

# Анализ простой автоколебательной системы

Булыгин В.С.

27 ноября 2012 г.

Автоколебаниями называются незатухающие колебания в нелинейной диссипативной системе, поддерживаемые за счёт энергии внешнего источника, но (в отличие от вынужденных колебаний) при отсутствии переменного внешнего воздействия: не только период, но и амплитуда колебаний определяются свойствами самой системы и самостоятельно устанавливаются такими, что поступление энергии от источника в точности компенсирует энергетические потери в системе. Примерами автоколебаний являются колебания тока в ламповом или транзисторном генераторах (питающее напряжение постоянно), колебания маятника или же балансира в механических часах (усилие пружины постоянно), звучание органной трубы (скорость подачи воздуха постоянна), колебания скрипичной или виолончельной струны (скорость движения смычка постоянна) и т. п.

Английский учёный Уильям Фруд (Фроуд) обнаружил, что если подвес физического маятника трётся о равномерно вращающийся вал, то, регулируя скорость вращения вала, можно или увеличивать амплитуду колебаний маятника, или же неограниченно долго поддерживать эти колебания, сделав их незатухающими. Рэлей объяснил это явление тем, что взаимное трение вала и подвеса маятника уменьшается с ростом скорости их относительного движения, поэтому когда они двигаются в одну сторону маятник увлекается валом сильнее, чем тормозится при своём движении в противоположном направлении [1].

Маятник Фруда является известным примером автоколебательной механической системы, исследование его движения проводилось в работах [2], [3]. Рассмотрим более простую автоколебательную систему этого типа, представляющую собой пружинный маятник, груз которого касается наклонной ленты, равномерно движущейся со скоростью  $\vec{V}$  (см. рис. 1).

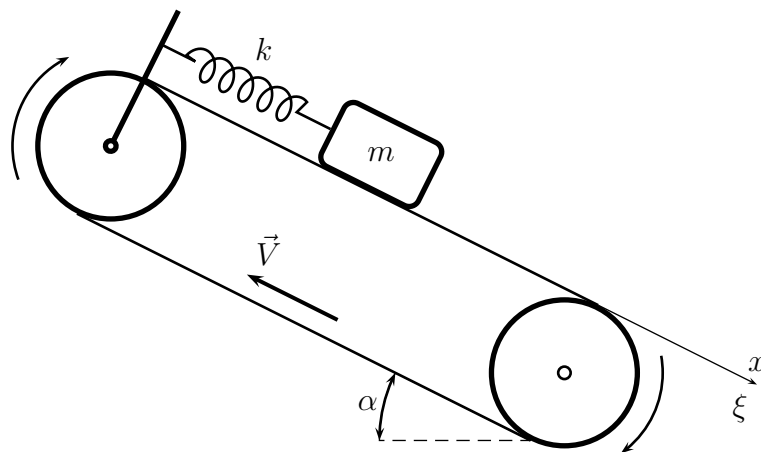


Рис. 1. Пружинный маятник на движущейся ленте.

Выберем начало отсчёта оси  $x$  в конце недеформированной пружины, тогда 2-й закон Ньютона для маятника в проекции на ось  $x$  записывается в виде:

$$m\ddot{x} = -kx + mg \sin \alpha + \mu(V - \dot{x}) \cdot mg \cos \alpha$$

где  $m$  — масса груза,  $k$  — жёсткость пружины,  $\mu(v_{\text{отн}})$  коэффициент трения, зависящий от относительной скорости  $v_{\text{отн}}$  ленты и груза. Отсюда получаем

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g \sin \alpha + g_\alpha \mu(V - \dot{x}) \quad (1)$$

где  $\omega = \sqrt{k/m}$  — циклическая частота свободных колебаний маятника и  $g_\alpha \equiv g \cos \alpha$ . Положение равновесия маятника  $x_0(V)$  на движущейся ленте зависит от её скорости  $V$  и находится из уравнения (1), в котором следует положить  $\ddot{x} = 0$  и  $\dot{x} = 0$ , откуда

$$x_0(V) = \frac{g \sin \alpha + g_\alpha \mu(V)}{\omega^2} = \frac{g \sin \alpha + \mu(V) g \cos \alpha}{\omega^2}.$$

