

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра общей физики

А. В. Гавриков, Н. А. Ворона

Механические колебания

Учебно-методическое пособие
по курсу Общая физика

МОСКВА
МФТИ
2011

УДК 531:534

Рецензент

Кандидат физико-математических наук, доцент *В.С. Булыгин*

Гавриков А. В., Ворона Н. А.

Механические колебания: учебно-методическое пособие по курсу Общая физика. — М.: МФТИ, 2011. — 37 с.

В систематической и доступной форме рассмотрены основные физические свойства механических колебательных систем. Разобраны примеры колебательных систем и изложены основные подходы к их описанию. Может служить учебным пособием, методическим руководством и справочником.

Для студентов и преподавателей физики университетов и технических вузов.

УДК 531:534

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2011

1. Свободные незатухающие гармонические колебания

1.1. Общий вид уравнения и его решение

Рассмотрим несколько примеров механических систем, совершающих свободные незатухающие гармонические колебания.

Пример 1. Грузик на пружине

Рассмотрим грузик на пружине, лежащий на горизонтальном столе (рис. 1). Трение в системе отсутствует. Выведем систему из состояния равновесия. Запишем *второй закон Ньютона* для грузика в проекции на ось x :

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (1)$$

где m — масса грузика, k — жесткость пружинки, x — отклонение грузика от положения равновесия (соответственно \ddot{x} — ускорение грузика). Введя обозначение

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (2)$$

представим это уравнение в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3)$$

Решением этого уравнения является следующая функция:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (4)$$

где ω_0 — частотой колебаний, $T = 2\pi/\omega_0$ — период колебаний, x_0 — амплитуда колебаний, φ — начальная фаза колебаний, которые определяются из *начальных условий*.

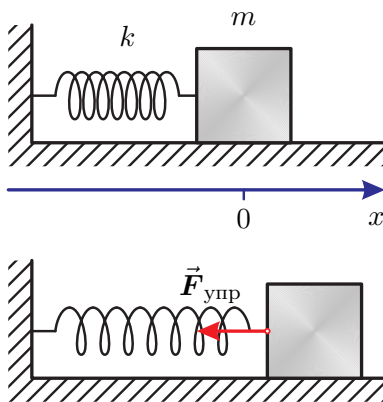


Рис. 1. Грузик на пружине в горизонтальной плоскости

Например, если оттянуть грузик из положения равновесия на расстояние x_{max} и отпустить без начального толчка, то $x_0 = x_{max}$, а $\varphi = 0$. Если же покоящемуся в положении равновесия грузику сообщить начальную скорость v_0 , то $x_0 = v_0/\omega_0$, а $\varphi = -\pi/2$. Действительно, продифференцируем уравнение (4):

$$\dot{x}(t) = -x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

и учтем начальное условие $\dot{x}(0) = v_0$. В результате получим значения амплитуды и фазы, указанные выше.

Иногда вместо формы (4) решение уравнения (3) удобнее представить в виде

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t), \quad (5)$$

где величины A и B определяются из начальных условий.

Для описания движения данной колебательной системы можно вместо второго закона Ньютона воспользоваться *законом сохранения энергии*. Запишем закон сохранения энергии в произвольный момент времени движения грузика (т.е. когда его скорость равна v , а грузик смещен из положения равновесия на расстояние x):

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E_0, \quad (6)$$

где E_0 — полная энергия системы (которая определяется начальными условиями). Представим это уравнение в виде

$$\dot{x}^2 + \frac{k}{m}x^2 = \frac{2E_0}{m}$$

и продифференцируем его по времени:

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\frac{k}{m}x\dot{x} = 0,$$

следовательно,

$$2\dot{x} \left(\ddot{x} + \frac{k}{m}x \right) = 0,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Учитывая обозначение (2), вновь получаем уравнение (3).

Пример 2. Математический маятник

Рассмотрим математический маятник: небольшой¹ грузик массы m на нерастяжимой невесомой нити длины l . Пусть этот маятник совершает *малые* колебания вблизи положения равновесия и в некоторый момент времени нить маятника составляет угол α с вертикалью (рис. 2). Трение, включая сопротивление среды, в системе отсутствует. Учитывая, что сила натяжения нити всегда перпендикулярна скорости движения маятника и поэтому не совершает работу, запишем для данной колебательной системы закон сохранения энергии:

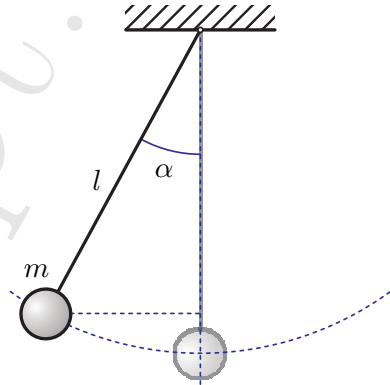


Рис. 2. Математический маятник

$$\frac{mv^2}{2} + mgl(1 - \cos \alpha) = E_0, \quad (7)$$

где ноль потенциальной энергии принят в положении равновесия. Воспользовавшись условием, что колебания происходят с малой амплитудой (т.е. угол α мал), используем приближение $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$. Скорость движения грузика $v = \omega l = \dot{\alpha}l$, где ω — мгновенная угловая скорость вращения. Тогда уравнение (7) принимает вид

$$\frac{ml^2\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{mgl\alpha^2}{2} = E_0,$$

или

$$\dot{\alpha}^2 + \frac{g}{l}\alpha^2 = \frac{2E_0}{ml^2}.$$

Аналогично *Примеру 1* после дифференцирования имеем

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0$$

¹Небольшой — означает, что его линейные размеры много меньше, чем длина нити, на которой он подвешен.

или, вводя обозначение $\omega_0^2 = g/l$, получаем

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0, \quad (8)$$

аналогичное уравнению (3). Период колебаний такого маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (9)$$

Пример 3. Физический маятник

Рассмотрим физический маятник, совершающий *малые* колебания вблизи положения равновесия в поле тяжести, т. е. твердое тело, совершающее малые колебания относительно неподвижной оси (или точки) (рис. 3). Трение в системе отсутствует. Точка O — неподвижная точка², т. C — центр масс тела.

Пусть $OC = l$ и в некоторый момент времени прямая OC составляет угол α с вертикалью. Запишем уравнение моментов относительно т. O :

$$I_0 \dot{\omega} = -mgl \sin \alpha, \quad (10)$$

где I_0 — момент инерции тела относительно т. O , m — масса тела.

Учитывая, что $\omega = \dot{\alpha}$, а $\sin \alpha \approx \alpha$ (т.к. колебания малые), преобразуем (10) к следующему виду:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I_0} \alpha = 0,$$

и, вводя обозначение $\omega_0^2 = mgl/I_0$, получаем уравнение, аналогичное (8):

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \alpha = 0.$$

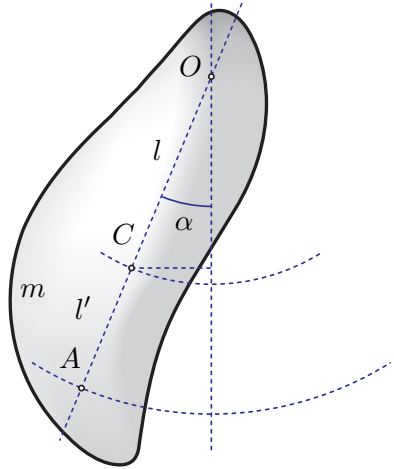


Рис. 3. Физический маятник

²Неподвижная ось вращения проходит через т. O перпендикулярно плоскости рисунка.

