

Нелинейный маятник.

1 Безразмерное уравнение движения физического маятника с вязким трением.

Уравнение движения физического маятника с учётом вязкого трения:

$$I\ddot{\varphi} + b\dot{\varphi} + mga \sin(\varphi) = 0, \quad (1)$$

где I – момент инерции, b – коэффициент момента сил вязкого трения, m – масса маятника, g – ускорение свободного падения, a – расстоянии от точки подвеса до центра масс. Введя частоту ω_0 , перепишем уравнение (1) в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + \frac{b}{I}\dot{\varphi} + \frac{mga}{I} \sin(\varphi) &= 0 \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{mga}{I}} \\ \ddot{\varphi} + \frac{b}{I}\dot{\varphi} + \omega_0^2 \sin(\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

И приведём полученное уравнение (2) к безразмерному виду, удобно для анализа:

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\varphi}}{\omega_0^2} + \frac{b}{\omega_0 I} \cdot \frac{\dot{\varphi}}{\omega_0} + \sin(\varphi) &= 0 \\ \tau = \omega_0 t, \quad \frac{d}{\omega_0 dt} = \frac{d}{d\tau}, \quad \beta = \frac{b}{\omega_0 I} \\ \varphi'' + \beta\varphi' + \sin(\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

В уравнении (3) производные берутся по безразмерному времени $\tau = \omega_0 t$. При этом максимальное значение амплитуды безразмерной скорости φ' соответствующей колебательному движению маятника без затухания составляет: $\varphi'_{max} = 2$. Отличие решений уравнения (3) от решения нелинейного маятника без затухания определяется только значением безразмерного параметра β , который в дальнейшем предполагается малым:

$$0 < \beta < 0.1 \quad (4)$$

2 Фазовая диаграмма нелинейного маятника с затуханием.

С помощью численного решения уравнения (3) можно определить фазовый портрет нелинейного маятника для заданных начальных условий и параметра затухания β . На рисунке 1 приведён пример фазового портрета для $\beta = 0.1$ и с начальной безразмерной скоростью $\varphi'_0 = 2$. На рисунке также показаны красным цветом сепаратрисы нелинейного маятника без затухания ограничивающие область колебательных решений.



Рис. 1: Пример фазового портрета для нелинейного маятника с затуханием вычисленный с помощью численного интегрирования уравнения движения (3)

3 Закон сохранения энергии для нелинейного маятника с затуханием

Интегрирование уравнения (3) по углу отклонения:

$$\varphi'' d\varphi + \beta \varphi' d\varphi + \sin(\varphi) d\varphi = 0 \rightarrow \int \varphi' d\varphi + \beta \int \varphi' d\varphi + \int \sin(\varphi) d\varphi = Const \rightarrow$$

$$\frac{\varphi'^2}{2} - \cos(\varphi) = -\beta \int \varphi' d\varphi + Const \quad (5)$$

Постоянную интегрирования найдём из начальных условий. В начальный момент времени ($\tau = 0$) будем считать, что маятник проходит положение равновесия ($\varphi = 0$), и имеет скорость φ'_0 , тогда:

$$Const = \frac{\varphi_0'^2}{2} - 1 \quad (6)$$

В момент первого максимального отклонения маятника:

$$-\cos(\varphi_x) = -\beta \int_0^{\varphi_x} \varphi' d\varphi + \frac{\varphi_0'^2}{2} - 1 \rightarrow \beta \int_0^{\varphi_x} \varphi' d\varphi = \frac{\varphi_0'^2}{2} + \cos(\varphi_x) - 1 \rightarrow$$

$$\beta \int_0^{\varphi_x} \varphi' d\varphi = \frac{\varphi_0'^2}{2} - 2 \sin^2\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) \quad (7)$$

При возвращении к положению равновесия угловая скорость маятника φ'_1 из-за трения станет меньше чем начальная φ'_0 :

$$\begin{aligned} \varphi_1'^2 - 1 &= \frac{\varphi_0'^2}{2} - 1 - \beta \int_0^{\varphi_x} \varphi' d\varphi - \beta \int_{\varphi_x}^0 \varphi' d\varphi \rightarrow \\ \frac{\varphi_1'^2}{2} &= \frac{\varphi_0'^2}{2} - \beta \int_0^{\varphi_x} \varphi' d\varphi - \beta \int_{\varphi_x}^0 \varphi' d\varphi \end{aligned} \quad (8)$$

В выражения (7) и (8) входят интегралы учитывающие потери энергии на трение. Потери механической энергии связаны с работой сил трения.

