и времени. Пришлось отказаться от Ньютоновых представлений о существовании абсолютного времени и абсолютного пространства, заполненного, как считала физика XIX века, неподвижным относительно этого абсолютного пространства светоносным эфиром — средой, в которой распространяются электромагнитные волны, в том числе свет.

* * *

Специальная теория относительности Эйнштейна начинается с провозглашения двух постулатов.

Постулат I. Никакими опытами невозможно установить, какая из инерциальных систем неподвижна.

Галилей утверждал то же самое, но только в связи с механическими опытами. Если же это справедливо для *любых* опытов, понятие неподвижной системы полностью теряет смысл. Ньютоново неподвижное, абсолютное пространство попросту исчезает.

Заодно исчезает заполняющая это пространство среда, служащая передатчиком электромагнитных волн:

«Эйнштейн изгнал эфир!»

По Эйнштейну электромагнитные волны (в частности, свет) распространяются в пустоте. И они тоже не дают возможности отличить «абсолютную систему отсчёта».

Постулат II. Скорость света в пустоте одна и та же во всех инерциальных системах отсчёта: $c = \mathrm{inv}$.

Если первый постулат только расширяет сферу действия принципа относительности Галилея, то второй явно противоречит представлениям классической механики о простом векторном сложении скоростей.

Второй постулат даёт возможность получить основной инструмент Специальной теории относительности — ***преобразования Лоренца***.

Рассмотрим две системы координат: K, которую иногда будем называть неподвижной или лабораторной, и K', движущуюся относительно K со скоростью V.

Для удобства направим оси x и x' по вектору $\boldsymbol{V}$. Пусть в некоторый момент времени оси y и y', а также оси z и z' совпадают. В этот момент происходит вспышка в общем для обеих систем начале координат, и из этой точки начинает распространяться световая волна. Примем момент вспышки за начало отсчёта времени в обеих системах.

Итак, вспышка произошла в момент времени $t = 0$ в точке с координатами $x = y = z = 0$, а также в момент времени $t' = 0$ в точке с координатами $x' = y' = z' = 0$. Для произвольного момента времени положение сферической волны (это один и тот же физический объект) описывается в двух системах уравнениями

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2; \qquad (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = c^2(t')^2. \tag{1}$$

Если справедливы преобразования Галилея $x = x' + Vt$, $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$, то оба равенства (1) не могут быть выполнены одновременно. По-видимому, (при нашем выборе направления осей) равенства $y = y'$ и $z = z'$ сохраняются. Учитывая это обстоятельство, вычтем одно из другого равенства (1). Мы получаем, что должно быть выполнено соотношение

$$x^2 - c^2t^2 = (x')^2 - c^2(t')^2. \tag{2}$$

Очевидно, нельзя обойтись преобразованием x, надо преобразовывать и t. Новые преобразования должны удовлетворять двум критериям.

Во-первых, так как все системы равноправны, переход из некоторой системы в любую другую должен описываться одними и теми же формулами (со своим значением V), а двукратное применение преобразований с заменой на втором шаге $+V$ на $-V$ должно возвращать нас в исходную систему. Таким свойством могут обладать только *линейные* по x и t преобразования.

Во-вторых, при $V/c \to 0$ эти преобразования должны переходить в преобразования Галилея, справедливость которых для малых скоростей не может быть подвергнута сомнению.

Попробуем простейшее: $x = x' + Vt', \quad t = t' + Ax'$. Подставим эти выражения в левую часть (2):

$$x^2 - c^2t^2 = (x')^2 + 2Vx't' + V^2(t')^2 - (ct')^2 - 2Ac^2x't' - c^2A^2(-x')^2.$$

Если принять $A = V/c^2$, т.е. $t = t' + (x'V/c^2)$, получим

$$x^2 - c^2t^2 = (x')^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - c^2(t')^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

Теперь нетрудно догадаться, как выглядят «правильные» преобразования, ***преобразования Лоренца***:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \tag{3}$$

и обратные преобразования

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \tag{4}$$

Преобразования (3) — (4) — частный случай так называемой группы преобразований Лоренца, включающей ещё поворот системы координат относительно начала отсчёта. Добавим к этой группе перенос начала координат и получим полный набор преобразований СТО — группу Пуанкаре. Мы ограничимся случаем, описываемым соотношениями (3) — (4), и в дальнейшем именно их будем называть преобразованиями Лоренца (ПрЛ).

Наиболее впечатляющее следствие ПрЛ — ***относительность одновре́менности*** разнесённых в пространстве событий. Если два события A и B произошли одновременно в одной точке пространства, то в любой системе координат $t_A = t_B$. Конкретные значения, например, t_A и t'_A могут быть различными, но в каждой системе останется справедливым равенство $t'_B = t'_A$. Если же при $t_A = t_B$ окажется, что $x_A \neq x_B$, то в любой другой системе, как это с очевидностью следует из ПрЛ, $t'_A \neq t'_B$.

Почему это математически очевидное обстоятельство до Эйнштейна оставалось незамеченным? Да всё по той же причине: одновременны события или нет, «решается» в абсолютном пространстве по отношению к абсолютному времени, а в любой другой системе они только «кажутся» одновременными или неодновременными. Но если абсолютной системы нет, нет и абсолютной одновременности.

Исчезает не только абсолютное пространство, исчезает и абсолютное время, которое, по Ньютону, течёт «всегда одинаково, безотносительно к чему-либо внешнему». Время СТО зависит от системы отсчёта. Зависят от системы отсчёта и промежуток времени между двумя событиями, и расстояние между двумя точками. В механике Галилея–Ньютона координаты точек зависят от системы отсчёта, но расстояние между точками $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = l^2 = \mathrm{inv}$$

— от системы не зависит. В механике СТО эта величина перестаёт быть инвариантом. Независимым от системы отсчёта становится *интервал* между событиями, определяемый для событий $A(x_A, y_A, z_A, t_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B, t_B)$ соотношением

$$s_{AB}^2 = c^2(t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2 = \mathrm{inv}.$$

Время становится в один ряд с пространственными координатами или, как сказал Минковский, «пространство само по себе и время само по себе погружаются в реку забвения, а остаётся жить лишь своеобразный их союз».

Это проявляется особенно наглядно, если, следуя Минковскому (1908), в качестве четвёртой координаты выбрать не t, как таковое, а ict. Тогда интервал запишется в симметричной форме:

$$s^2 = -\sum_{i=1}^{4} \Delta x_i^2,$$

где $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$.

Существует лишь то,
что можно измерить,
взвесить и сосчитать.

Р. Декарт

В попытках определить, что такое время, мы не слишком далеко ушли от Блаженного Августина: «Я прекрасно знаю, что такое время, пока не думаю об этом, но стоит мне задуматься — и вот я уже не знаю, что же такое время.» Даже Ньютон не смог сказать о сущности времени ничего более внятного, чем то, что оно «иначе называется длительностью».

Пространство и время — наиболее общие понятия физики, их невозможно определить по Аристотелю — указать более общее понятие и отличительные признаки определяемого. Физический энциклопедический словарь [7] определяет время как основную форму существования материи, выражающую порядок смены явлений. Увы, как мы увидим чуть позже, в мире СТО даже «порядок явлений» может зависеть от системы отсчёта.

Следуя духу Декарта, попробуем «определить» время и расстояние (пространство) через процедуры их измерения.

> Непонимающие люди заявляют: позвольте, вы перевернули наши понятия о времени и пространстве. Я бы сказал наоборот: у вас не было чётких и определённых понятий времени и пространства.
>
> Эйнштейн их дал.
>
> *Л.И. Мандельштам*

На первый взгляд представляется достаточно очевидным, как надо измерять промежутки времени и расстояния. «Наивному» Эйнштейну это не казалось очевидным. Анализ процедуры измерений — одно из важнейших достижений Эйнштейна. Попробуем воспроизвести его рассуждения, используя, однако, современные эталоны единиц времени и длины.

Итак, начнём с того, что «возьмём» изотоп цезия с атомной массой, равной 133. Будем наблюдать его излучение. «Отсчитаем» чуть больше девяти миллиардов (точно — 9 192 631 770) «периодов излучения, соответствующего переходу между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома» (следовало бы отметить — *покоящегося* атома), и скажем, что прошла единица времени — секунда. Расставим по системе отсчёта часы и выверим их ход по этому эталону.

Надо ещё согласовать начало отсчёта времени — *синхронизовать* часы. Примем за образец, например, часы, находящиеся в начале координат. Каждый «хранитель времени» пошлет от своих часов световой сигнал в начало координат, примет отражённый от начала координат сигнал и зафиксирует время обоих событий (отправления сигнала и его возвращения) по своим часам. Когда будет получена информация о времени прихода этого сигнала в начало координат (по находящимся там эталонным часам), можно будет согласовать показания часов, т.к. в соответствии с постулатом II время распространения сигнала к образцу и обратно одно и то же.

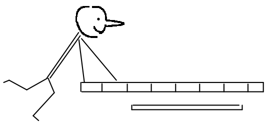
Заметим, что процедура, предусматривающая синхронизацию часов по времени прихода сигнала из точки, находящейся на середине отрезка, соединяющего синхронизуемые часы, нам не подходит, так как мы ещё «не научились измерять расстояния». Постулат II поможет нам этому научиться.

Так как мы уже знаем, что такое секунда, отметим точки, расстояние между которыми свет проходит ровно за одну секунду, и будем считать это расстояние равным 300 миллионам (точно — 299 792 458) единиц длины —

метров.

Теперь в нашей системе имеются *неподвижные* часы и линейки. В любой другой системе можно провести ту же процедуру, и часы и линейки второй системы отсчёта *должны* быть неподвижными относительно своей системы.

Тогда, согласно первому постулату, все события, происходящие во второй системе, будут происходить точно так же, как происходят в аналогичной ситуации события в первой системе, *если измерения производятся «своими» часами и линейками*, т.е. неподвижными относительно выбранной системы отсчёта.



Неподвижные линейки дают возможность производить впрямую обмеры только неподвижных предметов. Как же измерить длину движущегося стержня? Бежать с линейкой в руках рядом со стержнем нельзя: тем самым мы бы фактически перешли в другую систему отсчёта, именно в ту, в которой стержень неподвижен.

Эйнштейн предлагает следующую процедуру. Зафиксируем одновременно ($t_A = t_B$) положения концов стержня; полагаем, что стержень ориентирован по оси x, вдоль которой направлена его скорость. Тогда $x_A - x_B = l$ есть длина стержня в системе, относительно которой он движется. При этом его длина в «своей» системе (длина неподвижного стержня) равна

$$t' = x'_A - x'_B = \frac{x_A - x_B}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Gamma l = \gamma l,$$

где буквами «гамма» обозначены релятивистские множители (***Лоренц-факторы***): $\Gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ для движущейся системы отсчёта и $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ для самого стержня (в данном случае совпадающие, т.к. скорости системы V и стержня v равны). Обычно, обозначая через l_0 длину неподвижного стержня, иначе называемую его ***«собственной» длиной***, полученное соотношение записывают в виде

$$l_0 = \gamma l. \tag{5}$$

Отметим три обстоятельства. Во-первых, моменты фиксации положения концов стержня в системе K' не совпадают: $t'_A \neq t'_B$. Это, однако, не играет роли, т.к. в этой системе стержень неподвижен, x'_A и x'_B не зависят от времени.