Перенесём начало отсчёта положения маятника в положения равновесия. Для этого введём новую переменную  $\xi(t) = x(t) - x_0(V)$ , после чего уравнение движения маятника примет вид:

$$\ddot{\xi} + \omega^2 \xi = g_\alpha [\mu(V - \dot{\xi}) - \mu(V)]. \quad (2)$$

В работах [2], [3] для объяснения существования автоколебательного режима маятника Фруда использовалась полиномиальная аппроксимация зависимости коэффициента трения  $\mu$  от скорости, с ростом скорости сначала падающая, а затем растущая. Как будет показано ниже, автоколебания возникают и в более простой модели, когда достаточно только падения величины коэффициента трения при увеличении скорости и оно происходит по линейному закону (см. рис. 2).

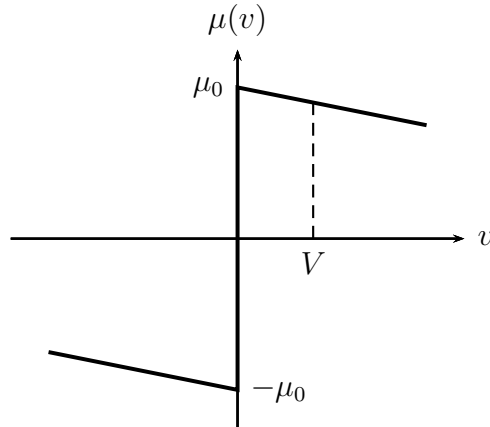


Рис. 2. Зависимость коэффициента трения от относительной скорости  $v = v_{\text{отн}}$ .

Таким образом, принимаем:

$$\mu(v) = \mu_0 \operatorname{sgn}(v) - \mu_1 v, \quad \mu_1 = - \left. \frac{d\mu}{dv} \right|_{v=0} > 0,$$

где знаковая функция

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x < 0, \\ +1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Так как  $\operatorname{sgn}(x) = H(x) - H(-x) = 1 - 2H(-x)$ , где

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \\ 1 & \text{при } x > 0 \end{cases} \quad (3)$$

— функция Хевисайда (единичная функция), то для коэффициента трения имеем выражение:

$$\mu(v) = \mu_0 [1 - 2H(-v)] - \mu_1 v$$

отсюда, с учётом, что  $\mu(V) = \mu_0 - \mu_1 V$  (см. также рис. 2), находим

$$\mu(V - \dot{\xi}) - \mu(V) = \mu_0 \left[ 1 - 2H(\dot{\xi} - V) \right] - \mu_1(V - \dot{\xi}) - (\mu_0 - \mu_1 V) = \mu_1 \dot{\xi} - 2\mu_0 H(\dot{\xi} - V),$$

и уравнение (2) принимает вид

$$\ddot{\xi} - \mu_1 g_\alpha \dot{\xi} + \omega^2 \xi = -2\mu_0 g_\alpha \cdot H(\dot{\xi} - V) = \begin{cases} 0 & \text{при } \dot{\xi} < V, \\ -2g_\alpha \mu_0 & \text{при } \dot{\xi} > V. \end{cases} \quad (4)$$

Как следует из этого уравнения, положение равновесия маятника является неустойчивым (т. е. движущаяся лента возбуждает колебания маятника). Действительно, если груз в начальный момент времени отошёл от положения равновесия на некоторое расстояние  $A_0$  (т. е.  $\xi(0) = A_0$ ), то при  $\dot{\xi}(0) = 0$  и ещё не очень больших скоростях (пока  $\dot{\xi}(t) < V$ ) движение груза при слабой зависимости трения от скорости (когда  $\frac{1}{2}\mu_1 g_\alpha < \omega$ ) согласно (4) описывается выражением

$$\xi(t) = A_0 \cdot \exp\left(\frac{\mu_1 g_\alpha t}{2}\right) \cdot \cos\left(t\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}\mu_1^2 g_\alpha^2}\right), \quad (5)$$