4 Связь амплитуды колебаний и угловых скоростей в положении равновесия.

Для оценки значения интегралов в уравнении (8) используем следующее приближение которое, обосновывается на рисунке 2.

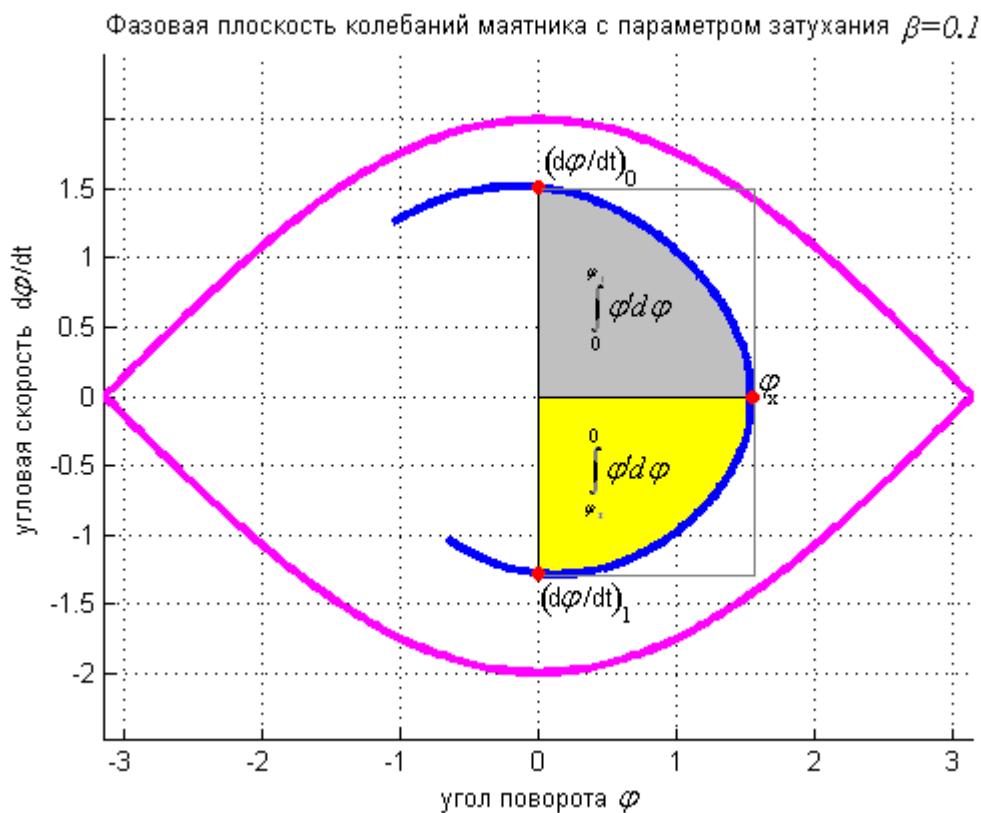


Рис. 2: Участок траектории маятника на фазовой плоскости

Интегралы, входящие в (8) равны площадям заштрихованных на рисунке 2 областей. Примем следующее приближительное правило:

$$\int_0^{\varphi_x} \varphi' d\varphi \approx A \cdot \varphi_x \cdot \varphi'_0$$

$$\int_{\varphi_x}^0 \varphi' d\varphi \approx -A \cdot \varphi_x \cdot \varphi'_1$$
(9)

которое означает, что отношение площади верхней заштрихованной области к площади прямоугольника со сторонами φ'_0 и φ_x такое же как и отношение нижней заштрихованной области к площади прямоугольника со сторонами φ'_1 и φ_x . Знак ‘-’ во втором уравнении введён для учёта отрицательного значения скорости φ'_1 (заметим, что оба интеграла положительны). Это приближительное равенство тем лучше будет выполняться, чем меньше параметр безразмерного затухания. Тогда уравнение