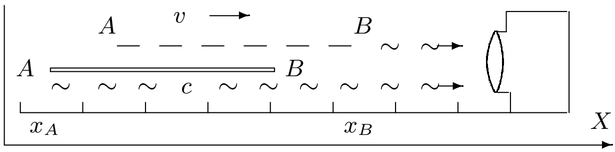
Во-вторых, т.к. Γ и γ всегда больше единицы, *собственная длина* стержня *максимальна*. Измерения его длины в любой другой системе дадут ме́ньшую величину. Этот эффект носит название ***релятивистского сокращения длин*** (сокращение Лоренца–Фитцджеральда).

В-третьих, длина движущегося стержня, измеренная по Эйнштейну, не совпадает с его «видимой» длиной, с той длиной, которую мы приписали бы стержню при непосредственном наблюдении. Когда мы смотрим на стержень, то оцениваем его длину по положению концов стержня, определяемому сигналами, *одновременно пришедшими* к нам; процедура Эйнштейна требует, чтобы длина оценивалась с помощью сигналов, *одновременно исходящих* из точек, расстояние между которыми мы измеряем. Рассмотрим это различие на примере.

Задача 1. (8.3 [6]) Стержень длины l (в лабораторной системе координат) движется вдоль неподвижной масштабной линейки со скоростью v. Фотоаппаратом, находящимся на той же линейке, производится фотографирование стержня (с пренебрежимо малым временем выдержки). Какой окажется длина стержня на фотографии?

Иными словами: какова будет разность значений x на линейке возле изображений двух концов стержня? Ведь это и есть «видимая» («кажущаяся») длина стержня.

▼ Рассмотрим для определённости случай, когда стержень движется к фотокамере. Сравним процедуры получения фотоснимка в двух системах отсчёта: лабораторной и связанной со стержнем.



Начало отсчёта времени в обеих системах ($t = t' = 0$) выберем в момент выхода из точки A сигнала, который попадёт в открытый объектив и создаст изображение этой точки. Сигнал, выходящий в этот момент из точки B, попадёт на ещё закрытый объектив. В открытый объектив попадёт сигнал, испущенный точкой B в момент, когда мимо неё проходит сигнал, создающий изображение точки A: дальше им предстоит одинаковый путь, и они одновременно подойдут к камере и оба попадут в открытый объектив.

Пусть начала координат обеих систем $x = x' = 0$ в момент испускания точкой A «нужной» порции излучения ($t = t' = 0$) находятся как раз в точке A. Если собственная длина стержня равна l_0, то в системе, связанной со стержнем, прохождение этой порцией точки B и излучение «нужной» порции излучения точкой B произойдёт в точке $x' = l_0$ в момент времени $t' = l_0/c$. Координату этого события в лабораторной системе получаем из первой формулы (3):

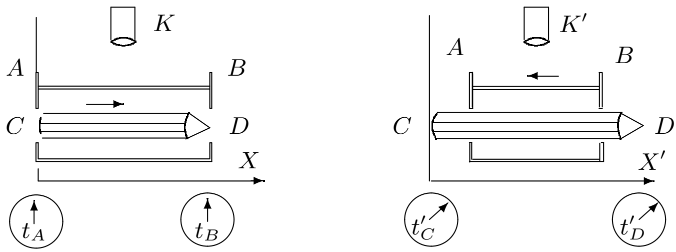
$$x_B = l^{\text{вид}} = \frac{l_0 + \frac{v}{c} l_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = l_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} > l_0 \ (!).$$

Так как координата точки A на снимке равна нулю, полученное значение x_B и есть видимая длина движущегося стержня (это можно писать и без кавычек, т.к. именно таким мы его увидим), и она больше его собственной длины, чего никак не может получиться при измерении по Эйнштейну. Для удаляющегося стержня достаточно поменять знаки перед v/c под корнем, и мы получим длину меньше l_0, но опять-таки не совпадающую с l. ▲

Сокращение длин — явление взаимное. В связи с этим возникают кажущиеся парадоксы. Рассмотрим один из них.

Задача 2. (см. [18]) Через «пенал» длины $l = 8$ св. с (световых секунд) пролетает со скоростью $v = 0{,}6c$ «карандаш», собственная длина которого равна $l_0 = 10$ св. с.

Может ли весь карандаш оказаться внутри пенала?



▼ Рассмотрим события в системе отсчёта, связанной с пеналом. Пенал неподвижен, и координаты его концов $x_A = 0$, $x_B = l = 8$ св. с. Длина движущегося карандаша равна

$$\frac{l_0}{\gamma} = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 8 \text{ св. с.}$$

Карандаш как раз может «втиснуться» в пенал. Будем вести киносъемку событий камерой K, расположенной симметрично относительно точек A и B, чтобы на каждом кадре показания часов t_A и t_B были одинаковы. Тогда в некоторый момент времени $t = 0$ мы можем закрыть заслонки A и B и получить кадр, на котором длинный карандаш находится внутри короткого пенала. Заслонку B надо тут же снова открыть, чтобы в неё не врезался грифель, и нам не пришлось рассматривать неравномерное движение.

Теперь сфотографируем процесс пролёта карандаша через пенал в системе, связанной с карандашом.

Камера K' движется вместе с карандашом — так это выглядит в «системе пенала». В новой системе камера K' неподвижна, неподвижен и карандаш, координаты его концов

$$x'_C = 0, \qquad x'_D = l_0 = 10 \text{ св. с.}$$

На карандаш «надевается» пенал, длина которого теперь равна $l' = l/\gamma = 6{,}4$ св. с. Пусть в момент срабатывания заслонки A часы, укреплённые на «хвосте» карандаша, т.е. в начале координат новой системы, показывают время $t'_{C0} = 0$. Тогда справедливы ПрЛ в форме (4). Закрытие заслонки B — событие, описываемое в системе К значениями

$$x_{B0} = l = 8 \text{ св. с} \qquad t_0 = 0.$$

Получаем положение заслонки B в момент её срабатывания в новой системе $x'_{B0} = \gamma l = 10$ св. с. Заслонка B «щёлкает» при подлёте к грифелю карандаша! Но ведь так и должно быть: срабатывание заслонки и совпадение её положения с положением соответствующего конца карандаша — события *абсолютно* одновре́менные, т.к. они происходят (по данным системы K) не только одновременно, но и в одной точке пространства.

Но что в этот момент показывают часы D?

$$t'_{D0} = t'_{B0} = \gamma\left(t_{B0} - \frac{v x_{B0}}{c^2}\right) = \gamma\left(0 - \frac{vl}{c^2}\right) = -6 \text{ с (!)}.$$

Вот где собака зарыта! За 6 секунд до срабатывания заслонки A мы успеваем «перед носом» карандаша щёлкнуть заслонкой B. Конец карандаша в этот момент ещё «выглядывает» из пенала. Через 6 секунд, когда грифель уже не находится в пенале, срабатывает заслонка A. В этой системе заслонки щёлкают *не* одновременно. Так и должно быть: события, одновременные в одной из систем, но происходящие в разных точках этой системы, в другой системе *должны* быть неодновременными. ▲

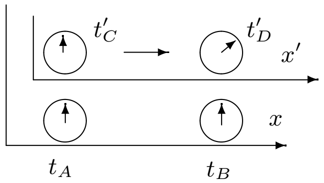
Время в разных системах идёт по-разному, по-разному идут «правильные» часы. Пусть в некоторый момент времени t_1 по часам лабораторной системы часы, движущиеся со скоростью v, показали t'_1. Через некоторое время τ снова сверим показания часов. Пусть эти показания теперь t_2 и t'_2. В своей системе часы неподвижны, т.е. $x'_2 = x'_1$. Тогда $t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1)$. По движущимся часам прошло время

$$t'_2 - t'_1 = \tau_0 = \frac{\tau}{\gamma}. \tag{6}$$

Опять вспомним, что $\gamma > 1$, и придём к выводу, что ***собственное время всегда минимально***.

Наглядный пример доказательства замедления хода времени для движущихся объектов — обнаружение у поверхности Земли пионов (π-мезонов), рождённых космическими лучами в верхних слоях атмосферы. Время жизни пиона — $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ с. Если даже его скорость близка к скорости света, за такое время он может пролететь менее десятка метров. Значит, «с точки зрения пиона» (то есть в системе отсчёта, связанной с пионом) толщина летящей ему навстречу атмосферы составляет всего несколько метров. Если те же события рассмотреть в лабораторной системе, то окажется, что при столь большой скорости пиона *за его собственное время жизни* на Земле проходит «громадное» время — сотни микросекунд, и пион успевает преодолеть десятки километров.

Нетрудно понять, что *с этой точки зрения* человеку в течение его жизни, в принципе, доступны сколь угодно далёкие путешествия. Стоит только как следует разогнаться, летящая нам навстречу Вселенная тут же сожмётся, и окажется, что «до самой далёкой планеты не так уж, друзья, далеко».

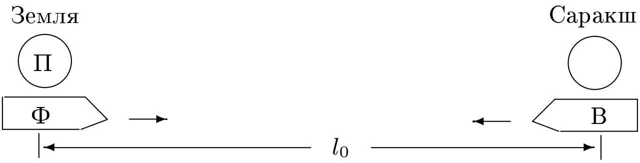


Эффект замедления времени тоже, конечно, взаимен. Напомним, что непосредственно сверить часы разных систем отсчёта можно только тогда, когда они пролетают одни мимо других. Допустим, мы сверяли часы C, движущиеся относительно системы K, последовательно с часами A и B.

В момент, когда мы сверяли часы A и C, часы B, так же, как и A, показывали время t_1. Однако сверить их можно было только с некоторыми часами D, координата которых (в системе K) на величину $v\tau$ превышала значение координаты часов A (и C). Нетрудно подсчитать, что часы D в этот момент времени показывали $t'_D = t'_1 - \gamma(v\tau)v/c^2$. До встречи часов C и B по часам B прошло время τ, а по часам системы K' — время $\tau_0 + \gamma(\tau v)^2\, c^2 = \gamma\tau$. Получается, что и в системе K' движущиеся часы (теперь это часы системы K) идут медленнее.

Эффекты, связанные с замедлением времени, обычно рассматривают на примере космических путешественников. Иногда при этом приводятся примерно такие рассуждения: каждый космонавт в своей системе должен считать другого движущимся; значит, каждый из них считает себя старше. Как правило, подобные парадоксы возникают из-за забвения факта относительности одновременности.