Период колебаний физического маятника:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgl}}. \quad (11)$$

Величина $l_{\text{пр}} = I_0/ml$ называется *приведенной длиной* физического маятника и равна длине такого математического маятника, период колебаний которого (9) равен периоду колебаний данного физического маятника (11). По теореме Гюйгенса–Штейнера $I_0 = I_C + ml^2$, где I_C — момент инерции тела относительно центра масс т. C . В результате получаем

$$l_{\text{пр}} = \frac{I_0}{ml} = \frac{I_C}{ml} + l. \quad (12)$$

Отложим на прямой OC т. A , находящуюся на расстоянии $l_{\text{пр}}$ от т. O подвеса маятника. Точка A называется *центром качания*. Рассмотрим малые колебания данного твердого тела относительно этой точки. Пусть $AC = l'$, тогда приведенная длина такого маятника $l'_{\text{пр}} = I_A/ml'$, где I_A — момент инерции тела относительно т. A . Учитывая теорему Гюйгенса–Штейнера, соотношение (12) и равенство $l' = l_{\text{пр}} - l$, получаем

$$l'_{\text{пр}} = \frac{I_A}{ml'} = \frac{I_C}{ml'} + l' = \frac{I_C}{m(l_{\text{пр}} - l)} + (l_{\text{пр}} - l) = l + (l_{\text{пр}} - l) = l_{\text{пр}}.$$

Таким образом, если точку подвеса и центр качания поменять местами, то приведенная длина, а с ней и период колебаний физического маятника останутся прежними. Более подробное рассмотрение этого вопроса вы можете найти, например, в [1].

Как видно из приведенных примеров, простейшие свободные незатухающие гармонические колебания различных колебательных систем описываются уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (13)$$

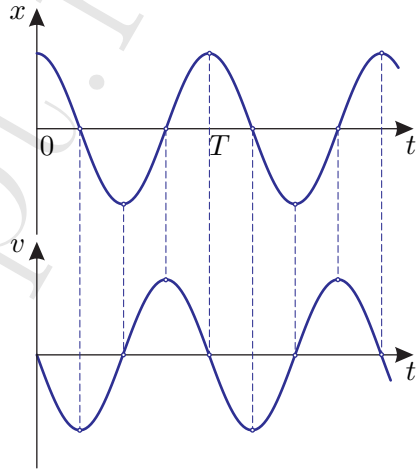


Рис. 4. Зависимость координаты x и скорости v от времени

Еще раз отметим, что его решением является функция типа

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (14)$$

где величины x_0 — амплитуда колебаний и φ — начальная фаза колебаний определяются из начальных условий. При этом

$$v(t) = \dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = x_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi - \pi/2). \quad (15)$$

Графики колебаний координаты и скорости приведены на рис. 4.

1.2. Фазовые диаграммы

Описание движения различных физических систем часто бывает удобно и наглядно вести в *фазовом пространстве*. Фазовое пространство — это такое пространство, на котором представлено множество всех состояний системы, т. е. каждая точка такого пространства задает состояние рассматриваемой физической системы. Рассмотрим движение материальной точки. Напомним, что задать состояние материальной точки — значит задать ее положение \vec{r} и скорость \vec{v} (импульс \vec{p}) в каждый момент времени. Таким образом,

фазовым пространством для материальной точки будет пространство, по осям которого отложены координаты и скорости (т. е. 6-мерное пространство (x, y, z, v_x, v_y, v_z)). Пример фазовой траектории материальной точки, двигающейся только вдоль оси x , представлен на рис. 5.

Для описания различных физических систем, вообще говоря, требуются различные фазовые пространства. Так, например, для описания системы из N невзаимодействующих материальных точек потребуется $6N$ -мерное фазовое пространство: 6 осей для каждой точки (три пространственные координаты, три скоростные). Если система описывается при помощи M обобщенных координат q_i , то потребуется $2M$ -мерное фазовое пространство, по осям которого будут отложены q_i и \dot{q}_i .

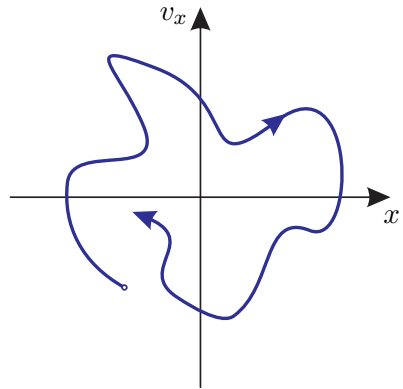


Рис. 5. Пример фазовой траектории

Посмотрим, как будет выглядеть в фазовом пространстве движение системы, описываемой уравнением (13). Так как данная система описывается при помощи одной обобщенной координаты (x в *примере 1* (с. 3), α в *примерах 2* (с. 5) и *3* (с. 6)), то для представления этой колебательной системы понадобится двухмерное фазовое пространство — *фазовая плоскость*, причем фазовая траектория осциллятора будет представлять собой эллипс (см. рис. 6а). Действительно, из (14) и (15) получаем

$$\left(\frac{x(t)}{x_0}\right)^2 = \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \quad \left(\frac{v(t)}{x_0 \omega_0}\right)^2 = \sin^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (16)$$

Складывая выражения (16), найдём каноническое уравнение эллипса в координатах (x, v) , т. е. в фазовом пространстве:

$$\left(\frac{x(t)}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{v(t)}{x_0 \omega_0}\right)^2 = 1.$$

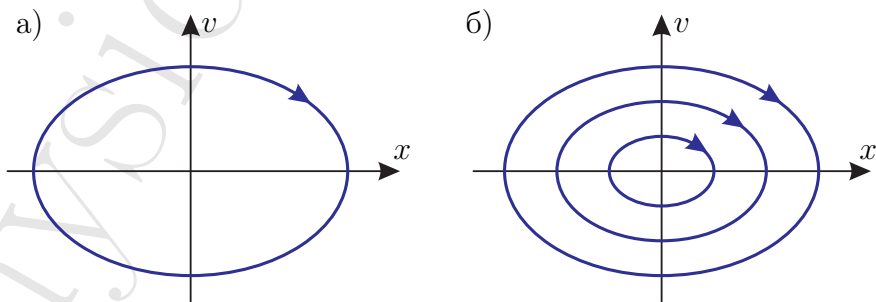


Рис. 6. Фазовая траектория гармонических колебаний заданной амплитуды (а) и различных амплитуд (б)

На рис. 6б представлены фазовые траектории колебательной системы, описываемой уравнением (13), соответствующие различным амплитудам колебаний. Обратим внимание, что движение по этим траекториям происходит по часовой стрелке, т.к. при положительных значениях v координата x должна возрастать.

Иногда вместо величины v при описании колебательной системы по оси ординат откладывают нормированную скорость v/ω_0 . В этом

случае фазовые траектории представляют собой не эллипсы, а круги.

1.3. Векторные диаграммы

Рассмотрим представление колебаний при помощи векторной диаграммы — подход, который в некоторых случаях позволяет упростить вычисления. Возьмем вектор \vec{AB} , вращающийся, например, вокруг т. A . с угловой частотой ω_0 (будем считать, что вращение происходит против часовой стрелки) (рис. 7). Тогда его проекцию на ось x в момент времени t можно представить в виде $AB_x = AB \cos(\omega_0 t)$.

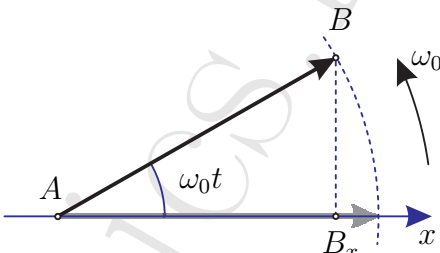


Рис. 7. Вращение вектора AB

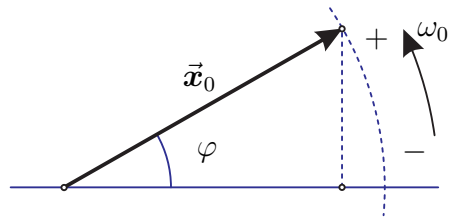


Рис. 8. Положение вектора \vec{x}_0 в момент времени $t = 0$

Теперь рассмотрим более общий случай. Пусть в момент времени $t = 0$ вектор \vec{x}_0 составляет с горизонтальной осью угол α . Причем договоримся, что положительное значение угла α соответствует повороту по ходу вращения, а отрицательное — против хода³ (рис. 8). Тогда в произвольный момент времени выражение для проекции этого вектора на горизонтальную ось можно записать в виде

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

который полностью идентичен выражению (14). Таким образом, векторная диаграмма является геометрическим представлением колебаний, задаваемых данным уравнением.

³В нашем случае положительное — против, а отрицательное — по часовой стрелке.