(8) преобразуется:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1'^2}{2} = \frac{\varphi_0'^2}{2} - \beta A \varphi_x (\varphi_0' - \varphi_1') \rightarrow \\ \varphi_0' + \varphi_1' = 2\beta A \varphi_x \end{aligned} \quad (10)$$

А уравнение (7) приводится к виду:

$$\begin{aligned} \beta A \varphi_x \varphi_0' = \frac{\varphi_0'^2}{2} - 2 \sin^2 \left(\frac{\varphi_x}{2} \right) \rightarrow 2\beta A \varphi_x \varphi_0' = \varphi_0'^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi_x}{2} \right) \rightarrow \\ \varphi_0'^2 + \varphi_1' \varphi_0' = \varphi_0'^2 - 4 \sin^2 \left(\frac{\varphi_x}{2} \right) \rightarrow \varphi_1' \varphi_0' = -4 \sin^2 \left(\frac{\varphi_x}{2} \right) \\ \text{или} \end{aligned}$$

$$\sin^2 \left(\frac{\varphi_x}{2} \right) = -\frac{\varphi_1' \varphi_0'}{4} \quad (11a)$$

Здесь знак '-' в правой части учитывает то, что скорости φ_0' и φ_1' всегда должны иметь разные знаки.

Другой способ оценки интегралов (9) состоит в том, что угловая скорость φ' в подынтегральном выражении выводится через формулы (5) и (6) но с параметром затухания $\beta = 0$. (Метод последовательных приближений.) Как показано в приложении 8.1, это приводит к следующему соотношению между амплитудой и скоростями:

$$\sin \left(\frac{\varphi_x}{2} \right)^2 = \frac{\varphi_0'^2 + \varphi_1'^2}{8} \quad (11б)$$

Среднее между (11a) и (11б):

$$\sin \left(\frac{\varphi_x}{2} \right)^2 = \frac{(\varphi_0' - \varphi_1')^2}{16} \quad (11в)$$

Фактически, (11б) – это средний квадрат синуса половинного угла амплитуды, (11в) – квадрат среднего синуса половинного угла амплитуды, а (11a) – это среднее геометрическое. (Имеется в виду усреднение по двум значениям $\sin(\varphi_x/2)^2$ получаемым из модели без учёта трения, $\beta = 0$, для скоростей φ_0' и φ_1' .) Отметим, что эти выражения позволяют вычислять амплитуду колебания без явного знания значения параметра затухания. Но информация об этом параметре связана с различием угловых скоростей φ_0' и φ_1' .

На рисунке 3 показаны графики относительной ошибки выражений (11a), (11б) и (11в) для $\beta = 0.1$ в зависимости от амплитуды, полученные на основе численного решения. Видно, что выражение (11в) является

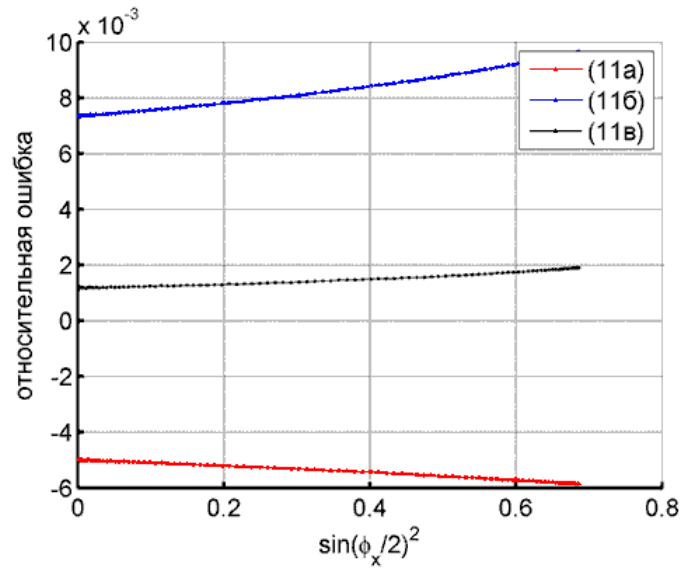


Рис. 3: Относительная точность формул (11а), (11б) и (11в)

наиболее точным для оценки амплитуды колебаний, относительная погрешность не превышает величины 0.2%. Для значений $\beta < 0.1$ формулы (11в) точность будет ещё выше. Такая точность для целей лабораторной работы вполне достаточна.