Задача 3. (8.11 [6]) Световой сигнал, посылаемый на Землю с планеты Саракш, возвращается на Саракш через время $2T = 30$ лет. Скорость планеты относительно Земли пренебрежимо мала, и её календарь согласован с земным. Звездолёт летит по направлению к Солнечной системе со скоростью $v = 0{,}6c$. В день, когда он пролетает мимо Саракша, на звездолёте рождается мальчик Ваня. В тот же день (по саракшско-землянскому календарю) на Земле рождается мальчик Петя. Сколько лет будет Ване и Пете, когда звездолёт будет пролетать мимо Земли?

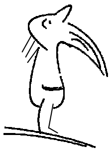


▼ С точки зрения Пети всё ясно. Расстояние от Земли до Саракша $l_0 = T/c = 15$ св. лет. Ваня прилетит через время $T_0 = l_0/v = 25$ лет. И это будет возраст Пети при встрече. Поскольку Ваня двигался, его возраст будет поменьше: $T_B = T_\Pi/\gamma = T_0/\gamma = 20$ лет. ▲

Но как это все выглядит с точки зрения Вани?

Тут очень важно «крепко» сесть в его систему отсчёта. Теперь Ваню, его систему и сеть «агентов», которыми ему следует обзавестись, мы считаем неподвижными. Часы агентов синхронизованы с Ваниными по Эйнштейну.

▼ Навстречу Ване летит связка Саракш-Земля длины, кстати, уже не 15, а только $l = l_0/\gamma = 12$ св. лет. Пролетает она мимо Вани за время $l/v = 20$ лет. Конечно, ведь это время пролёта Вани от Саракша до Земли по собственным часам.



Но Петя за это время стареет (взрослеет) только на 16 лет(!). Он теперь движется, и у него часы идут (время течёт) медленнее, чем у Вани. Но когда же он родился? Опросим агентов. Тот агент, который расположен в 12 световых годах «впереди» Вани, скажет: «20 лет назад мимо меня пролетала Земля, и как раз в этот момент, как я узнал позже, родился Ваня. А на Земле я видел Петю, и он сказал, что ему (по его, Петиному, календарю) девять лет.»

А кто же *видел* рождение Пети?

По своему календарю Петя встретил Ваню в возрасте 25 лет. Но Петя двигался, и по «нашему» (Ваниному) календарю, его возраст $\tau = \tau_0\,\gamma = 31{,}25$ года. За время τ он пролетел расстояние $L = \tau\, v = 18{,}75$ св. года, и, значит, в момент его рождения Земля пролетала мимо точки Ваниной системы, находящейся в 18,75 св. года от Вани, мимо соответствующего агента. Именно это расстояние в Петиной системе равно $L/\gamma = l_0 = 15$ св. лет. ▲

Запустим ещё один звездолёт. Он пролетает мимо Земли по направлению к Саракшу с той же по величине скоростью — $0{,}6c$, и в этот момент на нём рождается Федя.

▼ Петя и Федя — «документальные» ровесники: они родились в одно время в одном месте. На полпути от Земли к Саракшу Федя встречает Ваню, и они тоже ровесники — им в одно время, в одном месте исполнилось по 10 лет. Но в этих условиях понятие, свойство «ровесники» нетранзитивно: Федя с Петей — ровесники, Ваня с Федей — ровесники, а Петя с Ваней — нет...

«Подлинные» же близнецы, конечно, не могут, однажды расставшись, встретиться вновь, если ни один из них не испытал ускорений. Этот вопрос — «настоящий» парадокс близнецов — нельзя рассматривать, не касаясь поведения часов в ускоренных системах отсчёта. И космонавт всегда окажется моложе «домоседа» (см. Приложение 2). ▲

Обратим внимание на ещё одно обстоятельство. В системе Феди Ваня двигался, а возраст их при встрече одинаков: значит, по мнению Феди, Ваня родился раньше. В системе Вани те же рассуждения приводят к выводу, что раньше родился Федя. Как мы и обещали, даже порядок следования событий зависит от системы отсчёта.

Так же, как непосредственное наблюдение движущегося стержня и грамотное, по Эйнштейну, измерение дают разные значения его длины, прямое наблюдение движущихся часов дают не то, что их сверка последовательно с двумя «неподвижными» часами.

Задача 4. (см. 729 [5], 8.29, 8.30, [6]) Два космических корабля движутся по одной прямой со скоростью $v = 0{,}6\,c$ относительно друг друга. На каждом корабле наблюдают прямое телевизионное изображение часов другого корабля. Как связаны показания собственных часов и показания изображения «чужих» часов?

▼ Допустим, наблюдатель A в некоторый момент времени поставил на своих часах то же показание, которое он видел на телеэкране, изображающем часы B, например t_0. Отметим, что передатчик B послал изображение своих часов, на которых было это показание — t_0, с некоторого расстояния L_0, и мы на часах A время t_0 установили через промежуток времени L_0/c после того, как это время показали часы B.

Пока по часам B пройдёт некоторое время τ_0, по «неподвижным» часам системы A пройдёт уже время $\tau = \gamma\,\tau_0$. Однако надо учесть, что корабль B движется, и его сигналы приходят из разных точек системы A. Если корабли сближаются, путь сигнала во втором случае меньше на величину

$v\tau$, т.е. $L = L_0 - v\tau$. Через время $L/c = L_0/c - v\tau/c$ после того, как часы B показали $t_0 + \tau_0$, сигнал об этом дойдёт до наблюдателя A.

Итак, наблюдатель A увидит на телевизионном экране показание $t_0 + \tau_0$ тогда, когда его часы покажут время

$$t_0 + \tau - \frac{v\tau}{c} = t_0 + \gamma\tau_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) = t_0 + \tau \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} = t_0 + 0{,}5\tau_0.$$

На телеэкране прошла минута, а по часам A только полминуты. Часы на экране телевизора идут быстрее, чем часы в кабине корабля (!).

Точно такие же рассуждения применимы, конечно, и к космонавту B: у него тоже часы на экране, изображающем корабль A, будут идти вдвое быстрее собственных.

После того, как космонавты разминулись, часы на экране пойдут медленнее часов в кабине. Нетрудно понять, что теперь промежутки времени будут связаны соотношением

$$\tau = \tau_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

В нашем случае часы на экране пойдут вдвое медленнее собственных. Отметим, что это отношение *не равно* γ и в случае удаления кораблей друг от друга. ▲

Частота сигналов — величина, обратная промежуткам времени между двумя последовательно приходящими сигналами: $\nu = 1/T$. Значит, для изменения частоты в этих условиях получим: в случае сближения источника и приёмника

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}};$$

в случае удаления друг от друга источника и приёмника

$$\nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Мы получили релятивистские формулы для эффекта, который открыл Доплер (1842), — смещения частоты сигнала при относительном движении источника и наблюдателя.

Напомним, что при распространении волн в материальной среде величина доплеровского сдвига частоты зависит от того, кто именно движется. При движении источника

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 \mp \frac{v}{s}},$$

при движении наблюдателя

$$\nu = \nu_0 \left(1 \pm \frac{v}{s}\right),$$

где s — скорость, например, звука в воздухе, и в обеих формулах верхний знак отвечает уменьшению, а нижний — увеличению расстояния между источником и наблюдателем. И, конечно, обе эти формулы справедливы только в нерелятивистском приближении.

При малых (по сравнению со скоростью сигнала) скоростях все различия скрадываются, и сдвиг частоты можно принять равным $\Delta\nu = \pm\nu_0 v/c$ (или $\pm\nu_0\, v/s$).

Все только что приведённые формулы относятся к так называемому продольному эффекту Доплера (тела сближаются или удаляются друг от друга, их скорости направлены по соединяющей тела прямой).

Рассмотрим другой крайний случай: скорость перпендикулярна соединяющей тела прямой. Например, одно из рассматриваемых тел обращается вокруг другого по круговой орбите. С точки зрения классической механики в данном случае доплеровского сдвига частоты не должно быть. Расстояние между источником и приёмником не меняется, время распространения сигнала от источника к приемнику также не меняется, сигналы приходят ровно через такие промежутки времени, через какие они излучаются.

СТО, однако, утверждает, что часы на «центральном теле» и на «спутнике» идут по-разному. Приёмник зафиксирует более низкую частоту, причём отношение частот равно $\nu/\nu_0 = 1/\gamma = (1-\beta^2)^{1/2}$ и, конечно, не зависит от того, где расположен источник, а где приёмник. Соответственно при малых скоростях относительный сдвиг частоты в поперечном эффекте Доплера равен $\Delta\nu/\nu = -v^2/(2c^2)$, то есть имеет второй порядок малости по v/c (см., однако, приложение 2, в том числе задачу 10).

В общем случае, если скорость источника, излучающего частоту ν_0, составляет угол φ с направлением на источник, наблюдатель воспримет частоту

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta\cos\varphi}.$$

Ввиду того, что по Лоренцу (в отличие от Галилея) преобразуется, кроме координат, ещё и время, заметно меняется закон сложения скоростей. Если в системе K тело движется со скоростью v, имеющей составляющие по осям координат v_x, v_y и v_z, а система K' движется со скоростью V вдоль оси X, для составляющих скорости тела в системе K' получаем:

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\Gamma(dx - V\,dt)}{\Gamma\left[dt - \frac{V}{c^2}dx\right]} = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V v_x}{c^2}};$$

$$v'_y = \frac{dy}{\Gamma\left[dt - \frac{V}{c^2}dx\right]} = \frac{v_y\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}; \tag{7}$$

$$v'_z = \frac{dz}{\Gamma\left[dt - \frac{V}{c^2}dx\right]} = \frac{v_z\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{Vv_x}{c^2}}.$$

Хотя координаты y' и z' равны соответственно y и z, составляющие скорости по этим осям в разных системах различны, т.к. различаются темпы течения времени.

Не представляется неожиданным факт, что если v_x по модулю равна скорости света c, то эта величина не изменится при переходе в любую другую систему отсчёта. Ведь именно инвариантность скорости света является критерием справедливости преобразований Лоренца.

Если скорости света равна, например, составляющая v_y ($v_x = v_z = 0$), то v'_y не будет равна c, но модуль полной скорости как раз окажется равным скорости света.

Закон сохранения импульса — один из основных законов природы; он отражает однородность пространства. В мире Минковского однородность пространства сохраняется. Видимо, должен быть по-прежнему справедлив закон сохранения импульса в замкнутой системе. Однако это требует определённой корректировки выражения для импульса тела.