т. е. амплитуда колебаний маятника экспоненциально увеличивается со временем до тех пор, пока его скорость движения  $\dot{\xi}(t)$  не станет превышать скорость движения ленты  $V$  и в уравнении (4) уже станет меняться правая часть. Положение равновесия неустойчиво и при сильной зависимости трения от скорости (когда  $\frac{1}{2}\mu_1 g_\alpha > \omega$ ), в этом случае отклонение груза от положения равновесия увеличивается монотонно (без колебаний).

Для лучшей обзримости дальнейших выкладок приведём уравнение (4) к безразмерному виду. Введём характерную скорость

$$V_c = \frac{2\mu_0}{\pi\mu_1} = \frac{2\mu_0}{\pi \left| \frac{d\mu}{dv} \right|_{v=0}} = \frac{2}{\pi \left| \frac{d}{dv} \ln \mu(v) \right|_{v=0}} \quad (6)$$

(ниже будет показано, что устойчивые автоколебания существуют при скорости ленты  $V < V_c$ ), безразмерную координату

$$\psi = \frac{\omega}{V_c} \xi \quad (7)$$

и безразмерное время

$$\tau = \omega t \quad (8)$$

Так как, согласно (7) и (8):

$$\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{V_c}{\omega} \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{V_c}{\omega} \frac{d\psi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = V_c \frac{d\psi}{d\tau}, \quad \ddot{\xi} = \omega \frac{d\dot{\xi}}{d\tau} = \omega V_c \frac{d^2\psi}{d\tau^2}, \quad \omega^2 \xi = \omega V_c \psi,$$

то, подставляя эти выражения в уравнение (4), после деления на  $\omega V_c$  получаем

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} - \frac{\mu_1 g_\alpha}{\omega} \frac{d\psi}{d\tau} + \psi = -\frac{2\mu_0 g_\alpha}{\omega V_c} \cdot H\left(V_c \frac{d\psi}{d\tau} - V\right).$$

Введём обозначение

$$2n = \frac{\mu_1 g_\alpha}{\omega}, \quad (9)$$

тогда, с учётом (6),  $\frac{2\mu_0 g_\alpha}{\omega V_c} = 2\pi n$  и поскольку  $H\left(V_c \frac{d\psi}{d\tau} - V\right) = H\left(\frac{d\psi}{d\tau} - \frac{V}{V_c}\right) = H\left(\frac{d\psi}{d\tau} - v\right)$  где

$$v = \frac{V}{V_c} \quad (10)$$

— безразмерная скорость движения ленты, то безразмерное уравнение колебаний маятника окончательно запишется в виде

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} - 2n\frac{d\psi}{d\tau} + \psi = -2\pi n \cdot H \left( \frac{d\psi}{d\tau} - v \right) = \begin{cases} 0 & \text{при } \frac{d\psi}{d\tau} < v \\ -2\pi n & \text{при } \frac{d\psi}{d\tau} > v \end{cases} \quad (11)$$

зависящем только от двух параметров: безразмерной скорости ленты  $v$  и  $n$  — показателя возрастания со временем  $\tau$  амплитуды колебаний маятника, пока скорость груза  $\frac{d\psi}{d\tau}$  не превосходит скорости ленты  $v$ .