Такой подход может быть удобен, когда необходимо выполнить сложение нескольких колебаний. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример: пусть

$$y_1(t) = y_{01} \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \quad \text{а}$$

$$y_2(t) = y_{02} \cos(\omega_0 t + \varphi_2),$$

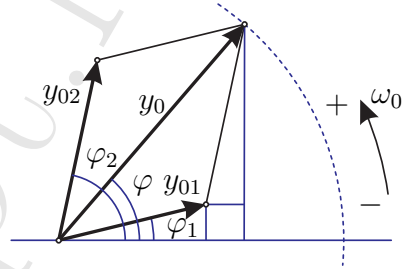


Рис. 9. Сложение векторов

где ω_0 , y_{01} , φ_1 , y_{02} , φ_2 — известные величины. Требуется найти

$$y(t) = y_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = y_1(t) + y_2(t),$$

т. е. требуется выразить y_0 и φ через величины y_{01} , φ_1 , y_{02} , φ_2 . Воспользуемся для решения этого вопроса *векторной диаграммой*: представим на ней колебания $y_1(t)$ и $y_2(t)$, а колебание $y(t)$ — как их векторную сумму (рис. 9). Тогда из данной диаграммы, используя геометрические соображения, при помощи теорем синусов и косинусов находим

$$y_0 = \sqrt{(y_{01}^2 + y_{02}^2 + 2y_{01}y_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1))}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{y_{01} \sin \varphi_1 + y_{02} \sin \varphi_2}{y_{01} \cos \varphi_1 + y_{02} \cos \varphi_2},$$

что решает поставленную задачу.

1.4. Превращение энергии

Заканчивая рассмотрение свободных гармонических незатухающих колебаний, пронаблюдаем на примере грузика на пружине (см. *Пример 1* на с. 3) происходящие в таких системах *превращения энергии*. Запишем кинетическую и потенциальную энергии системы, учитывая формулы (2), (13) и (14), в виде

$$K(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi - \pi/2),$$

$$(17)$$

$$П(t) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi).$$

При этом полная энергия

$$E = \Pi + K = \frac{1}{2}m\omega_0^2x_0^2 = E_0 = \text{const}$$

— ожидаемый результат, т.к. непотенциальные силы на систему не действуют. Полученные временные зависимости $\Pi(t)$, $K(t)$ и $E(t)$ представлены на рис. 10.

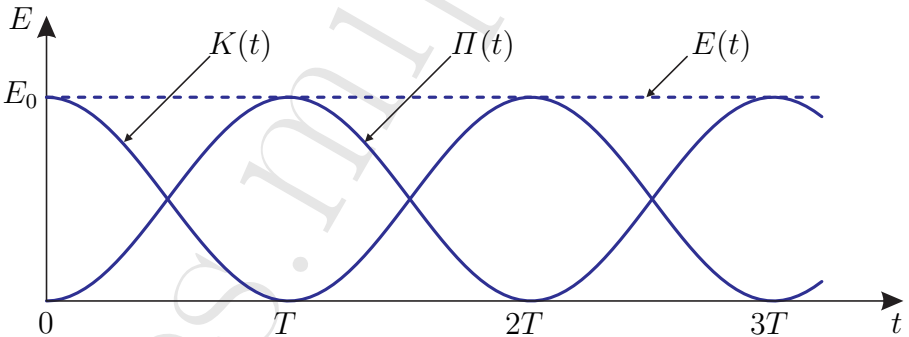


Рис. 10. Зависимость полной энергии E , потенциальной энергии Π и кинетической энергии K от времени t

Вычислим среднее за период значение кинетической энергии системы. По определению эта величина задается следующим выражением:

$$\langle K(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} K(t) dt.$$

Принимая во внимание (17), находим

$$\begin{aligned} \langle K(t) \rangle_T &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi - \pi/2) dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \frac{1}{2} (1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi - \pi/2)) dt = \frac{1}{4} m \omega_0^2 x_0^2 = \frac{E_0}{2}. \end{aligned}$$

Аналогично находим среднее за период значение потенциальной

энергии системы:

$$\langle \Pi(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \Pi(t) dt = \frac{E_0}{2} = \langle K(t) \rangle_T.$$

Таким образом, получаем, что потенциальная и кинетическая энергии гармонического осциллятора колеблются с частотой $2\omega_0$ в противоположных фазах около одинакового среднего значения, равного половине полной энергии системы.

2. Затухающие колебания

Перейдем к рассмотрению гармонического осциллятора с затуханием и прежде всего рассмотрим примеры физических систем, являющихся такими осцилляторами.

2.1. Общий вид уравнения и его решение

Пример 4. Грузик на пружине с трением

Рассмотрим грузик на пружинке, совершающий малые колебания вблизи положения равновесия. Однако в отличие от *Примера 1* (с. 3), в данной системе присутствует трение со стороны окружающей среды, причем $\vec{F}_{\text{тр}} = -\beta \vec{v}$, где β — коэффициент сопротивления среды. Запишем второй закон Ньютона для грузика и спроецируем на ось x (см. рис. 11):

$$m\ddot{x} = -kx - \beta v,$$

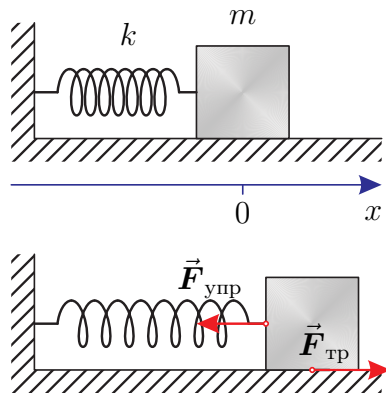


Рис. 11. Грузик на пружине в горизонтальной плоскости

где m — масса грузика, k — жесткость пружинки, x — отклонение грузика от положения равновесия, и представим его в виде

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0,$$

или, вводя обозначения $\delta = \beta/2m$ и $\omega_0^2 = k/m$, получим

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (18)$$

Пример 5. Математический маятник с трением

Рассмотрим математический маятник длины l и массы m , совершающий малые колебания вблизи положения равновесия и испытывающий со стороны окружающей среды воздействие силы трения, величина которой пропорциональна скорости грузика маятника (коэффициент пропорциональности β). Запишем для грузика маятника второй закон Ньютона в проекции на ось x (см. рис. 12):

$$m\ddot{v} = -\beta v - mg \sin \alpha,$$

учитывая, что $v = l\dot{\alpha}$, а колебания малые, получаем

$$\ddot{\alpha} + \frac{\beta}{m}\dot{\alpha} + \frac{g}{l}\alpha = 0,$$

или, вводя обозначения $\delta = \beta/2m$ и $\omega_0^2 = g/l$, находим

$$\ddot{\alpha} + 2\delta\dot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0. \quad (19)$$

В обоих приведенных примерах мы пришли к уравнению свободных затухающих гармонических колебаний:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (20)$$

В зависимости от соотношения между δ и ω_0 уравнение (20) будет иметь различные решения:

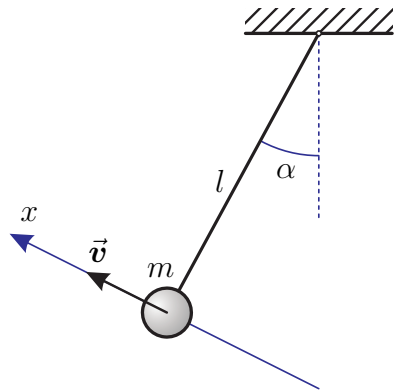


Рис. 12. Математический маятник

а) При $\omega_0^2 > \delta^2$ решение уравнения (20) имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)}, \quad (21)$$

где величины x_0 — амплитуда колебаний и φ — начальная фаза колебаний определяются из начальных условий. График таких затухающих колебаний, а также изображение на фазовой плоскости приведены на рис. 13. Для характеристики того, насколько быстро происходит затухание колебаний, вводят характерное время затухания $\tau = 1/\delta$, представляющее собой время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в e раз.

б) При $\omega_0^2 < \delta^2$ решение уравнения (20) имеет вид

$$x(t) = x_{01} e^{-\delta t} e^{\sqrt{(\delta^2 - \omega_0^2)}t} + x_{02} e^{-\delta t} e^{-\sqrt{(\delta^2 - \omega_0^2)}t}, \quad (22)$$

причем величины x_{01} и x_{02} определяются из начальных условий.

