

Лабораторная работа 1.4.8

Измерение модуля Юнга методом акустического резонанса

Цель работы: исследование явления акустического резонанса. Измерение скорости распространения продольных колебаний в тонких стержнях. Измерение модуля Юнга различных материалов.

В работе используются: генератор звуковых частот, частотомер, осциллограф, электромагнитные излучатель и приемник колебаний, набор стержней из различных материалов (стали, алюминия, меди).

Распространение продольных волн в тонких стержнях

Акустические волны, распространяющиеся в металлических стержнях, существенно отличаются от волн в неограниченной среде. Строгий анализ распространения таких волн связан с довольно громоздкими математическими расчетами. Будем рассматривать волны, длина λ которых велика по сравнению с радиусом R стержня. Опишем распространение продольной волны вдоль оси тонкого стержня постоянного сечения площадью S . Стержень считается тонким в том случае, когда радиус стержня R мал по сравнению с длиной волны λ , т. е. $R / \lambda \ll 1$.

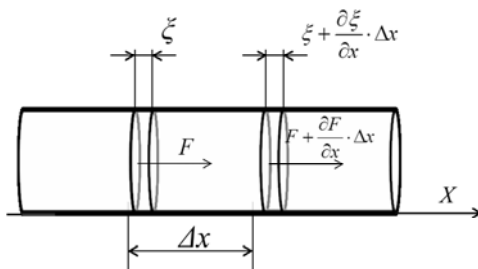


Рис. 1. Силы, действующие на элемент стержня при продольных колебаниях

Направим ось x вдоль геометрической оси стержня (рис. 1). Под действием продольной силы F элементарный отрезок стержня Δx , ограниченный плоскостями Δx и $(x + \Delta x)$, растянется или сожмется на величину $\Delta \xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} \Delta x$, где $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ — относительное удлинение, т. е. деформация элемента стержня. Напряжение σ (т. е. сила, действующая на единицу поперечного сечения стержня) согласно закону Гука равно

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (1)$$

Коэффициент пропорциональности E носит название модуля Юнга и имеет размерность Н/м².

В результате переменной деформации вдоль оси стержня будет распространяться продольная волна. Действительно, в сечениях x и $x + \Delta x$ напряжения будут различными, а их разность можно записать следующим образом:

$$\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x) = \frac{1}{S} \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F}{S} \right) \Delta x = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \Delta x. \quad (2)$$

Эта разность напряжений вызовет движение элемента стержня массой $m = S\rho \Delta x$ вдоль оси x (ρ — плотность материала стержня). Используя соотношения (1) и (2), на основании второго закона Ньютона уравнение движения этого элемента можно записать в виде:

$$S\rho \Delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = SE \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Delta x. \quad (3)$$

Обозначив E / ρ через $c_{\text{ст}}^2$, выражение (3) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c_{\text{ст}}^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (4)$$

Это уравнение носит название волнового уравнения. Оно, в частности, описывает распространение продольных волн в стержне. Общее решение волнового уравнения можно представить в форме двух бегущих волн, распространяющихся в обе стороны вдоль оси x со скоростью $c_{\text{ст}}$:

$$\xi(x, t) = f(c_{\text{ст}}t - x) + g(c_{\text{ст}}t + x), \quad (5)$$

где f и g — произвольные функции (определяемые начальными и граничными условиями).

Параметр $c_{\text{ст}}$ в выражениях (4) и (5) имеет смысл скорости распространения волны. В рассматриваемом нами случае $R / \lambda \rightarrow 0$ скорость распространения упругой продольной волны стремится к величине

$$c_{\text{ст}} \approx \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (6)$$

В данной работе исследуются именно такие волны.