Уравнение (11) является кусочно-линейным дифференциальным уравнением и поэтому может быть решено точно: решения, полученные при нулевой правой части и при правой части, равной  $-2\pi n$ , сшиваются таким образом, чтобы в моменты времени, когда  $\frac{d\psi}{d\tau} = v$ , у этих решений совпадали  $\psi$  (груз не может мгновенно изменить своё положение) и совпадали  $\frac{d\psi}{d\tau}$  (на груз не действуют бесконечные (ударные) силы, которые могли бы мгновенно изменить его скорость). Однако точное решение является труднообозримым и поэтому мы получим приближённое решение уравнения (11) методом Ван-дер-Поля (методом медленно меняющихся амплитуд) [4]. Для этого перепишем уравнение (11) в форме

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \psi = f \left( \frac{d\psi}{d\tau} \right), \quad (12)$$

где

$$f \left( \frac{d\psi}{d\tau} \right) = 2n\frac{d\psi}{d\tau} - 2\pi n \cdot H \left( \frac{d\psi}{d\tau} - v \right), \quad (13)$$

т. е. выделим в уравнении часть, описывающую гармонические колебания, а остальные члены уравнения, перенесённые в правую часть, будем рассматривать как причину возмущения чисто гармонического движения; в общем случае правая часть может нелинейно зависеть и от  $\psi$ , и от  $\frac{d\psi}{d\tau}$ .

Будем теперь искать решение уравнения (12) в виде колебания с переменной амплитудой и фазой, возмущающей основную частоту:

$$\psi(\tau) = a(\tau) \cos [\tau + \varphi(\tau)] = a(\tau) \cos \Phi(\tau). \quad (14)$$

Представление одной функции  $\psi(\tau)$  в виде комбинации двух функций:  $a(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  можно сделать бесконечным числом способов, из них выбираем такой, чтобы производная

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \frac{da}{d\tau} \cos \Phi - \frac{d\Phi}{d\tau} a \sin \Phi = \frac{da}{d\tau} \cos \Phi - a \sin \Phi - \frac{d\varphi}{d\tau} a \sin \Phi = \left( \frac{da}{d\tau} \cos \Phi - \frac{d\varphi}{d\tau} a \sin \Phi \right) - a \sin \Phi$$

приняла простейший вид:

$$\frac{d\psi}{d\tau} = -a \sin \Phi, \quad (15)$$

что происходит при выполнении условия:

$$\frac{da}{d\tau} \cos \Phi - \frac{d\varphi}{d\tau} a \sin \Phi = 0. \quad (16)$$

Дифференцируя (15) ещё раз, находим:

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} = -\frac{da}{d\tau} \sin \Phi - \frac{d\Phi}{d\tau} a \cos \Phi = - \left( \frac{da}{d\tau} \sin \Phi + \frac{d\varphi}{d\tau} a \cos \Phi \right) - \psi,$$

что после подстановки в уравнение (12), с учётом (15) даёт:

$$\frac{da}{d\tau} \sin \Phi + \frac{d\varphi}{d\tau} a \cos \Phi = -f(-a \sin \Phi). \quad (17)$$

Разрешая уравнения (16) и (17) относительно  $\frac{da}{d\tau}$  и  $\frac{d\varphi}{d\tau}$  получаем систему двух нелинейных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \frac{da}{d\tau} = -f(-a \sin \Phi) \sin \Phi \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{1}{a} f(-a \sin \Phi) \cos \Phi \end{cases} \quad (18)$$

математически эквивалентную исходному уравнению второго порядка (12). Следуя методу Ван-дер-Поля, будем считать теперь  $a(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  медленно меняющимися функциями (почти не изменяющимися за период колебания) и усредним уравнения (18) по быстрой переменной  $\Phi$  (она пропорциональна  $\tau$ ), считая при усреднении  $a(\tau)$ ,  $\varphi(\tau)$ ,  $\frac{da}{d\tau}$  и  $\frac{d\varphi}{d\tau}$  константами. Усреднение сводится к интегрированию выражение по  $\Phi$  за период (равный в нашем случае  $2\pi$ ) и делению результата интегрирования на величину периода, в результате получается следующая укороченная система уравнений движения маятника:

$$\begin{cases} \frac{da}{d\tau} = F_S(a) \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{1}{a} F_C(a) \end{cases} \quad (19)$$