в) При $\omega_0^2 = \delta^2$ решение уравнения (20) имеет вид

$$x(t) = x_{01} e^{-\delta t} + x_{02} t e^{-\delta t}. \quad (23)$$

Величины x_{01} и x_{02} также определяются из начальных условий.

Зависимости (22) и (23) носят аperiодический характер и не являются колебаниями. Графики этих зависимостей приведены на рис. 14. Далее мы будем рассматривать только случай $\omega_0^2 > \delta^2$ (а если не обговорено обратное, то даже $\omega_0^2 \gg \delta^2$) и решения, задаваемые выражением (21).

2.2. Логарифмический декремент затухания и добротность

Для описания колебательных систем используют такие характеристики, как логарифмический декремент затухания и добротность. По определению *логарифмическим декрементом затухания* называется величина

$$d = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}, \quad (24)$$

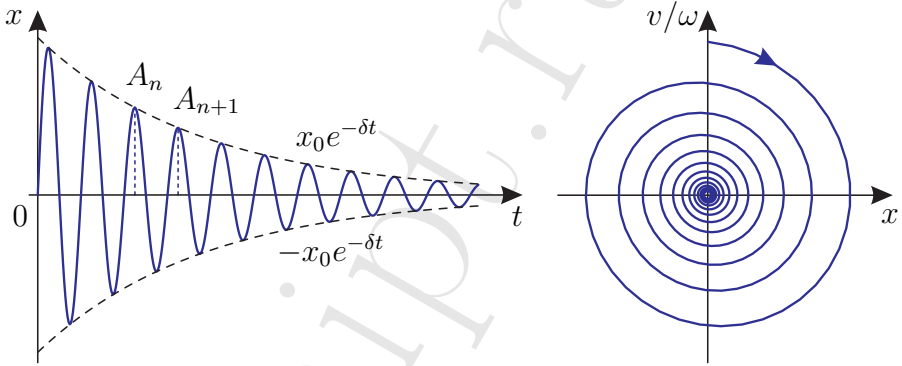


Рис. 13. Зависимость координаты x от времени t и фазовая диаграмма затухающих колебаний

где A_n — амплитуда колебания под номером n , а A_{n+1} — амплитуда следующего, т. е. $n + 1$, колебания (рис. 13). Получим выражение, связывающее декремент затухания и другие параметры колебательной системы. Будем считать, что в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_1 + T$ ($T = 2\pi/\omega$ — период колебаний) осциллятор проходит положение максимального отклонения от положения равновесия, т. е. $\cos(\omega t + \varphi)$ в выражении (21), описывающем движение осциллятора, равен 1:

$$x(t_1) = x_0 e^{-\delta t_1} \cos(\omega t_1 + \varphi) = x_0 e^{-\delta t_1}.$$

Таким образом,

$$A_n = x(t_1) = x_0 e^{-\delta t_1},$$

а амплитуда следующего колебания

$$A_{n+1} = x(t_1 + T) = x_0 e^{-\delta(t_1 + T)} \cos(\omega(t_1 + T) + \varphi) = e^{-\delta T} x_0 e^{-\delta t_1} = e^{-\delta T} A_n,$$

откуда по определению (24) находим логарифмический декремент затухания

$$d = \delta T. \quad (25)$$

Добротностью называется величина

$$Q = \frac{\pi}{d}.$$

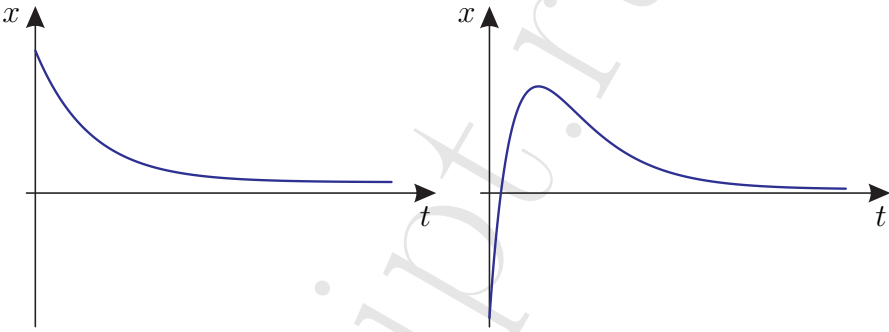


Рис. 14. Пример осциллограмм в случае большого трения

Пользуясь выражением (25), можно получить

$$Q = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\omega}{2\delta},$$

учитывая, что затухание мало, т. е. $\omega_0^2 \gg \delta^2$ и $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)} \approx \omega_0$, можно переписать:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}.$$

Для выяснения физического смысла добротности рассмотрим следующий пример.

Пример 6. Грузик на пружине с трением

Рассмотрим ту же колебательную систему, что и в *Примере 4*⁴ (с. 13). Энергия уходит из этой системы за счет работы сил трения. Вычислим энергию, которая теряется колебательной системой за одно полное колебание, т. е. за период:

$$\Delta E = \int_{\text{за период}} \delta A,$$

$$\delta A = F_{\text{тр}} dx = \beta v dx = \beta v \frac{dx}{dt} dt = \beta v^2 dt, \text{ т. е.}$$

⁴Грузик на пружинке + сопротивление среды.

$$\Delta E = \int_{t_0}^{t_0+T} \beta v^2 dt = \frac{2\beta}{m} T \left(\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{mv^2}{2} dt \right) = \frac{2\beta}{m} T \langle K(t) \rangle_T.$$

В случае, когда затухание мало, можно считать, что за одно колебание полная энергия системы практически не изменяется, и воспользоваться для вычисления $\langle K(t) \rangle_T$ выражением, полученным для незатухающих гармонических колебаний $\langle K(t) \rangle_T = E/2$, где под энергией E подразумевается полная энергия колебательной системы в данный момент времени:

$$\Delta E = \frac{2\beta}{m} T \langle K(t) \rangle_T = \frac{2\beta}{m} \frac{2\pi}{\omega} \frac{E}{2} = \frac{2\delta}{\omega} 2\pi E = \frac{1}{Q} 2\pi E.$$

Таким образом, получаем выражение для добротности колебательной системы:

$$Q = \frac{2\pi E}{\Delta E},$$

которое и проясняет физический смысл понятия „добротность“. Итак, добротность показывает, во сколько раз энергия, запасенная в колебательной системе, превосходит энергию, теряемую системой за один период колебаний. Другими словами, добротность показывает, насколько осциллятор является „хорошим“, т. е. сколько колебаний сделает осциллятор, прежде чем потеряет запасенную энергию. Колебательные системы с добротностью $Q < 10^2$ считаются не очень хорошими. Приведем порядок величины добротности для некоторых колебательных систем:

Обычный колебательный контур (на радиочастотах) ...	10^2
Камертон (без резонатора)	10^4
Пьезокварц в вакууме	10^5
Полый резонатор для микрорадиоволн	10^5
Электрон в атоме	10^7

Обратим внимание, что добротность является качественным параметром и высокая точность при его вычислении считается неуместной.

3. Гармонический осциллятор с затуханием под действием внешней вынуждающей силы

3.1. Действие постоянной внешней силы

В качестве первого шага рассмотрим пример колебательной системы под действием постоянной внешней силы.