5 Период колебаний.

Под половиной периода колебаний маятника с затуханием понимается время между двумя последовательными моментами времени прохождения маятником положения своего равновесия. Полупериод:

$$\tau_{\frac{1}{2}} = \int_0^{\varphi_x} \frac{d\varphi}{\varphi'} + \int_{\varphi_x}^0 \frac{d\varphi}{\varphi'} \quad (12)$$

Если полностью пренебречь затуханием, тогда из (5), (6) и (7):

$$\int_0^{\varphi_x} \frac{d\varphi}{\varphi'} = \int_0^{\varphi_x} \frac{d\varphi}{2\sqrt{\sin^2\left(\frac{\varphi_x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}} = K\left(\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)\right) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}\right)^4 + \frac{25}{4} \left(\frac{\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)}{2}\right)^6 + \dots\right) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \left(\frac{\varphi_x}{4}\right)^2 + \frac{11}{12} \left(\frac{\varphi_x}{4}\right)^4 + \dots\right) \quad (13)$$

Через $K()$ обозначена специальная математическая функция - полный эллиптический интеграл первого рода. При переходе от безразмерных величин обратно к размерным получим следующее выражение для периода нелинейных колебаний:

$$T = 2 \cdot \frac{\tau_{\frac{1}{2}}}{\omega_0} = 2 \cdot \frac{\tau_{\frac{1}{2}}}{2\pi/T_0} = T_0 \frac{\tau_{\frac{1}{2}}}{\pi} = T_0 \frac{2 \cdot \left(\sin\left(\frac{\varphi_x}{2}\right)\right)^2}{\pi} \approx T_0 \left(1 + \left(\frac{\varphi_x}{4}\right)^2 + \frac{11}{12} \left(\frac{\varphi_x}{4}\right)^4 + \dots\right) \quad (14)$$

Здесь T_0 – период линейных колебаний маятника. В приложении 8.3 показан способ численного вычисления полного эллиптического интеграла $K(x^2)$, который используется для теоретического определения значения периода при заданной амплитуде колебаний.

6 Определение периода линейных колебаний.

Измерение периода линейных колебаний маятника можно проводить двумя разными способами. В первом случае проводится прямое измерение периода малых колебаний маятника, когда влияние нелинейности пренебрежимо мало. Во втором случае проводится измерение угловой скорости маятника при прохождении через положение равновесия, при движении из начального состояния с углом отклонения равным 180 градусов и нулевой начальной скоростью. Период определяется косвенно – через измеренную скорость. Недостаток первого метода состоит в том, что энергия малых колебаний очень мала и поэтому оказывается существенным влияние сил трения разной природы (сухое трение, флуктуации вязкого трения о воздух связанные с потоками воздуха через спицы маятника). Во втором случае энергия маятника значительно больше, хотя потери на

трения всё равно не равны нулю. Рассмотрим второй метод более подробно. При отсутствии трения закон сохранения энергии связывает угловую скорость ω_x и максимальную амплитуду качаний маятника, которая равна 180 градусам:

$$\frac{I\omega_x^2}{2} = 2 \cdot mga$$

Обозначения такие же как и в уравнении (1). Выразим отсюда угловую скорость ω_x через угловую частоту линейных колебаний маятника ω_0 :

$$\omega_x = 2\sqrt{\frac{mga}{I}} = 2\omega_0 \quad (15)$$

Таким образом, измеряемая угловая скорость получается в два раза больше чем угловая частота линейных колебаний. Период линейных колебаний:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4\pi}{\omega_x} \quad (16)$$

Уравнение (16) справедливо при отсутствии трения, в случае вязкого трения можно оценить его вклад в качестве поправки. В приложении 8.2 выведено выражение (25) в котором учтено влияние трения в рамках первого приближения. Именно это выражение используется в работе при обработке предварительных измерений.

7 Измерения скорости и полупериода колебаний с помощью оптоэлектронного датчика.

Оптоэлектронный датчик располагается так, что спица маятника пересекает луч оптопары тогда, когда маятник проходит через положение равновесия маятника. Спица маятника имеет в месте прохождения луча угловую ширину $\Delta\varphi$; моменты пересечения спицей луча происходят так, как показано на рисунке. Здесь отмечены моменты нарушения $T1_i$ и восстановления $T2_i$ оптического тракта оптопары ($i = 1, 2, 3..$).