где введены обозначения для усреднённых значений правых частей уравнений (18):

$$F_C(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -f(-a \sin \Phi) \cos \Phi d\Phi, \quad F_S(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -f(-a \sin \Phi) \sin \Phi d\Phi.$$

Заметим, что если в точной системе (18) искомые функции  $a(\tau)$  и  $\varphi(\tau)$  входят в оба уравнения и эти уравнения надо решать совместно, то укороченная система (19) является расщеплённой и её уравнения можно решать поочерёдно: решить первое уравнение и найти  $a(\tau)$ , затем — если недостаточно знания, как ведёт себя только амплитуда — решить второе, найти  $\varphi(\tau)$  и, тем самым, найти всё приближённое решение (14).

Согласно (13) имеем:

$$-f(-a \sin \Phi) = 2na \sin \Phi + 2\pi n \cdot H(-a \sin \Phi - v) = 2na \sin \Phi + 2\pi n \cdot H\left(-\sin \Phi - \frac{v}{a}\right),$$

поэтому

$$\begin{aligned} F_C(a) &= \frac{na}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \Phi \cos \Phi d\Phi + n \int_0^{2\pi} H\left(-\sin \Phi - \frac{v}{a}\right) \cos \Phi d\Phi = \\ &= n \int_0^{2\pi} H\left(-\sin \Phi - \frac{v}{a}\right) \cos \Phi d\Phi \\ F_S(a) &= \frac{na}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \Phi d\Phi + n \int_0^{2\pi} H\left(-\sin \Phi - \frac{v}{a}\right) \sin \Phi d\Phi = \\ &= na + n \int_0^{2\pi} H\left(-\sin \Phi - \frac{v}{a}\right) \sin \Phi d\Phi \end{aligned}$$

Так как  $H\left(-\sin \Phi - \frac{v}{a}\right) = 0$  при  $a < v$ , то эти выражения переписываются в виде:

$$F_C(a) = nF_{C_1}(a) \cdot H\left(1 - \frac{v}{a}\right), \quad F_S(a) = na + nF_{S_1}(a) \cdot H\left(1 - \frac{v}{a}\right), \quad (20)$$

где теперь интегралы

$$F_{C_1}(a) = \int_0^{2\pi} H\left(-\sin \Phi - \frac{v}{a}\right) \cos \Phi d\Phi, \quad F_{S_1}(a) = \int_0^{2\pi} H\left(-\sin \Phi - \frac{v}{a}\right) \sin \Phi d\Phi$$

достаточно рассматривать только при  $a > v$ . Поскольку функция Хэвисайда  $H\left(-\sin \Phi - \frac{v}{a}\right)$  отлична от нуля (и равна 1) при  $-\sin \Phi > \frac{v}{a}$ , т. е. при  $\Phi \in (\pi + \beta, 2\pi - \beta)$ , где  $\beta = \arcsin \frac{v}{a}$ , то

$$\begin{aligned} F_{C_1}(a) &= \int_{\pi+\beta}^{2\pi-\beta} \cos \Phi d\Phi = \sin(2\pi - \beta) - \sin(\pi + \beta) = 0, \\ F_{S_1}(a) &= \int_{\pi+\beta}^{2\pi-\beta} \sin \Phi d\Phi = -\cos(2\pi - \beta) + \cos(\pi + \beta) = \\ &= -2 \cos \beta = -2\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -2\sqrt{1 - \left(\frac{v}{a}\right)^2} \end{aligned}$$

и, согласно (19) и (20), укороченная система уравнений, описывающих колебания груза на движущейся ленте, имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{da}{d\tau} = na - 2n\sqrt{1 - \left(\frac{v}{a}\right)^2} \cdot H\left(1 - \frac{v}{a}\right) \\ \frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \end{cases} \quad (21)$$