Пример 7. Грузик на пружине с трением в поле тяжести

Для этого рассмотрим грузик, подвешенный на идеальной пружинке в поле тяжести (рис. 15). Кроме силы тяжести и силы со стороны пружинки на грузик действует сила трения со стороны окружающей среды $\vec{F}_{\text{тр}} = -\beta\vec{v}$, где β — коэффициент сопротивления среды. Запишем второй закон Ньютона для грузика и спроецируем на ось y :

$$m\ddot{y} = -ky - \beta v - mg,$$

где m — масса грузика, k — жесткость пружинки, y — координата, отсчитываемая от состояния, в котором пружина в колебательной системе не растянута. Представим это уравнение в виде

$$\ddot{y} + \frac{\beta}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = -g.$$

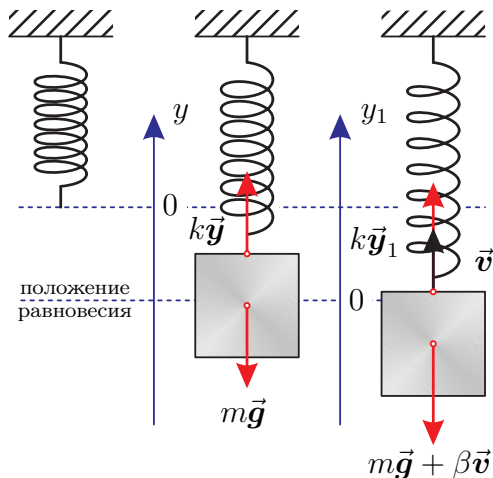


Рис. 15. Грузик на пружине в поле тяжести

Преобразуем это выражение к виду

$$\left(y + \frac{m}{k}g\right)'' + \frac{\beta}{m} \left(y + \frac{m}{k}g\right)' + \frac{k}{m} \left(y + \frac{m}{k}g\right) = 0.$$

Делая замену переменных

$$y_1 = y + mg/k$$

и, как раньше, вводя обозначения $\delta = \beta/(2m)$ и $\omega_0^2 = k/m$, получаем

$$\ddot{y}_1 + 2\delta\dot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 = 0.$$

Следовательно,

$$y_1(t) = y_{10}e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где

$$\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)},$$

или, возвращаясь к переменной y :

$$y(t) = y_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - \frac{m}{kg}.$$

Таким образом, колебания в системе под действием постоянной внешней силы происходят так же, как и в случае отсутствия внешней силы с той лишь разницей, что система колеблется вокруг нового положения равновесия, в котором внешняя сила уравновешивается силой со стороны растянутой пружины.

3.2. Действие периодических толчков

Теперь рассмотрим гармонический осциллятор под действием периодических толчков: например, грузик на пружинке, лежащий на горизонтальном столе (трение отсутствует) под действием внешней периодической силы $F(t)$, график зависимости которой от времени представлен на рис. 16. Продолжительность толчков $\tau \ll T_0$, где T_0 — период собственных колебаний осциллятора. При этом уравнение, описывающее движение осциллятора, будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx + F(t).$$

Представим это уравнение в виде

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m},$$

или

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}. \quad (26)$$

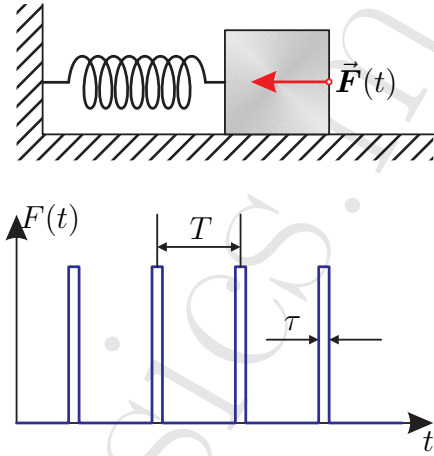


Рис. 16. Периодическая сила, состоящая из кратковременных толчков

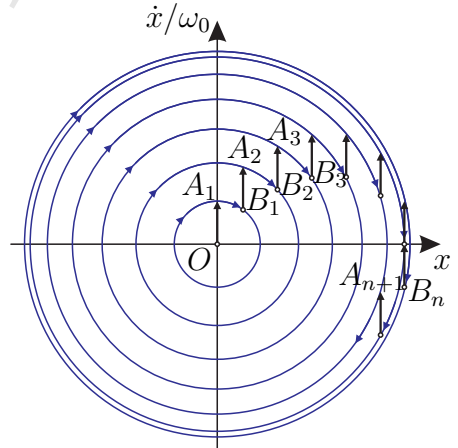


Рис. 17. Гармонический осциллятор под действием периодических толчков. Период воздействия больше собственного периода. Фазовая плоскость

Будем считать, что в начальный момент времени колебательная система находится в равновесии, т.е. $x = 0$ и $v = 0$. Проследим за движением изображающей точки на фазовой плоскости (рис. 17). Первый толчок переводит изображающую точку из начала координат O в т. A_1 , причем

$$OA_1 = \frac{\int_{t_1}^{t_1+\tau} F(t)dt}{m\omega_0}.$$

Дальше вплоть до момента действия второго толчка изображающая точка будет двигаться так же, как в случае свободно колеблющегося осциллятора, т.е. по окружности с центром в т. O и радиусом OA_1 . Для определенности будем считать, что период следования толчков T немного больше периода собственных колебаний T_0 . В этом случае до воздействия второго толчка изображающая точка пройдет немного более одного круга (до т. B_1), а под действием второго толчка перескочит в т. A_2 ($B_1A_2 = OA_1$).

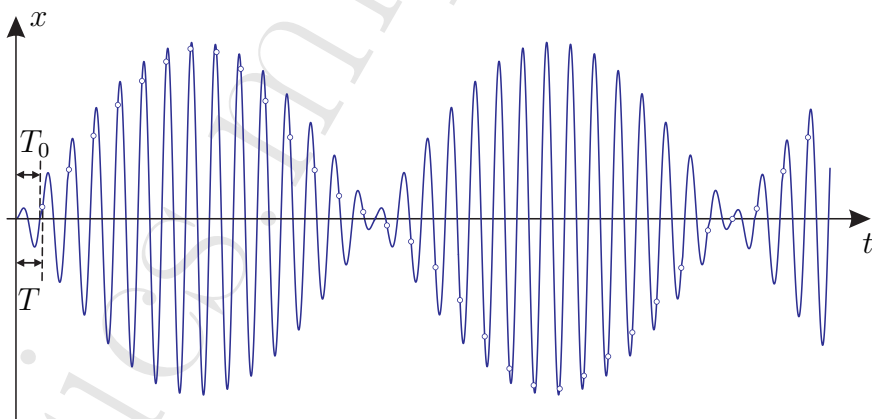


Рис. 18. Осциллограмма к рис. 17. Кружочками отмечены моменты толчков

Продолжив такое рассмотрение, увидим, что через некоторое время толчки начнут уменьшать амплитуду колебаний. Это произойдет в тот момент, когда направление импульса, передаваемого в результате толчка грузику, станет противоположно скорости грузика, т.е. в тот момент, когда точка B_n на фазовой плоскости перейдет ниже оси x (будет находиться ниже оси x). После того как амплитуда уменьшится почти до нуля, наступит момент, когда толчки снова начнут ее увеличивать и т.д. Зависимость $x(t)$ представлена на рис. 18. Этот график состоит из кусков синусоиды одинакового периода, но различной амплитуды. На нем видны изломы, соответствующие скачкообразным изменениям скорости. К аналогичным заключениям можно прийти и при рассмотрении случая T немного

меньше T_0 (рис. 19).

В случае $T = T_0$ будет происходить неограниченное нарастание амплитуды колебаний (рис. 20). Такое нарастание амплитуды колебаний под действием периодического воздействия — одна из черт явления, играющего центральную роль в учении о колебаниях и называемого *резонансом*. Легко видеть, что резонанс наступит не только при $T = T_0$, но и при $T = NT_0$, где N — целое число. Более подробно с рассмотрением гармонического осциллятора под действием периодических толчков можно ознакомиться в книге [2].

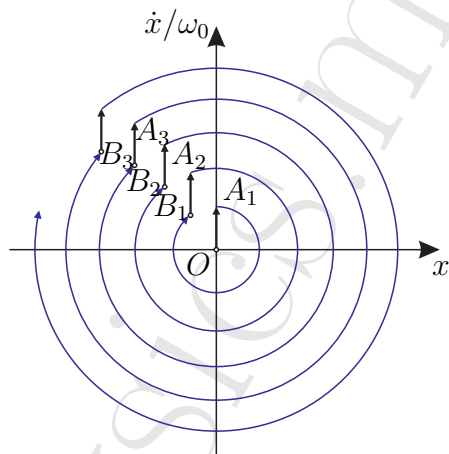


Рис. 19. То же, что и рис. 17, но период воздействия меньше собственного периода

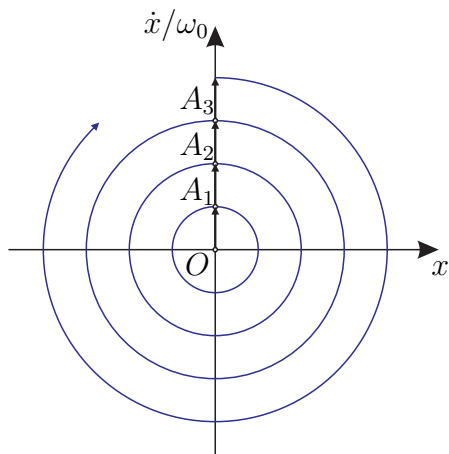


Рис. 20. Монотонное нарастание амплитуды при $T = T_0$

3.3. Действие синусоидальной силы

Теперь перейдем к рассмотрению осциллятора под действием синусоидальной силы и, прежде всего, выясним, почему так важно разобраться именно с синусоидальным воздействием. Для этого обратим внимание на то, что гармонический осциллятор является линейной системой, и, следовательно, при описании его движения можно пользоваться принципом суперпозиции. Поясним это утверждение: пусть на гармонический осциллятор действует некоторая удельная сила $f(t)$ (т.е. аналогично уравнению (26) $f(t) = F(t)/m$),

при этом осциллятор будет описываться уравнением

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (27)$$

и пусть $f(t) = \sum f_i(t)$, причем при воздействии на осциллятор удельной силы $f_i(t)$ решением соответствующего уравнения $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_i(t)$ является $x = x_i(t)$. Тогда, в силу линейности колебательной системы, решением уравнения (27) будет $x = x(t) = \sum x_i(t)$.