Зная угловой размер спицы маятника и учитывая, что этот размер достаточно мал ($\Delta\varphi \approx 0.0247$.), можно определять угловую скорость маятника в моменты прохождения положения равновесия:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_i &= \frac{\Delta\varphi}{\Delta t_i}, \\ \Delta t_i &= T2_i - T1_i \end{aligned} \quad (17)$$

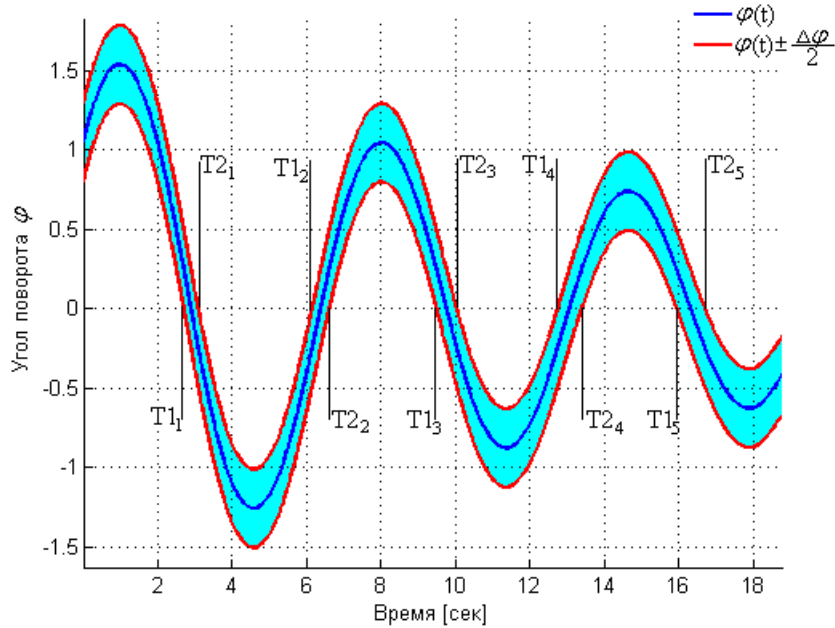


Рис. 4: Зависимость угла поворота маятника от времени – синяя кривая. Красные кривые – положение граней спицы маятника. Также показаны моменты времени, регистрируемые с помощью оптопары

Полупериод колебания:

$$T_{\frac{1}{2},i} = \frac{T2_i + T1_i}{2} - \frac{T2_{i-1} + T1_{i-1}}{2} \quad (18)$$

Эти выражения используются для определения измеряемых в опытах величин: угловой скорости и полупериода колебаний. Период колебаний определяется как сумма двух последовательных полупериодов. Соответствующая этому периоду амплитуда – как среднее арифметическое от амплитуд (формула (11в)) двух последовательных качаний маятника. Если вместо углового размера $\Delta\varphi$ в формуле (17) использовать эффективный угловой размер $\Delta\varphi_n$:

$$\Delta\varphi_n = \frac{\Delta\varphi}{\omega_0} \quad (19)$$

то угловая скорость будет определяться в безразмерных единицах.

В опытах с качанием маятника с начальной амплитудой в 180 градусов угловая скорость в положении равновесия согласно уравнению (15):

$\omega_x = 2\omega_0$, с другой стороны из (17) и (18) получаем следующее выражение для эффективного углового размера спицы $\Delta\varphi_n$:

$$\omega_x = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2\omega_0 \rightarrow 2\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\omega_0} \rightarrow \Delta\varphi_n = 2\Delta t \quad (20)$$

Формула (20) выполняется точно, если трение отсутствует, при наличии слабого вязкого трения можно сделать поправку первого приближения. В приложении 8.2 показан вывод с учётом этой поправки – выражение (26).

8 Приложение.

8.1 Учёт вязкого сопротивления при движении маятника.