Из второго уравнения (21) следует:  $\varphi(\tau) = \varphi_0 = \text{const}$ , так что, согласно (14), искомое решение имеет теперь форму

$$\psi(\tau) = a(\tau) \cos(\tau + \varphi_0), \quad (22)$$

где амплитуда  $a(\tau)$  находится из первого уравнения (21). При малых амплитудах ( $a < v$ ,  $H = 0$ ) решением этого уравнения является  $a(\tau) = a_0 e^{-n\tau}$ , т. е. решение укороченных уравнений, согласно (22), имеет в этом случае вид

$$\psi(\tau) = a_0 e^{-n\tau} \cos(\tau + \varphi_0). \quad (23)$$

При  $\varphi_0 = 0$  и  $a_0 = \frac{\omega}{V_c} A_0$  (см. (7)) это решение соответствует точному решению (5) при тех же условиях, поскольку с помощью (8) и (9) получаем из (5):

$$\begin{aligned} \xi(t) &= A_0 \cdot \exp\left(\frac{\mu_1 g_\alpha t}{2}\right) \cdot \cos t \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4} \mu_1^2 g_\alpha^2} = A_0 \cdot \exp\left(\frac{\mu_1 g_\alpha \omega t}{2\omega}\right) \cdot \cos \omega t \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_1 g_\alpha}{2\omega}\right)^2} = \\ &= A_0 e^{n\tau} \cos \tau \sqrt{1 - n^2} \simeq A_0 e^{n\tau} \cos \tau \left(1 - \frac{1}{2} n^2\right) \simeq A_0 e^{n\tau} \cos \tau = \frac{V_c}{\omega} a_0 e^{n\tau} \cos \tau = \frac{V_c}{\omega} \psi(\tau), \end{aligned}$$

т. е. точное решение (5), описывающее процесс нарастания колебаний, совпадает с приближённым решением (23), когда  $\frac{1}{2} n^2$  мало по сравнению с 1, что и является условием медленности изменения (экспоненциального нарастания) амплитуды колебаний, использованной при переходе от точных уравнений (18) к приближённым усреднённым укороченным уравнениям (19).

Таким образом, как показывает решение (23), автоколебания не существуют, пока безразмерная амплитуда  $a$  колебаний груза меньше безразмерной скорости ленты  $v$ , следовательно, автоколебания груза на движущейся ленте могут быть только тогда, когда  $a$  превысит  $v$ . Выясним теперь, при каких условиях могут существовать устойчивые автоколебания груза на движущейся ленте.

Можно заметить, что медленно меняющаяся амплитуда  $a$  зависит, согласно первому уравнению (21), от медленного времени  $\theta$ , где (см. (8) и (9))

$$\theta = n\tau = n\omega t = \frac{1}{2}\mu_1 g_\alpha t, \quad (24)$$

и, поскольку  $\frac{da}{d\tau} = \frac{da}{d\theta} \frac{d\theta}{d\tau} = n \frac{da}{d\theta}$ , то уравнение для  $a(\theta)$  принимает вид

$$\frac{da}{d\theta} = a - 2\sqrt{1 - \left(\frac{v}{a}\right)^2} \cdot H\left(1 - \frac{v}{a}\right), \quad (25)$$

зависящий уже только от единственного параметра  $v$  — безразмерной скорости ленты.

Уравнение (25) является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными и, в принципе, может быть проинтегрировано (решение будет иметь вид  $\theta - \theta_0 = F(a)$ , где  $\theta_0$  — момент времени, когда амплитуда  $a(\theta_0) = v$ ). Однако, для нахождения условий существования автоколебаний полное решение не требуется. Действительно, для возможности автоколебаний — колебаний с постоянной амплитудой — необходимо выполнения условия  $\frac{da}{d\theta} = 0$ , или (см. (25))

$$a - 2\sqrt{1 - \left(\frac{v}{a}\right)^2} = 0,$$

откуда возможные амплитуды автоколебаний даются выражениями:

$$a_1 = \sqrt{2}\sqrt{1 - \sqrt{1 - v^2}}, \quad a_2 = \sqrt{2}\sqrt{1 + \sqrt{1 - v^2}}, \quad (26)$$

которые, как отмечалось ранее, существуют только при  $v < 1$ , т.е. (см. (10) и (6)) при скорости ленты  $V < V_c$ .