Вторым аспектом, на который мы обратим внимание, является *теорема Фурье*, доказываемая в курсе математического анализа. Она утверждает, что периодическая функция $f(t)$ может быть представлена во всем интервале $(-\infty; +\infty)$ в виде суперпозиции бесконечного множества синусоид, имеющих частоты, кратные $\omega = 2\pi/T$, где T — период функции $f(t)$:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)),$$

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_T^{t+T} f(t) dt, \quad B_0 = 0,$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_T^{t+T} f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad B_n = \frac{2}{T} \int_T^{t+T} f(t) \sin(n\omega t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Или немного другая запись того же самого выражения:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega t - \alpha_n), \quad (28)$$

$$C_n^2 = A_n^2 + B_n^2, \quad \alpha_n = \arctg\left(\frac{B_n}{A_n}\right).$$

Такое представление называется *спектральным разложением*, а C_n называются спектральными коэффициентами, или спектром функции $f(t)$.

В случае если $f(t)$ непериодическая, то

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \cos(\omega t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} B(\omega) \sin(\omega t) dt,$$

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt, \quad B(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt.$$

Таким образом, становится понятно, что силу $f(t)$ в выражении (27) можно представить в виде суммы синусоидальных воздействий. При этом решение уравнения (27) будет представлять собой сумму решений, найденных для каждого из этих синусоидальных воздействий. Поэтому важно разобраться именно с синусоидальным воздействием на осциллятор.

Итак, рассмотрим колебательную систему, например, аналогичную изображенной на рис. 16, причем $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$. Тогда уравнение движения может быть представлено в виде

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \Omega t, \quad (29)$$

где $\delta = \beta/(2m)$, $\omega_0^2 = k/m$, $f_0 = F_0/m$ (m — масса грузика, k — жесткость пружинки, β — коэффициент сопротивления среды).

В курсе дифференциальных уравнений доказывается, что решением уравнения (29) является функция

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) + B \cos(\Omega t - \psi), \quad (30)$$

где $\omega = \sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)}$, величины A и φ задаются начальными условиями, а величины B и ψ зависят не только от характеристик осциллятора, но и от вынуждающей силы. Первое слагаемое в этом выражении соответствует собственным колебаниям системы и через достаточно большое время, т.е. через время $\tau \gg 1/\delta$, его вкладом в движение осциллятора можно будет пренебречь, т.к. $Ae^{-\delta t} \approx 0$, и движение системы будет характеризоваться вторым слагаемым в уравнении (30):

$$x(t) = B \cos(\Omega t - \psi). \quad (31)$$

Для того чтобы найти B и Ω , вычислим при помощи (31) \ddot{x} и \dot{x} и подставим в уравнение (29):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -B\Omega \sin(\Omega t - \psi) = B\Omega \cos(\Omega t - \psi + \pi/2), \\ \ddot{x}(t) &= -B\Omega^2 \cos(\Omega t - \psi),\end{aligned}$$

$$B(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos(\Omega t - \psi) + 2\delta B\Omega \cos(\Omega t - \psi + \pi/2) = f_0 \cos \Omega t. \quad (32)$$

Представим уравнение (32) с помощью векторной диаграммы (рис. 21). Из полученного прямоугольного треугольника по теореме Пифагора находим

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \quad \text{и} \quad (33)$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \quad (34)$$

Выражения (33) и (34) представляют собой *амплитудно-частотную* (АЧХ) и *фаза-частотную* (ФЧХ) характеристики осциллятора соответственно. Графики этих зависимостей представлены на рис. 22 (где $B_0 = B(\Omega = 0) = f_0/\omega_0^2$).

Найдем значение Ω^* , при котором функция (32) достигает максимума. Для этого найдем экстремум выражения $(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2$:

$$((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2)'_{\Omega} = 0 \quad \text{или}$$

$$(2\Omega^2 - 2\omega_0^2 + 4\delta^2)2\Omega = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$\Omega^{*2} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2} \right),$$

или, принимая во внимание, что добротность осциллятора может быть представлена выражением $Q \approx \omega_0/2\delta$, получаем

$$\Omega^{*2} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right). \quad (35)$$

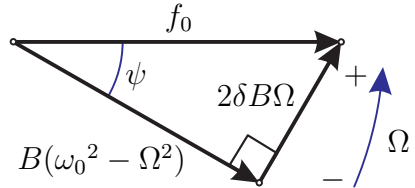


Рис. 21. Векторная диаграмма вынужденных колебаний

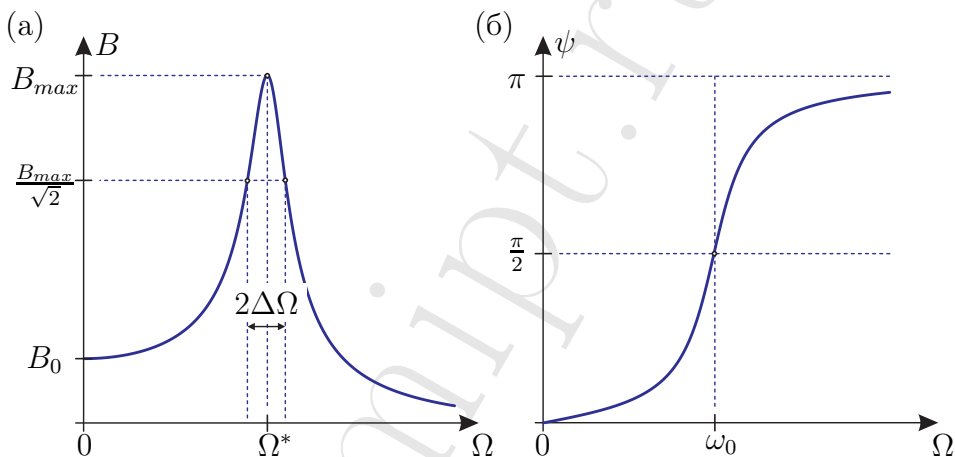


Рис. 22. Амплитудно-частотная характеристика (а) и фаза-частотная характеристика (б) вынужденных колебаний

При $Q \gg 1$ — $\Omega^* \approx \omega_0$, т.е. при совпадении частоты внешнего синусоидального воздействия с собственной частотой колебаний осциллятора, возникает резкое возрастание амплитуды колебаний, т.е. наблюдается резонанс. Подставляя (35) в (33), находим

$$B_{max} = B(\Omega = \Omega^*) = \frac{f_0}{\omega_0^2 \sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}}} \approx \frac{f_0}{\omega_0^2} Q = B_0 Q.$$

При $\delta \ll \omega_0$ — $\Delta\Omega \approx \delta$ и $Q \approx \omega_0/2\delta \approx \Omega^*/2\Delta\Omega$. АЧХ и ФЧХ осцилляторов, отличающихся друг от друга добротностью, представлены на рис. 23.

Гармонический осциллятор можно использовать для *спектрального анализа* внешнего сигнала. Напомним, что спектром функции $f(t)$ называются коэффициенты (набор коэффициентов) C_n в разложении (28). Для прояснения этого утверждения рассмотрим следующий пример.