Отметим, что в высокочастотном (т. е. коротковолновом) пределе при $\lambda \ll R$ скорость акустических волн в стержне стремится к скорости продольных волн в неограниченной среде (μ — коэффициент Пуассона):

$$c_i = \sqrt{\frac{E(1 - \mu)}{\rho(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}. \quad (7)$$

Собственные колебания стержня

В случае гармонического возбуждения колебаний с частотой f продольная волна в тонком стержне может быть представлена в виде суперпозиции двух бегущих навстречу друг другу синусоидальных волн:

$$\xi(x, t) = A_1 \sin(\omega t - kx + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega t + kx + \varphi_2), \quad (8)$$

где $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота, коэффициент $k = 2\pi / \lambda$ называют волновым числом или пространственной частотой. Здесь первое слагаемое описывает волну, бегущую в положительном направлении по оси x , второе — в отрицательном. Скорость их распространения равна

$$c_{\text{ст}} = \omega / k.$$

Соотношения между амплитудами $A_{1,2}$ и начальными фазами $\varphi_{1,2}$, а также возможные частоты колебаний ω определяются граничными условиями на концах стержня.

Предположим, во-первых, что при отражении волны от каждого из концов не происходит потери энергии — в таком случае будут одинаковы амплитуды «падающей» и «отражённой» волн на каждом из концов:

$$A_1 \approx A_2. \quad (9)$$

Далее, если концы стержня *не закреплены*, то напряжение (1) в них должно быть равно нулю. Положив координаты концов стержня равными $x = 0$ и $x = L$, запишем эти условия как

$$\left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \xi}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (10)$$

Соотношения (10) должны выполняться в произвольный момент времени.

Взяв производную по x от (8) в точке $x = 0$, получим, что для справедливости (10) необходимо

$$\varphi_2 = \varphi_1. \quad (11)$$

Таким образом, *при отражении синусоидальной волны от свободного конца стержня, её фаза не изменяется* (если же концы закреплены, нетрудно получить, что фазы волн должны отличаться на π).

Теперь перепишем (8), используя условия (9) и (11) и формулу суммы синусов:

$$\xi(x, t) = 2A \cos(kx) \sin(\omega t + \varphi). \quad (12)$$

Колебания вида (12) называют гармонической стоячей волной.

Подстановка второго условия (10) в (12) даёт уравнение $\sin(kL) = 0$, которое определяет набор допустимых значений волновых чисел:

$$k_n L = \pi n, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

или, выражая (13) через длину волны, получим

$$L = n \frac{\lambda_n}{2}. \quad (13')$$

Таким образом, на длине стержня должно укладываться целое число полуволн. Допустимые значения частот

$$\omega_n = k_n c_{ст} = n \frac{\pi c_{ст}}{L}, \quad \text{или} \quad f_n = n \frac{c_{ст}}{2L} \quad (14)$$

называют собственными частотами колебаний стержня длиной L . Зависимость амплитуды смещения ξ от координаты x для собственных колебаний стержня с незакреплёнными концами при $n = 1, 2, 3$ представлена на рис. 2.

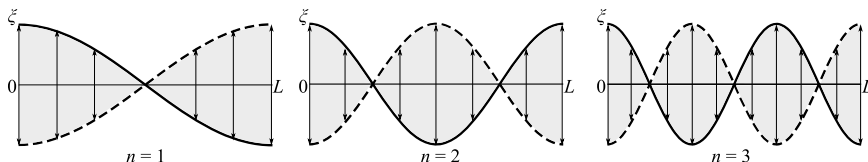


Рис. 2. Собственные продольные колебания стержня с незакреплёнными концами

Заметим, что в реальной системе стоячая волна не может быть реализована в чистом виде: всегда существуют потери энергии, связанные, в том числе, с отражением волн на краях стержня ($A_1 \neq A_2$). Поэтому для поддержания колебаний необходимо наличие некоторого стороннего возбудителя.