При  $v > 1$  правая часть уравнения (25) всегда положительна (см. рис. 3), скорость роста амплитуды  $\frac{da}{d\theta} > 0$ , т.е. амплитуда колебаний маятника будет в принятой модели неограниченно возрастать (реально её рост ограничит нелинейность пружины или же маятник разрушится).

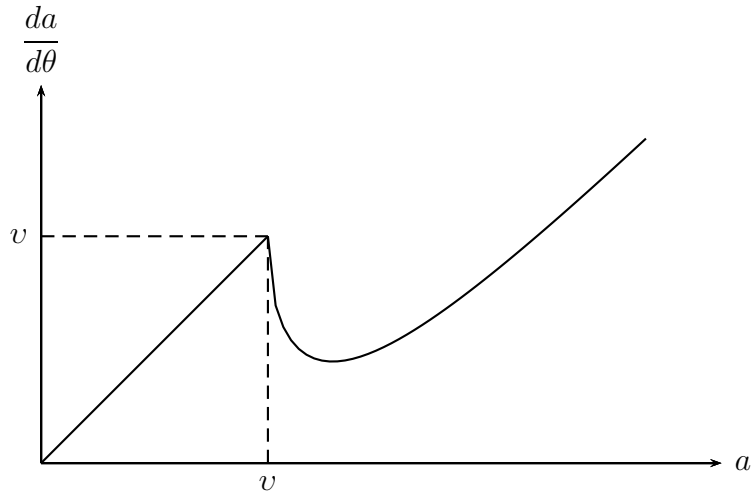


Рис. 3. Скорость ленты больше критической ( $v > 1$ ), неограниченный рост амплитуды.

При скорости ленты  $v = 1$  ( $V = V_c$ ), как видно из рис. 4, возникает полуустойчивый предельный цикл с безразмерной амплитудой колебания струны  $a_{1,2} = \sqrt{2}$  (при которой скорость роста амплитуды обращается в нуль); при этом, если амплитуда колебания уменьшится, то она будет возвращаться к  $a_{1,2}$  (т.к.  $\frac{da}{d\theta} > 0$ ), а если увеличится, то будет продолжать неограниченно возрастать, поскольку снова  $\frac{da}{d\theta} > 0$ .

При скорости ленты  $v < 1$  ( $V < V_c$ ), как видно из рис. 5, возникнет два предельных цикла с безразмерными амплитудами колебаний  $a_1$  и  $a_2$ , даваемыми выражениями (26). При этом

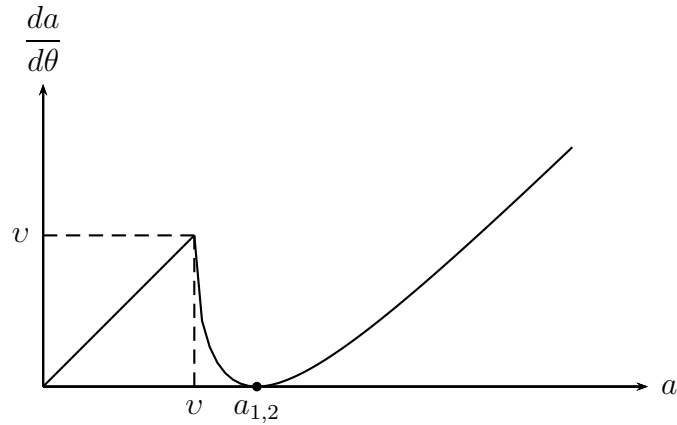


Рис. 4. Скорость ленты равна критической ( $v = 1$ ), полуустойчивый предельный цикл.