Исходные выражения для связи скорости и угла:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi'^2}{2} - \cos(\varphi) &= -\beta \int \varphi' d\varphi + Const \\ 0 - \cos(\varphi_x) &= Const \\ \frac{\varphi'^2}{2} &= \cos(\varphi) - \cos(\varphi_x) - \beta \int \varphi' d\varphi \\ \varphi'^2 &= 4(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - \sin(\frac{\varphi}{2})^2) - 2\beta \int \varphi' d\varphi\end{aligned}$$

Обозначим через φ'_{-0} скорость маятника без трения (нулевое приближение), и через φ'_{-1} скорость маятника с учётом трения в первом приближении:

$$\begin{aligned}0. \quad \varphi'_{-0} &= 2\sqrt{\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - \sin(\frac{\varphi}{2})^2} \\ 1. \quad \varphi'^2_{-1} &= 4(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - \sin(\frac{\varphi}{2})^2) - 2\beta \int \varphi'_{-0} d\varphi\end{aligned}$$

Далее, для учёта трения, преобразуем интеграл скорости по углу, с учётом нулевого приближения скорости:

$$\int_0^{\varphi_x} \sqrt{\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - \sin(\frac{\varphi}{2})^2} d\varphi = \sin(\frac{\varphi_x}{2}) \int_0^{\varphi_x} \sqrt{1 - \frac{\sin(\frac{\varphi}{2})^2}{\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2}} d\varphi \quad (21)$$

Максимальный угол отклонения обозначен через φ_x . Применим замену переменной:

$$\frac{\sin(\frac{\varphi}{2})^2}{\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2} = \sin(\theta)^2, \quad d\varphi = 2 \sin(\frac{\varphi_x}{2}) \frac{\sqrt{1 - \sin(\theta)^2}}{\sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2}} d\theta$$

И дальнейшие преобразования интеграла (21) принимают вид:

$$\begin{aligned}& \sin(\frac{\varphi_x}{2}) \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin(\theta)^2} \cdot 2 \sin(\frac{\varphi_x}{2}) \frac{\sqrt{1 - \sin(\theta)^2}}{\sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2}} d\theta = \\ & 2 \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sin(\theta)^2}{\sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2}} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2 + \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - 1}{\sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2}} d\theta = \\ & 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2} d\theta + 2(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - 1) \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2}} = \\ & 2E(\frac{\pi}{2} | \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) + 2(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - 1) \cdot F(\frac{\pi}{2} | \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2)\end{aligned}$$

Здесь выделены известные специальные математические функции:

$F(\frac{\pi}{2} | \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) = K(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2}}$ - полный эллиптический интеграл первого рода

$E(\frac{\pi}{2} | \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) = E(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 \cdot \sin(\theta)^2} d\theta$ - полный эллиптический интеграл второго рода

Существует относительно простой способ численного вычисления этих функций, не требующий явного вычисления интегралов. Используя полученное выражение для интеграла (21) можно записать в первом приближении скорость маятника φ'_0 - до и φ'_1 - после текущего максимального отклонения:

$$\begin{aligned}\varphi_0'^2 &= 4 \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 + 8\beta \cdot (E(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) + (\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - 1) \cdot K(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2)) \\ \varphi_1'^2 &= 4 \sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - 8\beta \cdot (E(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) + (\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - 1) \cdot K(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2))\end{aligned}$$

Сумма квадратов скоростей в этом приближении не зависит от параметра затухания:

$$\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 = \frac{\varphi_0'^2 + \varphi_1'^2}{8} \quad (22)$$

А из разности квадратов скоростей получается оценочное выражение для параметра вязкого трения:

$$\begin{aligned}\varphi_0'^2 - \varphi_1'^2 &= 16\beta \cdot (E(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) + (\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - 1) \cdot K(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2)) \Rightarrow \\ \beta &= \frac{\varphi_0'^2 - \varphi_1'^2}{16 \cdot (E(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2) + (\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2 - 1) \cdot K(\sin(\frac{\varphi_x}{2})^2))}\end{aligned} \quad (23)$$

8.2 Полный оборот маятника.