Измерение скорости распространения продольных волн в стержне

Зная плотность материала и величину скорости $c_{ст}$ можно по формуле (6) вычислить модуль Юнга материала E . Для определения скорости $c_{ст}$ в данной работе используется метод акустического резонанса. Это явление состоит в том, что при частотах гармонического возбуждения, совпадающих с собственными частотами колебаний стержня $f \approx f_n$, резко увеличивается амплитуда колебаний, при этом в стержне образуется стоячая волна¹.

¹ Заметим, что в идеальном случае резонанс достигался бы при строгом совпадении частот, а амплитуда в резонансе стремилась бы к бесконечности. В реальности возбуждение стоячей волны возможно при малом отклонении частоты от резонансной — тогда амплитуда $A(f - f_n)$ конечна и имеет максимум при $f = f_n$. Как показывается в теории колебаний (см. Лабораторный практикум по общей физике Т. 1. Механика, раздел IV), обратная относительная ширина этого максимума пропорциональна добротности системы: $f / \Delta f \sim Q$.

В данной работе возбуждение колебаний происходит посредством воздействия на торец стержня периодической силой, направленной вдоль его оси. Зная номер гармоники n и частоту f_n , на которой наблюдается резонансное усиление амплитуды колебаний, вызванных периодическим воздействием на торец стержня, можно рассчитать скорость распространения продольных волн в стержне:

$$c_{\text{ст}} = f_n \lambda_n = \frac{2Lf_n}{n}. \quad (15)$$

Таким образом, для того, чтобы измерить скорость $c_{\text{ст}}$, нужно измерить частоты резонансных гармоник для различных n , и зная геометрические размеры стержня, рассчитать скорость по формуле (15). Далее, по формуле (6) можно рассчитать и модуль Юнга материала, из которого изготовлен стержень. Этот метод определения модуля Юнга материала является одним из самых точных.

Описание экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 3. Исследуемый стержень 5 размещается на стойке 10. Возбуждение и прием колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями 4 и 6, расположенными рядом с торцами стержня. Крепления 9, 11 электромагнитов дают возможность регулировать их расположение по высоте, а также перемещать вправо-влево по столу 12.

Электромагнит 4 служит для возбуждения упругих механических продольных колебаний в стержне. На него с генератора звуковой частоты 1 подается сигнал синусоидальной формы. Сигнал с опорного выхода (выход синхронизации) генератора поступает на частотомер 2 и вход канала **СН 1(X)** осциллографа 3.

Протекающий по катушке возбуждающего преобразователя 4 переменный ток I_{\sim} создает магнитное поле B_{\sim} , пропорциональное I_{\sim} , в котором находится один конец стержня. На этот конец стержня будет действовать переменная сила F_{\sim} , величина которой пропорциональна B^2 (в случае немагнитных стержней на их концы наклеиваются тонкие диски из магнитной стали). Для получения линейной связи между возбуждающей силой F_{\sim} и током I_{\sim} в преобразователе имеется постоянный магнит, поле которого B_0 значительно больше B_{\sim} . В этом случае действующая на стержень переменная сила пропорциональна

$$F_{\sim} \propto (B_0 + B_{\sim})^2 \approx B_0^2 + 2B_0B_{\sim} \propto \text{const} + B_0I_{\sim},$$

так как $2B_0B_{\sim} \gg B_{\sim}^2$. Линейная связь между током и действующей силой позволяет определить частоту переменной силы по измерению частоты сигнала генератора.