Пусть на гармонический осциллятор, например грузик на пружинке, действует удельная вынуждающая сила $f(t)$ и пусть разложение $f(t)$ в ряд Фурье (или, другими словами, спектральное раз-

ложение) имеет следующий вид:

$$f(t) = C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \cos(\omega_2 t) + \dots + C_6 \cos(\omega_6 t),$$

представленный на рис. 24а. Пусть собственная частота осциллятора совпадает с частотой ω_2 , т.е. $\omega_0 = \omega_2$. Амплитудно-частотная характеристика $B(\Omega)$ осциллятора представлена на рис. 24б. Будем считать, что добротность осциллятора достаточно хорошая, т.е. $\delta \ll \omega_0$.

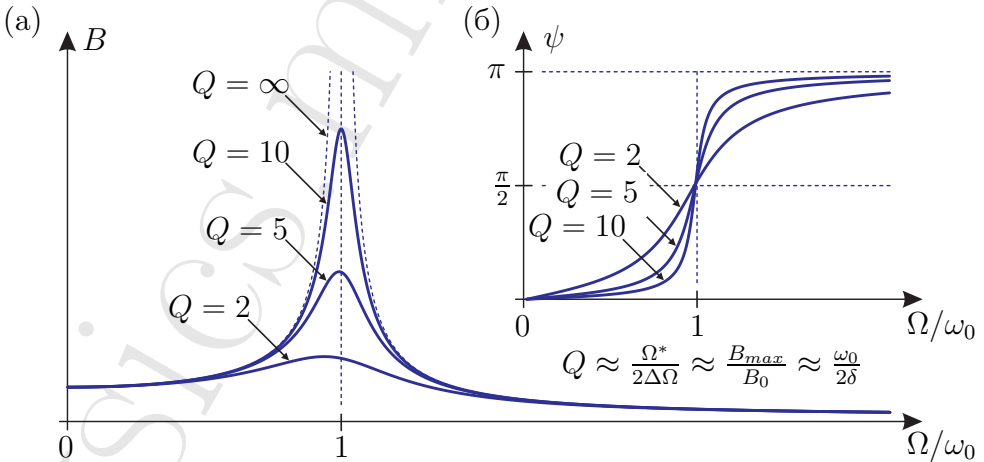


Рис. 23. АЧХ (а) и ФЧХ (б) осцилляторов с различной добротностью

Посмотрим, какие колебания $x(t)$ установятся в этой системе. Как уже обсуждалось ранее, согласно принципу суперпозиции

$$x(t) = B_1 \cos(\omega_1 t - \psi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2) + \dots + B_6 \cos(\omega_6 t - \psi_6),$$

где B_i и ψ_i вычисляются при помощи (33) и (34), т.е.

$$B_i = \frac{C_i}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_i^2)^2 + 4\delta^2 \omega_i^2}}.$$

В результате получаем спектр $x(t)$, изображенный на рис. 24в.

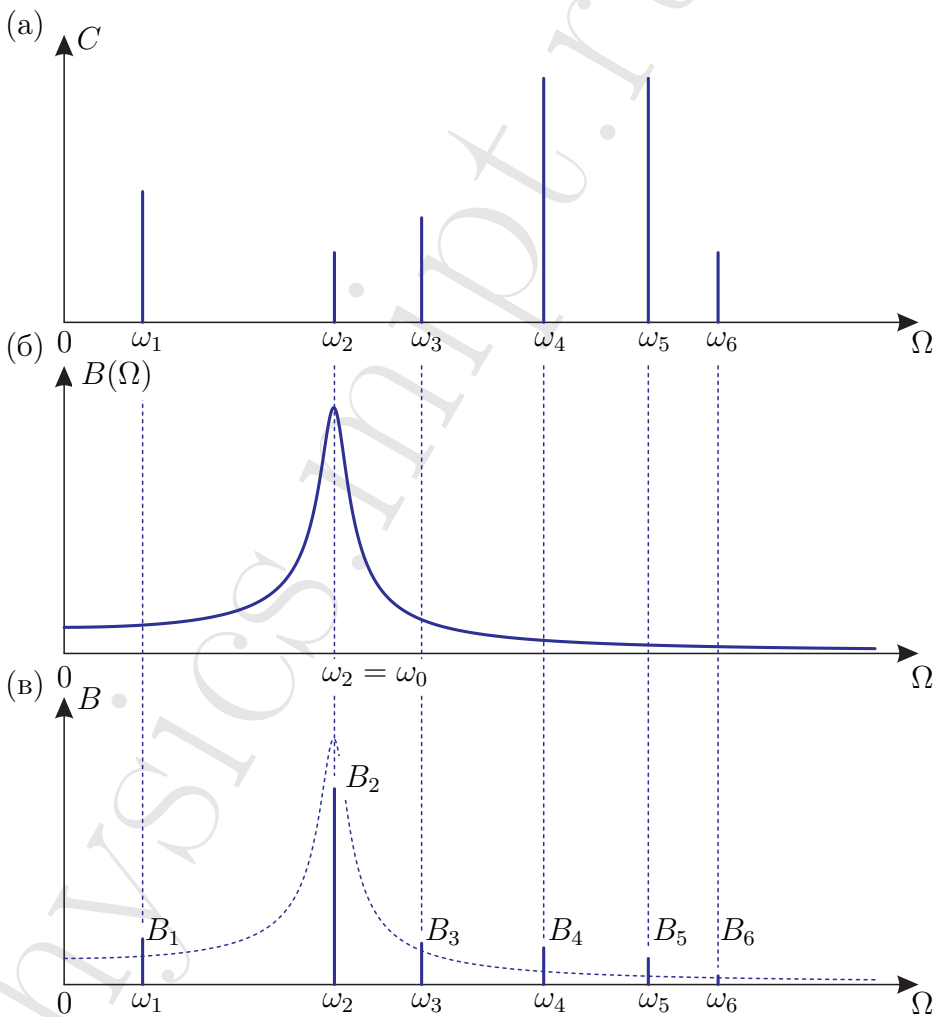


Рис. 24. Спектральный анализ сигнала: спектр $f(t)$ (а), АЧХ осциллятора (б) и результирующий спектр $x(t)$ (в)

Спектр фактически представляет собой умножение АЧХ осциллятора на спектр вынуждающей силы. Таким образом, из-за ярко выраженного пика АЧХ получается, что $B_2 \gg B_i$ ($i = 1, 3, 4, 5, 6$) (см. рис. 24в), т.е.

$$x(t) \approx B_2 \cos(\omega_2 t - \psi_2).$$

Этот факт, в свою очередь, означает, что из всех спектральных компонент вынуждающей силы осциллятор „вырезал“ только одну компоненту на резонансной частоте осциллятора.

Приведенный пример показывает, как при помощи осциллятора можно проводить спектральный анализ внешней силы по следующему алгоритму.

1. Берем осциллятор с известными параметрами (ω_0, δ) и, как следствие, известной АЧХ.
2. Измеряем амплитуду колебаний B , установившуюся в системе под действием вынуждающей силы.
3. Вычисляем спектральную составляющую C вынуждающей силы:

$$C = B\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2},$$

или, учитывая, что $\Omega = \omega_0$, $C = 2B\delta\omega_0$.

4. Изменяем собственную частоту осциллятора (например, изменив массу грузика на пружине).
5. Повторяем пункты 1–4 алгоритма, находя спектральную составляющую вынуждающей силы на следующей частоте и т.д.

4. Параметрические колебания

Явление параметрического резонанса рассмотрим на примере математического маятника, длина которого может изменяться (т.е. на примере качелей). Пусть математический маятник массы m и длиной l совершает колебания с амплитудой α_0 . И пусть в этой колебательной системе отсутствует трение. Воспользовавшись тем, что мы умеем изменять длину маятника, будем выполнять следующие действия: когда маятник проходит положение равновесия и имеет максимальную скорость мгновенно (т.е. за время много меньшее периода колебаний), уменьшаем его длину на небольшую величину Δl ($\Delta l \ll l$), затем, когда маятник отклонится на максимальный

угол, увеличим длину маятника до прежнего значения l , когда маятник опять проходит положение равновесия, вновь уменьшим его длину на Δl и т.д. (рис. 25а). Оказывается, при выполнении таких действий будет происходить нарастание амплитуды колебаний. Это явление называется *параметрическим резонансом*.