Рассмотрим частный случай. Два одинаковых тела (масса каждого равна m) движутся навстречу друг другу, имея в некоторой системе отсчёта K равные скорости. То есть $v_{xA} = -v_{xB}$, $v_{yA} = -v_{yB}$. При столкновении тела объединяются в единое целое — слипаются. В соответствии с законом сохранения импульса образовавшееся тело должно покоиться. В частности, его координата y теперь должна быть неизменной. В любой другой системе K', события в которой связаны с событиями в системе K преобразованиями (3) — (4), координата y' тоже должна стать постоянной.

Рассмотрим ситуацию до столкновения в системе K'. Согласно формулам преобразования скоростей (7) получаем:

$$v'_{yB} = \frac{v_{yB}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{Vv_{xB}}{c^2}};$$

$$v'_{yA} = \frac{v_{yA}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1-\frac{Vv_{xA}}{c^2}} = -\frac{v_{yB}\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{1+\frac{Vv_{xB}}{c^2}}.$$

Модули y-составляющих скоростей теперь оказываются различными, и если мы попробуем сохранить классическое выражение для импульса, в частности $p_y = mv_y$, суммарная y-составляющая импульса двух частиц окажется не равной нулю. Тогда после слипания образовавшееся тело должно иметь отличную от нуля составляющую скорости по оси y.

Видимо, надо изменять выражение для импульса тела.

Для того чтобы догадаться, как именно его надо изменить, рассмотрим следующую процедуру. Установим на каждом из тел часы. Они будут показывать собственное время данного тела. Теперь будем фиксировать координату тела y в различных системах из набора, связанного соотношениями (3) — (4), и отмечать собственное время t_0, которое соответствует этому значению y. Запишем «гибридную» скорость $v_y^* = dy/dt_0$. Так как координата y не преобразуется при переходе от системы к системе, а время мы фиксируем по собственным часам тела, во всех системах мы должны получить одно и то же значение v_y^*. Мы знаем, что промежутки времени dt по часам системы, в которой тело движется, и промежутки dt_0, отсчитанные по собственным часам, связаны соотношением (6). Применительно к нашему случаю $dt_0 = dt/\gamma$.

Следовательно, во всех системах нашего набора величина $\gamma\, dy/dt = dy/dt_0$ будет иметь одно и то же значение.

Ясно, что равенство не нарушится, если обе его части умножить на одну и ту же величину m. Применительно к нашей задаче (о слипании двух тел) это означает, что комбинации $\gamma m v_y$ у двух частиц будут равными по модулю в любой системе отсчёта.

Естественно именно эту величину принять за y-составляющую импульса. Обобщая, определим релятивистский импульс выражением

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{8}$$

где $\boldsymbol{v}$ — скорость тела в той системе, в которой мы вычисляем импульс.

Опыт показывает, что определённый таким образом импульс обладает основными свойствами, присущими величине $m\boldsymbol{v}$ в механике Ньютона: он сохраняется в замкнутых системах тел, а скорость его изменения равна силе, действующей на тело.

Прежде чем перейти к определению связи ускорения тела с действующей на него силой, обратим внимание на два обстоятельства.

Во-первых, и в классической механике сила в общем случае равна не произведению массы на ускорение, а именно скорости изменения импульса.

Во-вторых, хотя в знаменателе (8) стоит квадрат модуля скорости, сама по себе скорость — величина векторная, и об этом нельзя забывать, в частности, при дифференцировании выражения для импульса. С учётом этих замечаний имеем:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \gamma m \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + m\boldsymbol{v}\frac{d\gamma}{dt} =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + m\boldsymbol{v}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}\right]\left(-\frac{2\boldsymbol{v}}{c^2}\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{F} = m\gamma\boldsymbol{a} + \frac{m}{c^2}\gamma^3\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{a}), \qquad (9)$$

где $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{v}/dt$.

Из этого выражения ясно, что в общем случае направление ускорения $\boldsymbol{a}$ не совпадает с направлением силы $\boldsymbol{F}$.

Умножив обе части равенства (9) скалярно на $\boldsymbol{v}$, после несложных преобразований получим

$$\boldsymbol{v}\boldsymbol{F} = m\gamma^3(\boldsymbol{v}\boldsymbol{a}).$$

Используя это соотношение, преобразуем (9) к виду

$$m\gamma\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}(\boldsymbol{v}\boldsymbol{F}). \qquad (10)$$

При записи связи силы и ускорения в такой форме наглядно видно, что ускорение в общем случае имеет две составляющие: по направлению силы и по направлению скорости (или противоположно этому направлению, если $\boldsymbol{v}\boldsymbol{F} > 0$). Направление ускорения совпадает с направлением силы только в двух частных случаях:

$$\boldsymbol{F} = m\gamma^3\boldsymbol{a}, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{F} \parallel \boldsymbol{v}; \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{F} = m\gamma\boldsymbol{a}, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{F} \perp \boldsymbol{v}. \qquad (12)$$

Ясно, что никакая частица конечной (ненулевой) массы ни при каком конечном импульсе силы ($\int F dt$) не может быть разогнана до скорости света. Скорость света является предельной скоростью для тел. Для систем отсчёта это можно было усмотреть уже из формул преобразований Лоренца (3) — (4) (см. также Приложение 3).

Для работы силы, то есть для изменения кинетической энергии тела, сохраняется выражение

$$dA = dK = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{S} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}dt.$$

Ограничиваясь случаем действия силы вдоль направления скорости, с учётом (11) получаем

$$dK = Fvdt = m\gamma^3 vadt = m\gamma^3 vdv.$$

Тогда для кинетической энергии имеем:

$$K = \int\limits_0^v \frac{m\, d(v^2)}{2(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}} = \int\limits_0^v -\frac{mc^2}{2}\frac{d\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} =$$

$$= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2. \qquad (13)$$

Выражение (13) трактуется так: энергия тела $E = \gamma m\, c^2$ слагается из кинетической энергии и энергии покоя $E_0 = m\, c^2$.

Закон сохранения энергии справедлив именно для величины E. Причём это верно как для упругих, так и для неупругих взаимодействий, когда потери кинетической энергии компенсируются ростом энергии покоя взаимодействующих частиц или энергией излучаемых при взаимодействии фотонов. В более общем случае, при рождении в процессе взаимодействия массивных частиц, необходимо, конечно, учитывать и кинетическую энергию, и энергию покоя всех частиц как до взаимодействия, так и после него.

Для энергии E с помощью формулы (8) можно получить соотношение

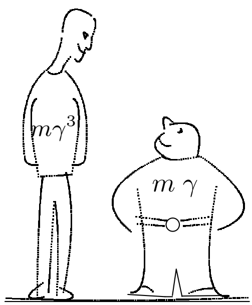
$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \qquad (14)$$

Связь импульса с энергией принимает вид

$$\boldsymbol{p} = \frac{E\boldsymbol{v}}{c^2}. \qquad (15)$$

Введя обозначения $M = mc^2$, $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{p}c$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}/c$, можем записать соотношения между массой, импульсом и энергией в несколько более компактной форме:

$$M^2 + P^2 = E^2; \quad \boldsymbol{P} = E\boldsymbol{\beta}; \quad \boldsymbol{P} = m\gamma\boldsymbol{\beta}c^2 = M\gamma\boldsymbol{\beta}.$$



Фактически эта форма соответствует неявному введению системы единиц, в которой $c = 1$, а масса, импульс и энергия измеряются в одинаковых единицах. Например, в атомной и ядерной физике в качестве такой универсальной единицы измерения массы, импульса и энергии обычно используется электронвольт: 1 эВ $= 1{,}6{\cdot}10^{-19}$ Дж $= 1{,}6{\cdot}10^{-12}$ эрг.

Кроме «массивных» частиц, а к таковым относятся в данном контексте все частицы с $m \neq 0$, существуют и частицы с нулевой массой. Среди таких безмассовых частиц:

кванты электромагнитного поля — фотоны; кванты гравитационного поля — гравитоны; вероятно, нейтрино. Что касается этих последних, есть подозрения, что малой (порядка 10 эВ) массой они обладают. Однако ясных доказательств «массивности» нейтрино пока нет, и во всех задачах при подсчёте энергии их массу следует принимать равной нулю (см., тем не менее, задачу 9).

Как нетрудно понять, безмассовые частицы всегда и в любой системе отсчёта движутся со скоростью света — иначе их импульс и энергия принимают нулевые значения. Очевидным образом для безмассовых частиц получаем $p = E/c$ (или $P = E$). В частности, у фотонов $E = h\nu$ и $p = h\nu/c$.

Формулы (8), (12), (15) выглядят полностью аналогичными соответствующим формулам механики Ньютона, если заменить массу частицы на «релятивистскую массу» $m_{\text{р}} = \gamma m$ и постулировать эквивалентность (взаимосвязь) массы и энергии: $E = m_{\text{р}} c^2$. При этом, конечно, нельзя забывать, что сила $\boldsymbol{F}$ не равна не только $m\boldsymbol{a}$, но и $m_{\text{р}}\boldsymbol{a}$, а только и исключительно $d\boldsymbol{p}/dt$, то есть $\frac{d(m_{\text{р}}\boldsymbol{v})}{dt} = \frac{d(\gamma m\boldsymbol{v})}{dt}$. Это обстоятельство особо подчёркивается формулами (9) — (11).

Заметим, что сразу после выявления зависимости ускорения тела (при фиксированном значении действующей на него силы) от скорости или, что то же, от энергии, имели хождение понятия «поперечная масса» — $m\gamma$ и «продольная масса» — $m\gamma^3$ (см., кроме того, Приложение 4).

Проще всего ситуация выглядит в том случае, когда сила все время перпендикулярна скорости. В этом случае энергия не меняется, а значит, релятивистский множитель γ постоянен.

Задача 5. В опытах 1974 г., проведённых в ЦЕРНе, мюоны, скорость которых отличалась от скорости света на 1/3 процента, удерживались на круговой орбите магнитным полем $B = 85$ кГс.

Определите радиус орбиты; сравните его значение с тем, которое должно получиться, если пользоваться формулами классической механики.

Рассчитайте среднее число оборотов, которое совершит до распада «новорожденный» мюон.

Заряд мюона равен элементарному заряду, т.е. $e = 4{,}8{\cdot}10^{-10}$ ед. СГСЕ, масса $M = 105{,}7$ МэВ, время жизни $\tau_0 = 2{,}2{\cdot}10^{-6}$ с.

▼ По Ньютону магнитная сила evB/c должна быть равна mv^2/R, отсюда $R = mvc/eB = M/eB = 41{,}45$ см.

В релятивистском расчёте надо заменить m на $m_{\text{р}} = \gamma m$. Т.к. v близко к c, можно считать,что

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2-v^2}{c^2}}} = \sqrt{\frac{c^2}{(c+v)(c-v)}} \simeq \sqrt{\frac{c}{2(c-v)}} = 12{,}25,$$

отсюда $R = 5{,}08$ м.