цикл с амплитудой  $a_1$  будет устойчивым, так как при уменьшении амплитуды от значения  $a_1$  скорость роста амплитуды  $\frac{da}{d\theta} > 0$  и амплитуда начнёт возрастать, а при увеличении амплитуды от  $a_1$  —  $\frac{da}{d\theta} < 0$  и амплитуда начнёт убывать. Предельный цикл с амплитудой  $a_2$  будет неустойчивым: при уменьшении амплитуды от  $a_2$  скорость её изменения  $\frac{da}{d\theta} < 0$  и амплитуда будет продолжать уменьшаться до значения  $a_1$ , а при увеличении от  $a_2$ , т. к.  $\frac{da}{d\theta} > 0$ , амплитуда будет продолжать неограниченно возрастать).

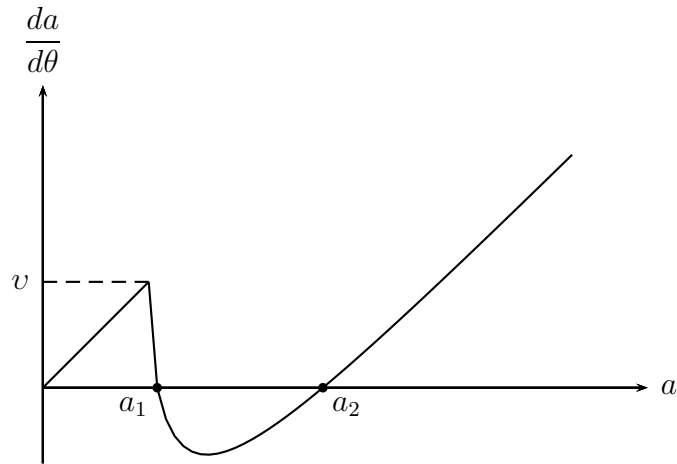


Рис. 5. Скорость ленты меньше критической ( $v < 1$ ), устойчивый (амплитуда  $a_1$ ) и неустойчивый (амплитуда  $a_2$ ) предельные циклы.

Таким образом, устойчивые автоколебания пружинного маятника под воздействием движущейся ленты возникают при скорости ленты  $V < V_c$ , при этом, согласно (7) и (26), амплитуда автоколебаний маятника даётся выражением:

$$A = \frac{V_c}{\omega} a_1 = \frac{V_c}{\omega} \sqrt{2 \left( 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{V}{V_c} \right)^2} \right)},$$

где характерная скорость  $V_c$  определяется выражением (6). Зависимость амплитуды автоколебания груза на движущейся ленте от скорости ленты изображена на рис. 6.

## Список литературы

- [1] Рэлей (Дж.В. Стретт). Теория звука. — М.: Государственное издательство технической и теоретической литературы, 1955. Т. 1. С. 234–235.



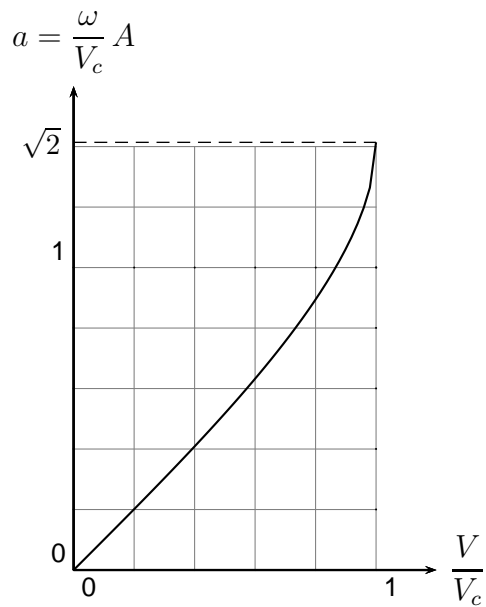


Рис. 6. Зависимость нормированной амплитуды  $a$  устойчивого автоколебания груза на ленте от скорости движения ленты  $V$ .

- [2] Стрелков С.П. Маятник Фруда. // ЖТФ, т. 3 (1933), вып. 4, с. 563.
- [3] Жуковский Н.Е. О движении маятника с трением в точке подвеса. — М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. Соб. соч., т. 1. С. 290.
- [4] Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981.