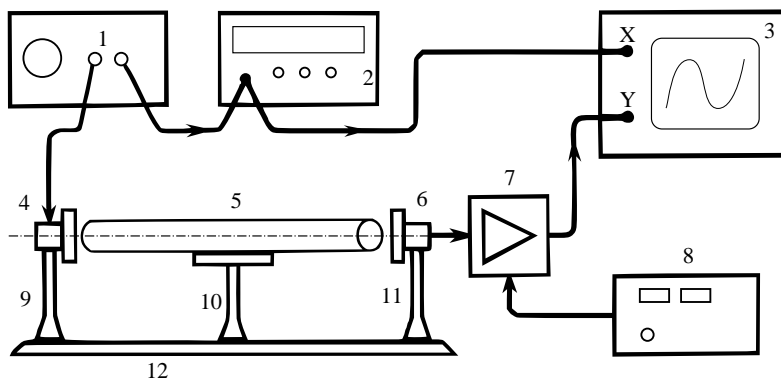


Рис. 3. Схема установки: 1 — генератор звуковой частоты, 2 — частотомер, 3 — осциллограф, 4 — электромагнит-возбудитель, 5 — образец, 6 — электромагнит-приемник, 7 — усилитель звуковой частоты, 8 — блок питания усилителя, 9, 11 — стойки крепления электромагнитов, 10 — стойка крепления образца, 12 — направляющая.

Рядом с другим торцом стержня находится аналогичный электромагнитный датчик 6, который служит для преобразования механических колебаний в электрические.

При колебаниях стержня магнитное поле, в котором находится торец стержня, изменяется и вызывает ЭДС в электромагните 6. Амплитуда этой ЭДС пропорциональна амплитуде колебаний стержня, а частота совпадает с частотой генератора. При настройке генератора на резонансную частоту стержня амплитуда колебаний последнего резко возрастает. ЭДС, наводимая этими колебаниями в приемнике 6, усиливается усилителем 7. С выхода усилителя исследуемый сигнал подается на вход канала **СН 2(Y)** осциллографа.

Подготовка приборов к выполнению эксперимента

1. Для регистрации колебаний стержня в работе используется осциллограф GOS-620. Перед включением осциллографа в сеть необходимо ознакомиться с назначением ручек управления осциллографа (см. Приложение).

Перед включением осциллографа в сеть убедитесь, что органы

управления осциллографа установлены следующим образом:

А) Блок горизонтальной развертки (HORIZONTAL):

Ручка **POSITION** — в среднем положении.

Кнопка **×10 MAG** — отжата.

Ручка **SWP.VAR** — в крайнем правом положении (риска CAL).

Ручка **TIME/DIV** — 0,2 ms.

Б) Блок вертикального отклонения (VERTICAL):

Ручки **POSITION** — в среднем положении.

Внешние ручки **VOLTS/DIV** обоих каналов в положении 5 V/дел, а внутренние — утоплены.

Тумблеры **AC-GND-DC** обоих каналов — в положении **GND** (отключены).

Кнопки **ALT/CHOP** и **INV CH 2** — отжаты.

Вход канала 1 **CH 1(X)** — соединен с выходом сигнала синхронизации генератора.

Вход канала 2 **CH 2(Y)** — соединен с усилителем регистрирующего датчика.

Переключатель **VERTICAL-MODE** — в положении **DUAL**.

В) Блок синхронизации (TRIGGER):

TRIG.ALT — отжата.

LEVEL — в среднем положении.

Переключатель **MODE** — в положении **AUTO**.

SOURCE — в положении **LINE**.

SLOPE — отжата.

2. Для возбуждения колебаний стержня в работе используется генератор ГЗ-112. Перед началом эксперимента ручки генератора должны стоять в следующих положениях: частота — 20 Гц, множитель частоты — 10^2 ; выход — «~» (синусоидальный сигнал); ослабление dB — 0.

3. Частота сигнала регистрируется частотомером GFC-8010H.

ЗАДАНИЕ

1. Включите осциллограф в сеть. Поставьте ручку развертки **TIME/DIV** в положение **X-Y**. На экране появится точка. Отрегулируйте яркость и четкость изображения точки ручками **INTEN** и **FOCUS**. Ручками **POSITION** расположите точку в центре экрана осциллографа. Верните ручку **TIME/DIV** в положение 0,2 ms развертки сигнала.

Внимание! Нельзя долго держать светящуюся точку на экране во избежание прогорания люминофора экрана.