По Ньютону время одного оборота $T = 2\pi R/v$, значит, число оборотов $N = c\tau_0/2\pi R \simeq 250$. «Релятивистский радиус» орбиты больше классического в γ раз, но и время жизни мюона в лабораторной системы отсчёта возрастает в γ раз. «С точки зрения мюона» в γ раз сокращается длина окружности циклотрона. Так или иначе, число оборотов, конечно, не меняется. ▲

Комбинация $E^2 - P^2 = M^2$ очевидным образом является инвариантом (не зависит от системы отсчёта) для отдельно взятой частицы. Менее очевидно, что такая комбинация — инвариант и для совокупности частиц (словосочетание «совокупность частиц» вместо привычного «система частиц» иногда удобно употреблять во избежание путаницы с системами отсчёта). Доказательство этого утверждения не представляет особых трудностей, но достаточно громоздко. Между тем, обратим внимание на тот факт, что все тела состоят из движущихся относительно друг друга (хотя бы в процессе колебаний) атомов, атомы — из ядра и электронов, даже какие-нибудь протоны или пионы — из кварков (и антикварков). А по отношению к этим, строго говоря, системам или совокупностям частиц мы без малейшего сомнения уверены в инвариантности величины $E^2 - P^2$.

Использование этого обстоятельства помогает упростить решение многих задач (см. также Приложение 5).

Задача 6. (см. 8.59 [6]) При соударении достаточно энергичных протонов может идти реакция рождения протон-антипротонной пары

$$p + p \to p + p + p + \bar{p}.$$

Определите на этом примере выигрыш от использования реакции на встречных пучках.

▼ Если осуществляется реакция на встречных пучках, когда лабораторная система является системой центра инерции (СЦИ), т.е. системой, в которой суммарный импульс частиц равен нулю, вся кинетическая энергия протонов может пойти на энергию покоя пары, т.е. протоны должны быть разогнаны до энергии $K_0 = M$.

Если же разогнанный на ускорителе протон сталкивается с неподвижным, требуется значительно бóльшая кинетическая энергия. Наиболее выгоден случай, когда продукты реакции движутся вместе, что очевидно, если мысленно пересесть в СЦИ (т.е. вернуться к варианту на встречных пучках). В СЦИ инвариант $E^2 - P^2$ равен $16M^2$ ($M_\Sigma = 4M$, $P_\Sigma = 0$).

Инвариант должен иметь это же значение и в лабораторной системе. Но таким же он должен быть и до соударения, когда один из протонов покоился, а второй имел энергию K и импульс

$$P = \sqrt{E^2 - M^2} = \sqrt{(K+M)^2 - M^2} = \sqrt{K(2M+K)}.$$

Получаем $16M^2 = (2M+K)^2 - P^2$, откуда $K = 6M = 6K_0$. ▲

Если одна из частиц, участвующих в реакции, безмассовая, не забудем, что для неё $E = P$.

Задача 7. (8.46 [6]) В 1984 г. была обнаружена новая кси-частица (ξ) как продукт распада покоящейся ипсилон-частицы (Υ) в реакции $\Upsilon \to \xi + \gamma$, причём энергия γ-кванта оказалась равной $E = 1{,}072$ ГэВ. Найти массу и скорость ξ-частицы, если масса покоя Υ-частицы равна $M = mc^2 = 9{,}46$ ГэВ.

▼ Согласно закону сохранения энергии $E_\xi = M - E$. Т.к. ипсилон-частица покоилась, импульс кси-частицы P_ξ равен импульсу кванта, т.е. E. Значит, $M_\xi^2 = E_\xi^2 - P_\xi^2 = (M-E)^2 - E^2$, откуда $M_\xi = \sqrt{M(M-2E)} = 8{,}32$ ГэВ. Из (15) следует, что

$$\beta = \frac{P_\xi}{E_\xi} = \frac{E}{M-E} = 0{,}13 \quad (\text{т.е. } v = 0{,}13c).$$

▲

В некоторых случаях можно не учитывать массу частиц, т.е. их энергию покоя. В таких обстоятельствах частицы обычно принято называть *ультрарелятивистскими*.

Задача 8. В 1974 г. была открыта новая элементарная частица, названная чармонием или джей/пси-частицей (J/ψ). В одном из опытов были зарегистрированы продукты её распада «на лету»: $J/\psi \to e^- + e^+$. Найти массу и скорость чармония, если энергии электрона и позитрона были равны $E = 3{,}1$ ГэВ каждая, а угол разлёта частиц составил $\theta = 60°$.

▼ Энергия покоя электрона равна 0,51 МэВ $= 1{,}65 \cdot 10^{-4} E$. Частицы явно ультрарелятивистские. Но тогда импульс каждой из них можно считать равным E, и значит, суммарный импульс, т.е. импульс J/ψ-частицы, равен $P = \sqrt{2E^2[1 - \cos(\pi - \theta)]} = E\sqrt{3}$. Её энергия составляет $2E$, масса $M = E = 3{,}1$ ГэВ. Скорость $\beta = \sqrt{3}/2 = 0{,}866$ ($v = 0{,}866c$). ▲

Вопрос о том, можно ли пренебречь массой ультрарелятивистской частицы, должен решаться, конечно, в зависимости от конкретной задачи.

В следующем примере этого делать, безусловно, нельзя.

Задача 9. (см. 8.23 [6]) Вспышка сверхновой звезды в Большом Магеллановом облаке 23.02.1987 г. сопровождалась на Земле нейтринным «всплеском», а также сигналом гравитационной антенны. По утверждению газеты «Известия» (11.03.1987 г.) запаздывание нейтрино по отношению к гравитационной волне составило $\Delta t = 0{,}1$ с, откуда должно следовать, что нейтрино обладают отличной от нуля массой. Принимая интерпретацию газеты, оцените массу нейтрино.

Расстояние до сверхновой звезды — 180 тыс. св. лет; типичное значение энергии нейтрино, образующихся при вспышке — около 12 МэВ.

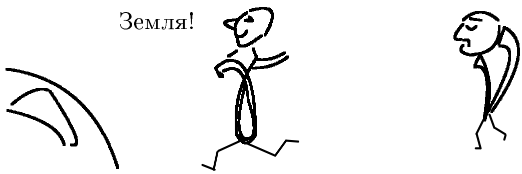
▼ Относительное отставание нейтрино от гравитационных волн, которые распространяются со скоростью света, составляет

$$\frac{\Delta t}{t} = \frac{0{,}1\ c}{1{,}8\cdot 10^5\ \text{лет}} = 1{,}76\cdot 10^{-14} = \frac{c-v}{c}.$$

Отсюда для массы имеем (сравните с решением задачи 5):

$$M = \frac{E}{\gamma} = E\sqrt{\frac{2(c-v)}{c}} = 1{,}6\ \text{эВ}. \qquad ▲$$

NB! К информации газеты нельзя относиться серьёзно. Вызывает большое сомнение фиксация различия моментов времени двух событий независимыми измерительными системами с точностью 0,1 с; да и сам факт регистрации гравитационных волн не вызывает доверия.



ПРИЛОЖЕНИЯ

1. До Эйнштейна

Перед механикой к концу прошлого века стояло фактически одно затруднение — объяснение смещения (прецессии) перигелия Меркурия. Перигелий смещается на 574″ в столетие (угловая секунда в столетие — традиционная единица в астрономии). Возмущениями со стороны других планет удалось объяснить 531″, а 43″ никак не поддавались. В конечном итоге полное количественное объяснение эффекта дала Общая теория относительности (ОТО) — Эйнштейнова теория тяготения. Но к созданию как СТО, так и ОТО поиски объяснений странного поведения орбиты Меркурия практически не имели отношения.

Гораздо более серьёзные затруднения испытывала оптика.

Победившая благодаря трудам Т. Юнга (1802) и О. Френеля (1815–1823) волновая теория света привела к представлению о светоносной среде — эфире, заполняющем пространство. Исходно эфир мыслился неподвижным в абсолютном пространстве веществом, в котором подобно упругим волнам (например, звуковым) распространяется свет.

Дальнейший анализ привёл к идеям о частичном (Френель, 1820) или полном (Дж. Стокс, 1845) «увлечении» эфира движущимися в нём телами. Обе гипотезы, объясняя ряд явлений, приводили к противоречиям при анализе других.

После выяснения электромагнитной природы света (теоретически — Дж. Максвелл, 1865, первые экспериментальные аргументы — Г. Герц, 1889) вопрос о свойствах и поведении эфира приобрёл новый оборот.

Представлялась совершенно естественной (можно сказать — очевидно справедливой) гипотеза инвариантности основных уравнений электродинамики — уравнений Максвелла, хотя бы потому, что он получил их не в абсолютной системе отсчёта, а в «случайно» доставшейся ему системе, связанной с Землёй. Кроме того, экспериментально была доказана независимость скорости света от движения источника (или приёмника), фактически её ***инвариантность***, т.е. независимость от системы отсчёта (решающими здесь были эксперименты А. Майкельсона и Э. Морли, 1887). Оба эти факта не согласовывались с преобразованиями Галилея.

Возрожденная Герцем (1893) гипотеза полного увлечения эфира, согласуясь с результатами Майкельсона, прямо противоречила результатам опытов А. Физо (1851) по распространению света в движущейся среде: Физо получил хорошее согласие с теорией частичного увлечения эфира.

Начались поиски альтернативы преобразованиям Галилея.

Первым шаги в этом направлении сделал, по-видимому, О. Хевисайд, но он свои результаты не опубликовал. В 1887 г. В. Фохт опубликовал работу, в которой были приведены соотношения, связывающие координаты и время в различных системах, позже, по предложению А. Пуанкаре, названные преобразованиями Лоренца. Работа Фохта осталась незамеченной. Дж. Фитцджеральд (1892) предложил гипотезу сокращения размеров движущихся тел (лоренцово сокращение длин). Наконец, в 1900 г. Дж. Лармор выписал преобразования Лоренца.

Сам Г.А. Лоренц в 1899 г. предложил преобразования, несколько отличающиеся от формы Фохта–Лармора. Однако к 1903 г. он не только «исправил» их, но и создал на их основе свою так называемую «электронную теорию». Преобразования из инструмента объяснения опыта Майкельсона стали инструментом физики в целом. К 1904 г. Пуанкаре в основном завершил создание математического аппарата СТО и его обоснование.

Чего же недоставало для завершения теории, или что было лишним? Зачем понадобился Эйнштейн?