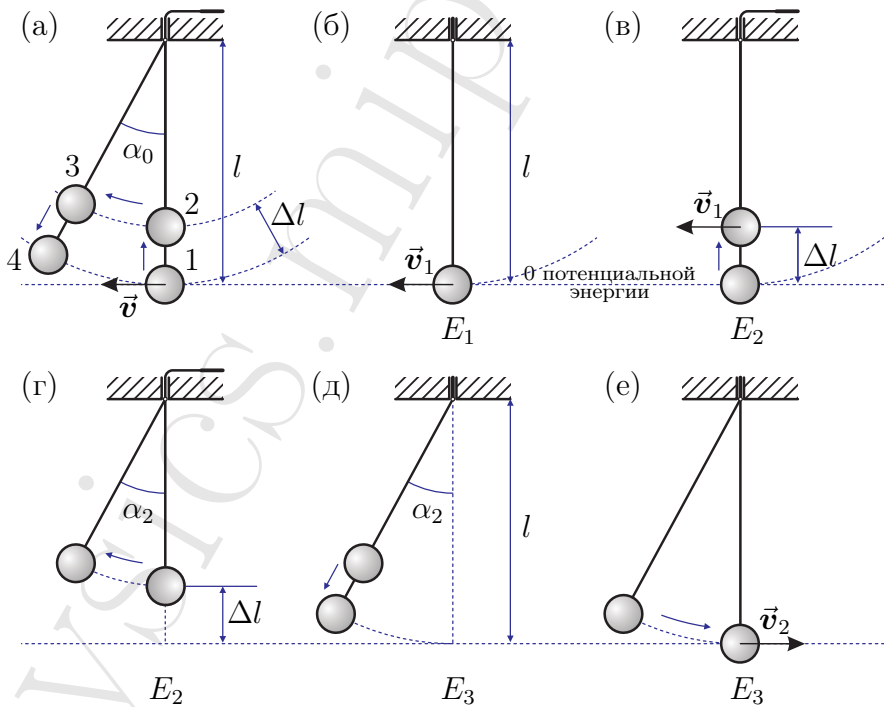


Рис. 25. Параметрические колебания

Теперь проанализируем это явление несколько подробнее (рис. 25б–е). Убедимся, что при описанной последовательности действий действительно происходит нарастание амплитуды колебаний. Для этого проследим за изменением скорости маятника в момент прохождения положения равновесия. Запишем энергию системы в момент, когда маятник проходит через положение равновесия и имеет скорость v_1 (потенциальную энергию будем

отсчитывать от положения равновесия маятника):

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2},$$

тогда сразу после уменьшения длины маятника энергия системы будет

$$E_2 = E_1 + mg\Delta l.$$

Такая же энергия будет у колебательной системы в тот момент, когда маятник отклонится на максимальный угол α_2 :

$$E_2 = mg\Delta l + mg(l - \Delta l)(1 - \cos \alpha_2),$$

следовательно,

$$E_1 = mg(l - \Delta l)(1 - \cos \alpha_2). \quad (36)$$

Запишем энергию системы в положении максимального отклонения сразу после увеличения длины маятника до прежнего значения l :

$$E_3 = E_2 - mg\Delta l \cos \alpha_2 = E_1 + mg\Delta l(1 - \cos \alpha_2),$$

учитывая (36), получаем

$$E_3 = E_1 + \frac{\Delta l E_1}{l - \Delta l},$$

принимая во внимание, что $\Delta l \ll l$, находим

$$E_3 = E_1 \left(1 + \frac{\Delta l}{l} \right).$$

Учтем, что

$$E_3 = \frac{mv_2^2}{2},$$

где v_2 — новая скорость маятника при прохождении через положение равновесия. Таким образом,

$$v_2^2 = v_1^2 \left(1 + \frac{\Delta l}{l} \right).$$

Извлекая корень, раскладывая в ряд Тейлора по степеням $\Delta l/l$ и пренебрегая членами высоких порядков в силу того, что $\Delta l \ll l$, окончательно получаем

$$v_2 = v_1 \left(1 + \frac{\Delta l}{2l} \right),$$

что означает увеличение максимальной скорости маятника или, другими словами, увеличение амплитуды его колебаний. Рассмотрение такой раскачки за счет изменения параметров колебательной системы (параметрический резонанс) естественно приводит к вопросам: „За счет чего возрастает энергия колебательной системы? Какая сила совершает работу и увеличивает энергию системы?“ Ответ на эти вопросы звучит следующим образом: „Увеличение энергии осциллятора происходит за счет работы силы натяжения нити маятника“.

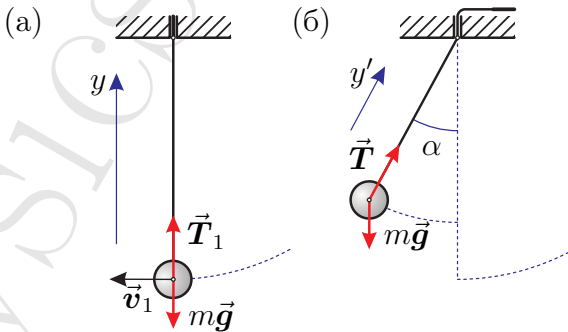


Рис. 26. Параметрические колебания

Действительно, запишем второй закон Ньютона для грузика в момент, когда маятник проходит через положение равновесия. Спроецируем это уравнение на ось y (см. рис. 26а):

$$T_1 - mg = ma_y, \text{ но } a_y = \frac{v_1^2}{l}.$$

Следовательно, для того чтобы уменьшить длину маятника при прохождении через положение равновесия, необходимо тянуть нить ма-

ятника с силой

$$T_2 > T_1 = mg + \frac{mv_1^2}{l},$$

а работа, идущая на увеличение энергии колебательной системы, будет

$$A_+ = T_2 \Delta l.$$

Запишем второй закон Ньютона для грузика в момент максимального отклонения маятника от положения равновесия. Спроецируем это уравнение на ось y' (см. рис. 26б):

$$0 = T - mg \cos \alpha.$$

Следовательно, для того чтобы увеличить длину маятника до прежнего значения l , необходимо действовать на нить маятника с силой $T_3 < T$, и работа, идущая на уменьшение энергии системы, будет

$$A_- = T_3 \Delta l.$$

Полная работа:

$$\begin{aligned} A &= A_+ - A_- = (T_2 - T_3) \Delta l > (T_1 - T) \Delta l = \\ &= \left(mg + \frac{mv_1^2}{l} - mg \cos \alpha \right) \Delta l > 0, \end{aligned} \quad (37)$$

т.е. суммарная работа, совершенная над системой, положительная, и энергия системы действительно возросла. Обратим внимание, что в случае, когда в колебательной системе есть трение, условием возникновения параметрического резонанса будет превышение записанной в выражении (37) работы A над потерями энергии за счет трения.

Данная работа была частично поддержана Грантом Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук МК-2471.2010.8.

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики: учеб. пособие для вузов. В 5 т. Т. 1 Механика. – 5-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 560 с. – ISBN 5-9221-0715-1.
2. Горелик Г.С. Колебания и волны. Введение в акустику, радиофизику и оптику / под ред. С.М. Рытова. – 3-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 656 с. – ISBN 978-5-9221-0776-1.

Содержание

1. Свободные незатухающие гармонические колебания	3
1.1. Общий вид уравнения и его решение	3
1.2. Фазовые диаграммы	8
1.3. Векторные диаграммы	10
1.4. Превращение энергии	11
2. Затухающие колебания	13
2.1. Общий вид уравнения и его решение	13
2.2. Логарифмический декремент затухания и добротность	15
3. Гармонический осциллятор с затуханием под действием внешней вынуждающей силы	19
3.1. Действие постоянной внешней силы	19
3.2. Действие периодических толчков	20
3.3. Действие синусоидальной силы	23
4. Параметрические колебания	30

Учебное издание

Гавриков Андрей Владимирович

Ворона Назар Александрович

Механические колебания

Учебно-методическое пособие

Редактор *Л.В. Себова*. Корректор *В.А. Дружинина*

Подписано в печать 15.12.2011. Формат 60 × 84¹/₁₆. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 500 экз.

Заказ № 104.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
e-mail: rio@mail.mipt.ru