2. Включите в сеть генератор и частотомер. Подайте на вход **CH 1** осциллографа синусоидальный сигнал с генератора частотой 2 кГц. Точное значение частоты определяется по частотомеру. Включите режим **AC** канала **CH 1** осциллографа и убедитесь, что уровень опорного сигнала достаточен — амплитуда синусоиды 2–3 клетки. При необходимости

усилить сигнал, переключая ручки **VOLTS/DIV** в положение $0,2 \div 1$ В/дел.

В дальнейшем усиление канала **СН 1** не меняйте!

3. Включите питание усилителя регистрирующего датчика 8. Включите режим **АС** канала **СН2** осциллографа и увеличьте усиление этого канала, переведя ручку **VOLTS/DIV** в положение 5 В/дел.

Раздвиньте датчики и поместите между ними исследуемый стержень на подставку 10. Рекомендуется вначале провести опыты с медным стержнем длиной $L = (600 \pm 0,5)$ мм.

4. Разместите электромагниты напротив торцов стержня так, чтобы торцы стержня совпали с центрами датчиков, а зазор между полюсами электромагнита и торцевой поверхностью стержней составлял 1–3 мм. Плоскость магнитов должна быть строго перпендикулярна оси стержня. *Не допускайте соприкосновения электромагнита со стержнем.*

5. Предварительно определите диапазон частот генератора, в котором целесообразно искать резонансы. Для этого следует оценить частоту первого резонанса по формуле $f_1 = c_{ст} / 2L$, воспользовавшись табличным значением скорости продольных волн в тонком медном стержне $c_{ст} = 3690$ м/с.

6. Медленно перестраивая звуковой генератор вблизи расчетной частоты f_1 (она должна находиться в диапазоне $2500 \div 4000$ Гц) найдите первый резонанс, наблюдая за амплитудой колебаний на экране осциллографа (режим **DUAL**). При приближении к резонансу амплитуда принятого сигнала (канал **СН 2**) резко возрастает, а амплитуда опорного сигнала (канал **СН 1**) не меняется. Для увеличения сигнала колебаний стержня нужно очень осторожно придвигать датчики к торцам стержня, *не допуская прилипания стержня к датчикам.*

Точно найденный резонанс характеризуется следующими признаками: амплитуда принятого сигнала достигает максимума; амплитуда не меняется во времени (отсутствуют «биения»).

Внимание! Резонансная кривая металлических стержней имеет очень острый пик, его ширина составляет единицы герц. Поэтому подстройку генератора необходимо производить *максимально плавно и медленно.*

В режиме работы осциллографа «**X–Y**» на экране должен наблюдаться эллипс, который при резонансе достигает максимального размера.

7. Определите значение первой резонансной частоты f_1 по индикатору частотомера.

8. Получите резонансы на частотах, соответствующих следующим (кратным) гармоникам. Для этого, плавно перестраивая генератор, добейтесь резонанса вблизи частот $f_n = n f_1$, где $n = 2, 3, \dots$. Постарайтесь измерить резонансные частоты с как можно большим n . Запишите

измеренные значения частот.

9. Определите плотность материала стержня. Для этого необходимо измерить линейные размеры и массу небольшого образца цилиндрической формы, изготовленного из исследуемого материала.

10. Определите среднее значение диаметра исследуемого стержня $d = 2R$, измерив его в нескольких местах. Проверьте справедливость приближения «тонкий стержень»: $R / \lambda \ll 1$.

11. Повторите опыты (п.п. 4–10) со стержнями из стали и дюраля длиной $L = (600 \pm 5)$ мм.

12*. Для стержня из дюраля проведите дополнительный опыт: перестраивая генератор, добейтесь возбуждения первой гармоники f_1 резонансных колебаний в стержне на «половинной» частоте $f_1 / 2$. Пронаблюдайте на экране осциллографа фигуру (в режиме работы «X–Y») и зарисуйте её. Постарайтесь объяснить это явление.