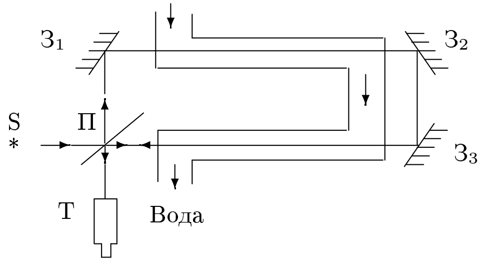
Лишними были Ньютоновы абсолютное пространство и абсолютное время. До Эйнштейна считали, что именно там идут «в действительности» процессы, которые с помощью преобразований Лоренца пересчитываются на любую инерциальную систему отсчёта, т.е. на любую систему, движущуюся с постоянной скоростью относительно абсолютного пространства. Так, Пуанкаре чуть раньше Эйнштейна провозгласил общий (не только механический) принцип относительности именно как невозможность обнаружения движения относительно эфира, существование которого, таким образом, всё же, вроде бы не отрицалось.

И только Эйнштейн, «изгнав эфир», установил действительное равноправие всех инерциальных систем. Эйнштейн разработал логически последовательную процедуру измерения расстояний и промежутков времени, несовместимую с Ньютоновыми абсолютными пространством и временем.

В общем, можно сказать, что Эйнштейн внедрил в науку новую, неньютоновскую, релятивистскую «идеологию», существенно изменив сам характер научного мышления.

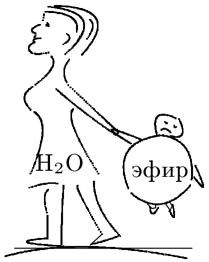
Основные экспериментальные основания СТО относятся к оптике. Так, опыты Физо и Майкельсона–Морли сводятся к наблюдению смещения интерференционной картины.

1) Опыт Физо. Свет от источника S проходит через интерферометр, состоящий из полупрозрачной пластины П и трёх зеркал $З_1$, $З_2$, $З_3$. Часть пути занимает трубка, заполненная водой. Интерференционная картина наблюдается в зрительную



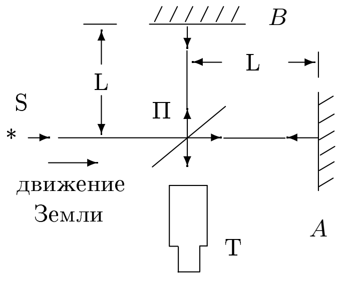
трубу Т. Если вода приводится в движение, луч, обходящий интерферометр по часовой стрелке ($S - \text{П} - \text{З}_1 - \text{З}_2 - \text{З}_3 - \text{П} - \text{Т}$), часть пути проходит по направлению течения воды; второй луч, обходящий интерферометр против часовой стрелки ($S - \text{П} - \text{З}_3 - \text{З}_2 - \text{З}_1 - \text{П} - \text{Т}$), этот же участок идёт против течения.

Если эфир увлекается водой, оптические длины путей для двух лучей меняются в разные стороны: для первого путь уменьшается, для второго — возрастает. Интерференционная картина, наблюдаемая в зрительной трубе Т, должна смещаться.



Смещение картины действительно наблюдалось, однако величина этого смещения в два с небольшим раза меньше, чем рассчитанная в предположении полного увлечения эфира. Это прекрасно согласуется с Френелевой теорией частичного увлечения, согласно которой коэффициент увлечения (отношение скорости эфира к скорости увлекающего тела, т.е. к скорости воды) должен составлять $1 - 1/n^2$, т.е. 0,4375 (для воды $n = 4/3$).

2) Опыт Майкельсона–Морли. Электронная теория Лоренца давала для коэффициента увлечения то же, что и теория Френеля, рассматривавшего свет как упругие волны. Так как показатель преломления воздуха мало отличается от единицы, при движении Земли эфир практически не должен увлекаться атмосферой. Таким образом, должен ощущаться «эфирный ветер». Обнаружение этого «ветра» и было задачей опыта Майкельсона–Морли.



Задача осложнялась тем, что эффект можно обнаружить только во втором порядке по отношению скорости Земли к скорости света.

В интерферометре Майкельсона свет, идущий по пути вдоль направления движения Земли (например, в некоторый момент это может быть луч П-А-П), проходит путь «туда» со скоростью $c - v$ относительно интерферометра, а путь обратно — со скоростью $c+v$, где v — скорость Земли относительно эфира (около 30 км/с). Общее время:

$$T_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2} \simeq \frac{2L}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Для луча, проходящего путь П-В-П, в это время скорость равна скорости света c. Однако надо учесть, что за время путешествия луча от П к В и обратно полупрозрачная пластина П сместится вместе с Землёй относительно эфира на расстояние vT_2. Значит, путь света окажется равным $\sqrt{(2L)^2 + (vT_2)^2}$, и мы получим время

$$T_2 = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \simeq \frac{2L}{c} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2}\right).$$

Разность времён, таким образом, равна $\frac{L}{c}\left(\frac{v}{c}\right)^2$. После поворота на 90° лучи A и B менялись ролями. Картина должна была смещаться.

Майкельсон мог обнаружить смещение порядка 0,01 полосы. Первые опыты (1881) он ставил на приборе, где ожидаемое смещение должно было составить 0,04 полосы. Опыты 1887 г. ставились на приборе, имевшем базу побольше, так что смещение ожидалось в 0,37 полосы. Наконец, опыты Морли и Миллера (1905) должны были дать смещение 1,1 полосы. Во всех случаях смещение (с точностью до 0,01 полосы) не было замечено.

В рамках теории эфира это свидетельствовало о полном увлечении эфира земной атмосферой, что входило в явное противоречие с данными опыта Физо.

Можно сказать, последняя попытка «спасения эфира» была предпринята В. Ритцем, объяснявшим отрицательный результат Майкельсона с помощью так называемой *«баллистической гипотезы»*. Если скорость света складывается из величины c и скорости источника, опыт Майкельсона должен дать нулевой результат при неподвижном эфире. Однако, как первым сразу же указал В. де Ситтер, в таком случае должны были бы наблюдаться серьёзные отклонения от законов Кеплера в видимом движении в системах двойных звёзд.

2. «Истинные близнецы»

Процессы, которые протекают в системах, движущихся (относительно инерциальных) с ускорением, рассматриваются Общей теорией относительности. Однако некоторые вопросы при определённых ограничениях можно пояснить, развивая идеи СТО.

Пусть система K' «стартует» из положения, в котором начало её координат совпадает с началом координат системы K, в момент времени $t = t' = 0$ с ускорением a. Тогда на расстоянии $x = v^2/2a$ скорость изменения показания часов t_0 (ход времени) системы K и скорость изменения времени t по часам неподвижной системы K' связаны соотношением

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - 2ax/c^2}}. \tag{16}$$

Здесь уместны два замечания.

З а м е ч а н и е 1 (не относящееся к делу). Формула (16) в силу провозглашаемой ОТО эквивалентности сил тяготения и сил инерции справедлива также и в однородном поле тяжести напряжённости g (т.е. в поле, где ускорение свободного падения равно g). Вернее обратное утверждение: в ОТО первична именно зависимость хода часов от поля тяготения, а формула (16) получена переносом свойств поля тяготения на поле сил инерции.

Если ввести потенциал поля тяготения $\varphi = -\int g\,dx$ или поля сил инерции $\varphi = \int a\,dx$, можно записать несколько более общую формулу:

$$dt = dt_0\sqrt{1 - 2\Delta\varphi/c^2}. \tag{17}$$

З а м е ч а н и е 2. Надо проявлять сугубую осторожность при использовании формул (16) — (17). Более или менее уверенно можно применять их только при выполнении условия $\Delta\varphi \ll c^2$. Вообще же говоря, поле тяжести ОТО принципиально отличается от Ньютонова (см. также Приложение 4).

Не забывая об этих обстоятельствах, разберёмся с близнецами.

Пусть космонавт совершает перелёт с постоянной на протяжении почти всего путешествия скоростью v. Тогда (если $v \ll c$) на пути L, т.е. за время $T = L/v$, его часы отстанут на $\Delta T = T - T\sqrt{1 - v^2/c^2} \simeq Tv^2/2c^2$. Ещё на такую же величину возрастёт отставание на обратном пути, и всего мы получим разницу времени, равную Lv/c^2.

Эти рассуждения проведены с точки зрения домоседа. По мнению путешественника, такое же время «экономит» домосед.

Однако в процессе полёта должен наличествовать участок пути, на котором космонавт меняет скорость с v на $-v$. Пусть он этот участок проходит с постоянным ускорением a. С точки зрения земного наблюдателя в этот промежуток времени часы путешественника идут в согласии с формулой $dt_0 = dt/\gamma$, и если время разворота невелико, возраст космонавта практически не изменится, космонавт останется моложе домоседа.

Что же в это время наблюдает в своей системе космонавт?

Напомним, что пока, по нашим расчётам, в его системе моложе брат, который сидит дома. Однако во время разворота в связанной с кораблём системе координат, которая становится на время τ ускоренной, включается поле сил инерции. Часы находящегося в этом поле домоседа идут быстрее часов космонавта. За время τ скорость меняется на $2v$, значит, ускорение равно $a = 2v/\tau$, а расстояние до Земли, как мы помним, равно $L = vT$. Значит, за время разворота домосед успеет постареть на

$$\Delta\tau = \tau - \tau\sqrt{1 - \frac{2aL}{c^2}} \simeq \tau\frac{aL}{c^2} = \frac{2Lv}{c^2}.$$

В результате при встрече, независимо от того, в какой системе мы ведём рассуждения, старше будет именно домосед, и разность возрастов составит Lv/c^2, как мы и получили в первом варианте расчёта (в земной системе отсчёта).

Расхождение за время разгона при старте и за время торможения при возвращении на Землю роли не играют ввиду малости расстояния x, входящего в формулу (16).

Конечно, для того чтобы правильными (в первом порядке по v^2/c^2) получились не только разность возрастов близнецов, но и сами возрасты, надо учесть, что с точки зрения космонавта длина его пути равна L/γ.

Вернёмся к замечанию 1, конкретно, к вопросу о влиянии поля тяжести на ход часов.

Задача 10. В 1976 г. группа физиков Мерилендского университета в течение 15 часов возила атомные часы на самолёте, курсировавшем на высоте 10 км со скоростью 550 км/час.

Насколько и в какую сторону отличалось показание летавших часов от показания часов в лаборатории в конце опыта?

▼ За счёт гравитационного эффекта часы должны были уйти вперёд на величину $\Delta t_1 = t(gh/c^2) = 1{,}1\cdot 10^{-12}\,t = 6\cdot 10^{-8}$ с $= 60$ нс. Эффект замедления хода движущихся часов должен дать $\Delta t_2 = -t(v^2/2c^2) = -1{,}3\cdot 10^{-13}\,t = -7$ нс.

В итоге часы должны были уйти вперёд на 53 нс, что и было зафиксировано в эксперименте с точностью около 1,5%. ▲

Отметим, что при такой точности измерений (погрешность относительно полного времени порядка 10^{-14} — триллионная доля процента!) лабораторную систему отсчёта нельзя считать «достаточно инерциальной». Однако неинерциальность, связанная с вращением Земли, одинаково сказывается на часах лаборатории и часах самолёта.