Отдельно можно рассмотреть случай, когда максимальная амплитуда отклонения маятника составляет 180 градусов. Тогда интеграл (21) момента трения упрощается и в первом приближении скорость маятника:

$$\begin{aligned}\varphi_{-1}'^2 &= 4(1 - \sin(\frac{\varphi}{2})^2) - 4\beta \int_{-\pi}^{\varphi} \sqrt{1 - \sin(\frac{\varphi}{2})^2} d\varphi = 4(1 - \sin(\frac{\varphi}{2})^2) - 8\beta \sin(\frac{\varphi}{2}) - 8\beta = \\ &= 4(1 - \sin(\frac{\varphi}{2})) (1 + \sin(\frac{\varphi}{2})) - 8\beta (1 + \sin(\frac{\varphi}{2})) = 4(1 + \sin(\frac{\varphi}{2})) (1 - 2\beta - \sin(\frac{\varphi}{2}))\end{aligned}$$

А скорость при прохождении положения равновесия:

$$\varphi_1'^2 = 4 - 8\beta \int_{-\pi}^0 \cos(\frac{\varphi}{2}) d(\frac{\varphi}{2}) = 4(1 - 2\beta) \quad (24)$$

- при проходе от амплитуды в 180 градусов до первого пересечения положения равновесия.

Это выражение можно использовать для определения периода линейной системы:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{d\tau} \approx \frac{\Delta\varphi}{\omega_0\Delta t} = 2\sqrt{(1-2\beta)} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t 2\sqrt{(1-2\beta)}} \Rightarrow T_0 = 4\pi \frac{\Delta t}{\Delta\varphi} \sqrt{(1-2\beta)} \quad (25)$$

А также определения эффективного углового размера спицы:

$$\frac{\Delta\varphi}{\omega_0\Delta t} = \frac{\Delta\varphi_n}{\Delta t} = 2\sqrt{(1-2\beta)} \Rightarrow \Delta\varphi_n = \frac{\Delta\varphi}{\omega_0} = 2 \cdot \Delta t \cdot \sqrt{(1-2\beta)} \quad (26)$$

Эффективный угловой размер спицы $\Delta\varphi_n$ позволяет определять измеряемую угловую скорость сразу в безразмерном виде, а это очень удобно для использования уравнения (11в) для определения амплитуды качаний маятника.

8.3 Численное вычисление полного эллиптического интеграла $K(x^2)$

Здесь приводится только алгоритм вычислений, без доказательства. (Обоснование алгоритма: www.math.spbu.ru/analysis/f-doska/ellint.pdf)

На входе в алгоритм подаётся x – аргумент функции в диапазоне от 0 до 1 и последовательно выполняются вычисления:

1. $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2-x^2}}$
2. $b_0 = \sqrt{1-a_0^2}$
3. $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$
4. $b_1 = \sqrt{a_0 \cdot b_0}$

5. Если a_1 и b_1 различаются меньше чем требуемая точность, то закончить итерации и перейти к п. 7, иначе - перейти к п. 6

6. $a_0 = a_1, b_0 = b_1$, перейти к п.3

7. $K = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} \cdot \frac{1}{a_1}$

Вычисленная величина K есть приближённое значение полного эллиптического интеграла $K(x^2)$. Итерации этого алгоритма быстро сходятся – каждая итерация удваивает количество верных значащих цифр вдвое. При расчёте с помощью калькулятора достаточно провести 2-3 итерации для получения результата с 4-5 верными знаками после запятой.

Ниже показан код С-функции используемой в программе для расчёта значений полных эллиптических интегралов:

```

void ellipke(double *m, double *K, double *E, int len) // вычисление эллиптиче
{
    int ii;
    double a, b, tw;
    double a_, b_, c_, da;
    for(ii=0; ii<len; ii++)
    {
        a = 1.0/(2.0-m[ii]*m[ii]);
        b = 1.0-a;
        tw = sqrt(b);
        a_ = sqrt(a);
        c_ = 0.0;
        tw = 1.0;
        do
        {
            a_ = (a+b)/2;
            b_ = a*b;
            b_ = sqrt(b_);
            c_ += tw*a_*(a-b);
            tw *= 2.0;
            da = fabs(a-a_);
            a = a_;
            b = b_;
        } while(da>0);
        a = 1.0/(2.0-m[ii]*m[ii]);
        K[ii] = sqrt(a);
        E[ii] = a*Pi/(2*a_);
        E[ii] = (1-c_*(2.0-m[ii]*m[ii]))*K[ii];
    }
}

```

Рис. 5: Код С-функции используемой в программе для расчёта значений полных эллиптических интегралов первого и второго рода