13*. Определите добротность системы, измерив амплитудно-частотную характеристику $A(f - f_1)$ колебаний вблизи первого резонанса.

Ширина максимума $A(f - f_n)$, как известно из теории колебаний (см. Лабораторный практикум по общей физике Т. 1. Механика, раздел IV), связана с добротностью Q стержня как колебательной системы: если Δf — ширина амплитудно-частотной характеристики на уровне $A = \frac{A_{\max}}{\sqrt{2}}$, то

$$Q = \frac{f}{\Delta f}.$$

14. Повторите измерения п.п. 4–10, используя стержни меньшей длины и диаметра.

Обработка результатов

15. Для каждого из исследованных стержней по результатам измерений п.п. 4–11 графики зависимости частоты $f(n)$ от номера гармоники n .

16. По построенным графикам определите соответствующие значения скорости звука $c_{\text{ст}}$. Если точек на графике недостаточно, определите $c_{\text{ст}}$ по среднему значению $f(n) / n$.

17. По найденным скоростям звука определите модуль Юнга E

* Задания, отмеченные звездочкой, выполняются по указанию преподавателя.

исследуемых материалов.

18. Оцените погрешности измерений и полученных результатов. Сравните найденные вами значения модуля Юнга для всех материалов с табличными данными.

19. Прделайте расчёты п.п. 15–18 по результатам измерений на стержнях меньшей длины и диаметра (п. 14). Сравните с результатами, полученными на длинных стержнях.

17.10.2014

ПРИЛОЖЕНИЕ

Назначение органов управления осциллографа GOS-620

1. Экран осциллографа (рис. 1)

POWER (выключатель сетевого питания) — при включении выключателя загорается индикатор под кнопкой «POWER».

INTEN (яркость) — регулировка яркости изображения.

FOCUS (фокус) — регулировка фокуса изображения.

TRACE ROTATION (поворот) — регулировка угла наклона линии развертки изображения относительно линий шкалы экрана.

2. Органы управления развёрткой, расположенные в блоке «HORIZONTAL» передней панели осциллографа (рис.2)

TIME/DIV — устанавливает коэффициент развёртки от 0,2 мс/дел (микросекунд на деление) до 0,5 с/дел (секунд на деление) 20 ступенями. При переводе в положение X-Y (крайнее левое) обеспечивается наблюдение фигур Лиссажу.

SWP.VAR (развертка плавно) — обеспечивает плавную регулировку коэффициента развёртки с перекрытием 2,5 раза в каждом положении переключателя время/дел. **Обратите внимание!** При измерении промежутков времени по расстоянию на экране осциллографа эта ручка должна находиться *в крайнем правом положении* (риска CAL).

POSITION (положение) — перемещает изображение по горизонтали.

x10 MAG (увеличение в 10 раз) — при нажатой кнопке скорость развёртки увеличивается в 10 раз.

3. Органы управления тракта вертикального отклонения (VERTICAL)

CH 1(X) (канал 1) — вход канала 1. В режиме X-Y — входной канал X-оси.

CH 2(Y) (канал 2) — вход канала 2. В режиме X-Y — входной канал Y-оси.

AC-DC-GND — переключатели режима входов усилителя:

DC — открытый вход (на вход усилителя пропускается весь сигнал, включая постоянную составляющую);

AC — закрытый вход (на вход пропускается только переменная составляющая сигнала, то есть последовательно с источником сигнала и осциллографом включается конденсатор емкостью ~ 1 мкФ);

GND — вход усилителя отключается от источника сигнала и заземляется.

POSITION (положение) — регулировка положения лучей обоих каналов по вертикали.

ALT/CHOP — при нажатии на кнопку коммутатор принудительно переключается в режим «попеременный». Происходит одновременная прорисовка обоих каналов – эффект двухлучевого осциллографа. Когда кнопка отжата в двухканальном режиме, режим работы коммутатора выбирается автоматически, исходя из положения ручки время/дел.