Что касается поля тяготения Солнца, то оно вообще «выключено» благодаря тому, что Земля (а с нею и лаборатория, и самолёт) «свободно падает» в этом поле, и его компенсирует поле соответствующих сил инерции.

3. Несколько способов «наблюдения» скорости, превышающей скорость света в пустоте

1) Зайчик. Никакого противоречия со СТО в том, что солнечный зайчик или нечто подобное имеет скорость выше c, конечно, нет.

Допустим, луч пульсара «чиркает» по планете в системе τ Кита за миллисекунду до того, как он попадёт на Землю. Уже через миллисекунду после события, случившегося на τ Кита, на расстоянии 11,8 св. года, мы вроде бы получили информацию о нём.

Но, строго говоря, мы имеем право сказать только следующее: хорошо изучив поведение данного пульсара и зная, что в последнее время с ним ничего чрезвычайного не произошло (тому свидетельство — очередное прохождение луча через Землю), мы уверены, что миллисекунду тому назад этот луч прошёл по τ Кита. Как физический факт, это прохождение состоялось. Но «юридическим фактом» оно станет лишь через 11,8 года, когда мы получим телеграмму от таукитян.

Отметим два обстоятельства. Во-первых, на τ Кита и на Землю пришли разные фотоны от пульсара, нет никакого объекта, никакого тела, которое переместилось за миллисекунду с τ Кита к Земле. Во-вторых, в конце концов, могло случиться, что как раз в «нужный» момент на τ Кита произошло затмение пульсара, его загородило какое-то небесное тело, и мы через 12 лет получим не подтверждение нашей догадки, а опровержение.

2) Линейные скорости звёзд. В системе отсчёта, связанной с вращающейся вокруг своей оси Землёй, скорости звёзд (тем более — других галактик) превышают c. Но эта система неинерциальная, а такие системы СТО не рассматривает.

3) Две частицы, расстояние между которыми в некоторый момент времени составляет 1,6 св. секунды, летят навстречу друг другу со скоростью 0,8c каждая. Через какое время они встретятся?

Конечно, они встретятся через одну секунду, и скорость их сближения, т.е. скорость уменьшения расстояния между ними, в лабораторной системе отсчёта равна $1{,}6c$.

Заметим, что с этим «эффектом» мы уже встречались в задаче 1: Ваня и Федя за 10 лет сблизились на 15 световых лет.

Но это не есть скорость какого-либо тела в какой-либо системе отсчёта, это не есть скорость одной частицы относительно другой в смысле СТО. Надо пересесть в систему, связанную с одной из частиц, и скорость второй получится равной (здесь V берётся по модулю):

$$v = \frac{V+V}{1+\frac{V^2}{c^2}} = 0{,}9756c.$$

А вот расчёт времени в новой системе требует сугубой аккуратности. Тут надо не забыть три фактора:

а) расстояние между частицами (между пунктами, которые они пролетают одновременно в лабораторной системе отсчёта) меняется;

б) время течёт иначе;

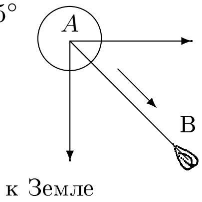
и обязательно —

в) в новой системе частицы неодновременно пролетают эти самые пункты, расстояние между которыми равно 1,6 св. с (в лабораторной системе (!) — см. пункт а).

Впрочем, можно это сделать проще (см. задачу 12).

4) Выбросы звёзд в некоторых случаях «по прямым измерениям» имеют скорости больше c. Расстояние до звезды известно; замерили угловую скорость движения выброса, помножили на расстояние — больше c!

Тут, можно сказать, чистая геометрия. Ни СТО, ни даже физика вообще — ни при чем.



Например, направление выброса составляет угол 45° с направлением на Землю, а скорость выброса — $0{,}8c$ (см. рис.). Тогда за секунду смещение «вбок» составит $0{,}8/\sqrt{2} = 0{,}57$ св. с, но ровно на такое же расстояние выброс будет ближе к Земле, и сигнал из точки B придёт на Землю не через секунду после прихода сигнала из точки A, а уже через 0,43 с. Отсюда получим «скорость» — 0,57 св. с/0,43 с $= 1{,}33c$!

Оптические примеры более уместны в четвёртом семестре, но для их понимания школьных знаний вполне достаточно.

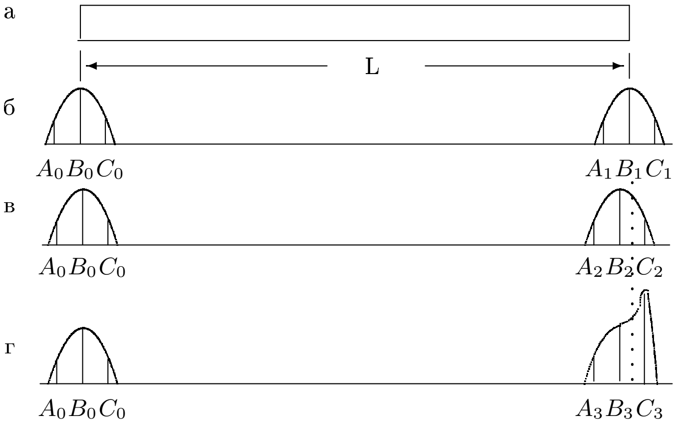
5) Фазовая скорость. Тут достаточно провозглашения факта, что это не есть скорость переноса материальных объектов.

Скорость передачи сигнала — групповая скорость. В поглощающей или усиливающей среде она тоже может превышать скорость света в пустоте. Тем не менее противоречия с теорией относительности и в этом случае нет.

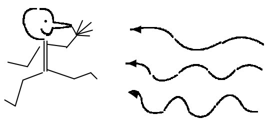
6) Импульс в усиливающей среде. Некоторая совокупность фотонов входит в трубку (рис. а), заполненную усиливающей средой, и выходит из другого конца трубки.

Через время L/c положение импульса в пустой трубке изображено справа на рис. б. Если среда имеет показатель преломления $n > 1$, но не усиливает, т.е. просто скорость света в среде меньше c, получим рис. в.

А теперь среда усиливает, но быстро насыщается, т.е. после усиления некоторой порции излучения среда истощается и перестаёт усиливать. Получим рис. г, и если, как это обычно делается, прохождение импульса фиксируется по прохождению области наибольшей концентрации излучения (что соответствует определению групповой скорости), может быть получена скорость, превышающая скорость света в пустоте. Однако и в этом случае никакой материальный объект не имеет скорости, большей, чем c. Образно говоря, фотоны, занимающие в момент времени $t_0 = 0$ области A_0, B_0, C_0, на рис. б переместились на расстояние L, и в момент $t = L/c$ занимают соответственно положения A_1,B_1,C_1. На рис. в фотоны занимают положения A_2,B_2,C_2, т.е. они прошли расстояние, меньшее L, их скорость меньше, чем c. На рис. г соответствующие порции занимают положения A_3,B_3,C_3, но фотоны порции C «обросли» добавочными фотонами и кажутся «исполняющими обязанности» фотонов порции B.



Наконец, нельзя не упомянуть



7) Тахионы, хотя бы потому, что о них упоминается в некоторых школьных учебниках, не говоря уже о популярной литературе, причём зачастую представления о них излагаются весьма некорректно.

Действительно, чисто формально СТО только устанавливает границу — скорость света в пустоте — «её же не перейдеши». Существование частиц, *всегда* движущихся быстрее света, она не запрещает.

Тут, правда, возникают мнимые массы, движение вспять во времени и некоторые иные экзотические свойства. По-видимому, достаточно непротиворечива лишь гипотеза тахионов, не взаимодействующих с обычным веществом, а тогда невозможно ни доказать, ни опровергнуть их существование. Впрочем, гипотезы, которые нельзя опровергнуть, обычно не считаются научными.

4. О двух массах

Нехорошо вводить понятие массы тела $M = m/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, для которого нельзя дать ясного определения.
Лучше не вводить никакой другой массы, кроме «массы покоя» m.

А. Эйнштейн, 1948 г.

Подробно понятие массы в релятивистской физике проанализировано в статье Л.Б. Окуня [11], и желающим ознакомиться с вопросом в полном объёме следует обратиться к этой статье.

Если отвлечься от эмоционально-эстетической стороны дела (которую нельзя считать не имеющей значения), основные аргументы Окуня имеют в первую очередь педагогический характер.

Подчёркивание того факта, что импульс можно записать как $m_{\mathrm{p}}v$, вызывает у обучающихся неудержимое желание считать универсальным соотношение $\boldsymbol{F} = m_{\mathrm{p}}\boldsymbol{a}$.

Возникает путаница с употреблением слова «масса»: масса покоя, масса движения, она же «релятивистская масса», а встречаются ещё и продольная и поперечная массы.

Усугубляются сложности, связанные с неаддитивностью массы («массы покоя»). Например, два одинаковых фотона, энергии E каждый, разлетаются в противоположные стороны. Импульс равен нулю, суммарная масса фотонов $M = 2E$. Это что? Релятивистская масса, масса движения или масса покоя, которой нет у отдельного фотона?

Наиболее неприятно, что релятивистскую массу часто трактуют как полный эквивалент гравитационной массы. Между тем, согласно ОТО сила, действующая на тело в гравитационном поле, сама зависит от величины и направления скорости тела.

Так, в квазиньютоновском случае, когда в поле неподвижного тела массы M движется частица, имеющая энергию E, на неё действует сила

$$\boldsymbol{F} = -GM\frac{E}{c^2}[(1+\beta^2)\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}]r^{-3}.$$

Если вспомнить формулу (10), нетрудно понять, что вторая составляющая силы вызовет ускорение, направленное по скорости, зато первая составляющая в общем случае и создаёт радиальное ускорение, и даёт вклад в ускорение, направленное по скорости. Эта сложная ситуация отражает тензорный характер гравитационного поля и не поддаётся истолкованию с точки зрения наличия у частицы универсальной, независимой от направления скорости, гравитационной массы. Для безмассовой частицы (например, для фотона) сила в двух простейших случаях равна

$$F = \begin{cases} GME/c^2r^2 & \text{при } \boldsymbol{r} \parallel \boldsymbol{\beta}; \\ 2GME/c^2r^2 & \text{при } \boldsymbol{r} \perp \boldsymbol{\beta}. \end{cases}$$

Если трактовать эти выражения как произведение гравитационной массы фотона на множитель GM/r^2, то масса в одном случае равна E/c^2, а в другом — $2E/c^2$ (!).

Понятие «релятивистская масса» уже много лет не употребляется в научных работах, не встречается оно также в учебной литературе по теоретической физике, например, в известном курсе Ландау [10].

В учебниках общего курса физики это понятие продолжает широко использоваться, хотя регулярно встречаются характерные оговорки.