INV CH 2 (инвертирование в канале 2) — инвертирование сигнала в канале 2.

VOLTS/DIV (вольт/дел) — дискретные переключатели, устанавливающие коэффициенты отклонения каналов от 5 мВ/дел до 5 В/дел в 10 диапазонах. В середине

— ручка плавного изменения коэффициентов отклонения каналов с перекрытием не менее, чем в 2.5 раза в каждом положении переключателей В/дел. Когда ручка вытянута (режим $\times 5$), происходит увеличение размера изображения (чувствительности усилителя) в 5 раз. Для измерения амплитуд ручка должна находиться в крайнем левом положении.

Переключателями **VERTICAL-MODE** устанавливается режим работы для наблюдения двух сигналов одновременно или по очереди:

CH 1 — на экране наблюдается сигнал канала 1.

CH 2 — на экране наблюдается сигнал канала 2.

DUAL — на экране наблюдаются изображения сигналов обоих каналов.

ADD — на экране наблюдается алгебраическая сумма или разность (при нажатии кнопки **CH 2 INV**) сигналов каналов 1 и 2.

4. Органы управления синхронизации (TRIGGER).

TRIG.ALT — при нажатии развертка поочередно синхронизируется сигналом с 1-го и 2-го каналов. В результате на экране осциллографа появляется устойчивая картина 1-го и 2-го каналов.

TRIGGER MODE — выбор режима работы запуска развертки:

AUTO — автоматический режим запуска развертки; используется, если нет сигнала синхронизации, или его частота меньше 25 Гц;

NORM — ждущий режим: развертка запускается только при наличии входного сигнала;

TV-V — синхронизация по вертикали (по кадрам, в работе не используется);

TV-H — синхронизация по горизонтали (по строкам, в работе не используется).

SOURCE (источник) — выбирает режим внутренней и (или) внешней синхронизации:

CH 1 (канал 1) (X-Y) — развертка синхронизируется сигналом с первого канала.

CH 2 (канал 2) — развертка синхронизируется сигналом со второго канала.

LINE (сеть) — развёртка синхронизируется от питающей сети переменного напряжения.

EXT (внешний) — развёртка синхронизируется внешним сигналом.

LEVEL (уровень) — выбирает уровень исследуемого сигнала, при котором происходит запуск развёртки.

SLOPE (полярность) — переключатель полярности синхронизирующего сигнала:

"+": развёртки синхронизируются положительным перепадом исследуемого сигнала;

"-": развёртки синхронизируются отрицательным перепадом исследуемого сигнала.

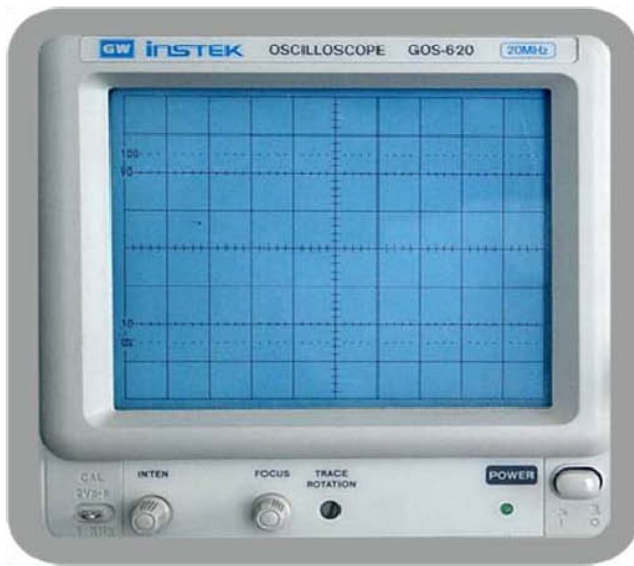


Рис. 1. Экран осциллографа GOS-620



Рис. 2. Расположение ручек на передней панели осциллографа