В «Фейнмановских лекциях по физике» [2] изложение опирается на зависимость массы от скорости и тем не менее отмечается, что «формула $m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ очень редко употребляется. Вместо этого незаменимыми оказываются два соотношения» — далее следуют формулы (14) и (15) по нашей нумерации.

Большое внимание уделено «релятивистской массе» и эквивалентности массы и энергии в книге Киттеля [3]. Между тем, на с. 404 читаем: «Вместо уравнения (9) [т.е. вместо $M(v) = M\gamma$] ниже будет приведено другое уравнение, ... которое проще применять.»

В курсе Сивухина [1] релятивистская масса упоминается, но в идейно связанном с учебником задачнике под ред. Яковлева [5], одним из авторов которого является Сивухин, хотя и употребляются синонимично просто «масса» без эпитетов и «масса покоя», специально оговорено, что «никакой другой массы ни в формулировках задач, ни в решениях не встречается».

Видимо, всё же Эйнштейн прав, и «лучше не вводить никакой другой массы, кроме «массы покоя» m».

5. Интервал, четырёхвекторы и геометризация физики

Инвариантность интервала между событиями, очевидно, означает, что величина s^2, в частности, не может изменять знак при переходе из одной системы в другую. Это делит множество значений интервалов на два существенно отличающихся класса.

Ограничимся координатами x и t (переход к 4 координатам очевиден). Если $s^2 = c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0$, мы подходящим выбором системы отсчёта можем «привести» два события к одному моменту времени: в такой системе $(s')^2 = -(\Delta x')^2 < 0$. Понятно, что такие события не могут быть связаны причинно-следственной связью. Во-первых, во второй системе они происходят одновременно в разных точках пространства, и, значит, сигнал о некоем событии должен достичь места, где совершается его следствие, мгновенно. Во-вторых, в этом случае можно найти систему, где раньше совершается событие A, но можно найти и систему, где событие B ему предшествует. Такие интервалы называют ***пространственноподобными***.

В случае $s^2 > 0$, наоборот, события можно свести к одному месту, где они происходят в разные моменты времени. Это, в частности, означает, что одно из них может быть следствием другого. Ясно, что в этом случае события невозможно «переставить» во времени; в любой системе координат событие A произойдёт раньше, чем B, если именно оно произошло раньше хотя бы в одной из систем. Такие интервалы называют ***времениподобными*** (или ***временноподобными***).

Приведём два примера, когда использование понятия интервала позволяет существенно упростить решение задач.

Задача 11. Стержень пролетает с большой скоростью мимо метки, расположенной в лабораторной системе отсчёта K. Известно, что время прохождения стержня мимо метки равно $\Delta t = 3$ нс по часам системы K и $\Delta t' = 5$ нс по часам системы K', связанной со стержнем. Определите собственную длину стержня (т.е. его длину в системе K').

▼ Рассмотрим два события — совмещение с меткой переднего и заднего концов стержня — в двух системах координат.

В системе K эти события происходят в одной точке, и интервал между ними определяется равенством $s^2 = (c\Delta t)^2$. В системе K' расстояние между точками, в которых происходят эти события, как раз и есть собственная длина стержня, т.е. $(s')^2 = (c\Delta t')^2 - (l_0)^2$.

В силу инвариантности интервала $s^2 = (s')^2$. И окончательно получаем $l_0 = \left[(c\Delta t')^2 - (c\Delta t)^2\right]^{1/2} = 4$ св. нс $= 1{,}2$ м. ▲

Задача 12. Вспомним частицы, летящие навстречу друг другу со скоростями $0{,}8c$ каждая относительно Земли (Приложение 3, пример 3). В некоторый момент времени они находились над пунктами A и B, расстояние между которыми (в лабораторной системе) составляло $l = 1{,}6$ св. с, и встретились они через время $\Delta t = 1$ с — по часам лабораторной системы.

Через какое время после пролёта, к примеру, над точкой A соответствующая частица встретится с другой — по своим часам?

▼ В лабораторной системе расстояние от точки A до места встречи — $l/2$, промежуток времени между событиями — Δt. В системе отсчёта, связанной с частицей, события — прохождение точки A и встреча частиц — одноместны. Из инвариантности интервала немедленно получаем искомое время:

$$\Delta t_0 = \frac{\sqrt{c^2t^2 - l^2/4}}{c} = 0{,}6 \text{ с.}$$

То же самое, конечно, получается и из соотношения между «лабораторным» и собственным временами: $t_0 = t/\gamma$. ▲

Если выписать преобразования импульса и энергии

$$p'_x = \Gamma(p_x - VE/c^2), \qquad p'_y = p_y, \qquad p'_z = p_z, \qquad E' = \Gamma(E - Vp_x),$$

нетрудно увидеть полную аналогию с преобразованиями для координат и времени при сопоставлении:

$$x \to p_x, \qquad y \to p_y, \qquad z \to p_z, \qquad t \to \frac{E}{c^2} \qquad (\text{или } ict \to i\frac{E}{c}).$$

Такие, преобразуемые «по Лоренцу», комбинации имеют общее название — *четырёхвекторы* (только что мы выписали 4-вектор импульса-энергии или 4-импульс). Очевидным аналогом интервала, инвариантом для данного 4-вектора служит величина mc:

$$(mc)^2 = -\sum_{i=1}^{4} p_i^2,$$

где p_i — p_x, p_y, p_z, iE/c.

Подобным образом вводятся также 4-векторы скорости, ускорения, силы. Использование 4-векторного формализма может заметно облегчить решение многих задач, в особенности достаточно громоздких.

Так, используя приведённые чуть выше преобразования для 4-импульса, совсем нетрудно показать инвариантность величины $E^2 - P^2$ для системы, состоящей из двух частиц, движущихся параллельно оси x (и параллельно x', конечно).

Пусть импульсы (P_x) и энергии частиц (E) равны соответственно P_1, P_2 и E_1, E_2. В системе K инвариант равен $(E_1 + E_2)^2 - (P_1 + P_2)^2$. Введём для сокращения записи обозначение $\mathrm{B} = V/c$. Тогда

$$P_1' = \Gamma(P_1 - \mathrm{B}E_1); \qquad E_1' = \Gamma(E_1 - \mathrm{B}P_1);$$

$$P_2' = \Gamma(P_2 - \mathrm{B}E_2); \qquad E_2' = \Gamma(E_2 - \mathrm{B}P_2).$$

Получаем для инварианта в системе K':

$$\begin{aligned}
&(E_1' + E_2')^2 - (P_1' + P_2')^2 = \\
&\quad = \Gamma^2\{[(E_1 - \mathrm{B}P_1) + (E1 - \mathrm{B}P_1)]^2 - [(P_2 - \mathrm{B}E_2) + (P_2 - \mathrm{B}E_2)]^2\} = \\
&\qquad = \Gamma^2(1 - \mathrm{B}^2)[(E_1 + E_2)^2 - (P_1 + P_2)^2] = (E_1 + E_2)^2 - (P_1 + P_2)^2,
\end{aligned}$$

что, как говорится, и требовалось доказать.

В то же время применение преобразования скоростей (7) с дальнейшим расчётом величин E' и P' даже для этого простейшего случая приводит к весьма громоздким преобразованиям.

Рассмотрим ещё одну задачу.

Задача 13. При бомбардировке протонами неподвижных ядер изотопа гелия ^{3}He суммарная полная энергия двух частиц в системе их центра инерции равна $E = m_p c^2 \cdot 2\sqrt{5}$. Определите скорость протонов в лабораторной системе отсчёта.

▼ Введём обозначения: скорость протона — β, его релятивистский фактор — γ, $k = 3$ и $n = 2\sqrt{5}$.

Инвариантность энергии покоя даёт:

$$(\gamma + k)^2 - \gamma^2\beta^2 = n^2.$$

Т.к. $\gamma^2(1-\beta^2) \equiv 1$, имеем $1 + 2k\gamma + k^2 = n^2$. Отсюда $\gamma = (n^2 - k^2 - 1)/2k = 5/3$ и, наконец, $\beta = 4/5$. ▲

Однако, на взгляд автора, в рамках курса общей физики первого семестра вряд ли целесообразно уделять четырёхвекторам много внимания.

* * *

Четырёхмерное пространство Г. Минковского и четырёхвекторный формализм Специальной теории относительности — первые шаги на пути геометризации физики. Дальнейшие шаги не заставили себя ждать: искривлённое, риманово пространство Общей теории относительности Эйнштейна (1915), попытки (правда, малопродуктивные) сведе́ния электромагнетизма к геометрии 5-мерного пространства-времени (Т. Калуца, 1921; О. Клейн, 1925) и так далее вплоть до геометродинамики Дж. Уилера (1960) и современных попыток свести физику к геометрии в 11-мерном пространстве.

Если последние окажутся удачными, подтвердится вызванный эйфорией от теорий Эйнштейна афоризм А. Эддингтона: «В мире нет ничего, кроме искривлённого пространства». Впрочем, «нет ничего нового под солнцем» — ещё в 1870 г. английский математик У. Клиффорд сказал: «Изменение кривизны пространства и есть то явление, о котором мы говорим как о ***движении материи***».

Рис. 1

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Электричество. Т. III. — М: Наука, 1983.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. IV. Оптика. — М.: Наука, 1980.
3. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. — Т. II. — М.: Мир, 1965.
4. *Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.* Берклеевский курс физики. — Т. I. Механика — М.: Наука, 1971.
5. *Бутиков Е.И.* Оптика. — М.: Высшая школа, 1986.
6. *Сборник* задач по общему курсу физики. — Механика / Под ред. Яковлева И.А. — М.: Наука, 1977.
7. *Сборник* задач по общему курсу физики/ Под ред. Овчинкина В.А. — Ч. I (раздел Механика) — М.: Издательство МФТИ, 1998.
8. *Физический* энциклопедический словарь. — М.: СЭ, 1984.
9. *Физический* энциклопедический словарь в 5-ти тт., — Т. III. — М.: СЭ, 1963.
10. *Физические* величины. — М.: Энергоатомиздат, 1991.
11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. — Т. II. — М.: Физматгиз, 1962.
12. *Окунь Л.Б.* Понятие массы// УФН, Июль 1989. — Т. 158 — Вып. 3.
13. *Борн М.* Эйнштейновская теория относительности. — М.: Мир, 1964.
14. *Льоцци М.* История физики. — М.: Мир, 1970.
15. *Кудрявцев П.С.* Курс истории физики. — М.: Просвещение, 1974.
16. *Девис П.* Суперсила. — М.: Мир, 1989.
17. *Нарликар Дж.* Неистовая Вселенная. — М.: Мир, 1985.
18. *Овчинкин В.А.* Некоторые вопросы специальной теории относительности. Методические указания. — МФТИ, 1987.
19. *Кремлёв М.Г., Никитаева Г.А.* Методические рекомендации к курсу механики. — МФТИ, 1992.