Немного об эллиптических интегралах

А. И. Храбров

1. Длина эллипса. Попробуем посчитать длину эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ с полуосями $a>b>0$. Зададим его параметрически:

$$x(t)=a\cos t \quad \text{и} \quad y(t)=b\sin t.$$

Длина эллипса равна

$$\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt=4a\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt,$$

где $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ — эксцентриситет эллипса. Увы полученный интеграл, несмотря на свою внешнюю простоту, не выражается в элементарных функциях.

2. Длина синусоиды. С эллипсом не получилось. Попробуем посчитать длину графика одного периода синусоиды $y=a\sin\frac{x}{b}$:

$$\int\limits_0^{2\pi b}\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\cos^2\frac{x}{b}}\,dx=\int\limits_0^{2\pi}b\sqrt{1+\frac{a^2}{b^2}\cos^2 t}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{b^2+a^2\cos^2 t}\,dt=$$
$$=4\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2 t}\,dt.$$

Получился почти такой же интеграл и он опять не выражается в элементарных функциях.

3. Эллиптический интеграл второго рода. Интеграл

$$E(k)=\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt=\int\limits_0^1\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

называется *полным эллиптическим интегралом второго рода.* Через него выражаются длины эллипса и синусоиды: длина эллипса с полуосями a и b равна $4aE\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$, а длина графика одного периода синусоиды $y=a\sin\frac{x}{b}$ равна $4\sqrt{a^2+b^2}E\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

Интеграл

$$E(\varphi,k)=\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,dt=\int\limits_0^{\sin\varphi}\frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

называется *эллиптическим интегралом второго рода*. Через него можно выразить длину дуги эллипса и синусоиды. Длина дуги эллипса, заключенная между концом большой полуоси и точкой $(a,0)$ и $(a\cos t_0, b\sin t_0)$ равна $a\int\limits_0^{t_0}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt = aE(t_0,\varepsilon)$, а длина синусоиды, расположенной между точками $(0,0)$ и $(x_0, \sin x_0)$ равна

$$\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{x_0}\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}\sin^2 t}\,dt = \sqrt{a^2+b^2}E\Big(x_0, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\Big).$$

4. Лемниската. *Лемнискатой* называется геометрическое место точек плоскости, для которых произведение расстояний до n фиксированных точек (называемых фокусами) постоянно. *Лемниската Бернулли* — геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух фокусов постоянно и равно квадрату половины расстояния между фокусами.

Выведем уравнение лемнискаты Бернулли. Будем считать, что фокусы — точки с координатами $(-c,0)$ и $(c,0)$. Расстояние до них от точки (x,y) равны $\sqrt{(x\pm c)^2+y^2}$. Квадрат их произведения должен равняться c^4, откуда получаем уравнение

$$c^4 = \big((x-c)^2+y^2\big)\big((x+c)^2+y^2\big),$$

которое после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых можно записать в виде

$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2)$$

или в более компактной форме в полярных координатах

$$r^2 = 2c^2\cos 2\varphi.$$

Отметим, что φ меняется от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$ и от $\frac{3\pi}{4}$ до $\frac{4\pi}{4}$.

5. Длина лемнискаты. Заметим, что

$$r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2 = 2c^2\cos 2\varphi + \frac{2c^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{2c^2}{\cos 2\varphi}.$$

Поскольку лемниската симметрична, ее длина равна удвоенной длине правой половинки:

$$L = 2c\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\,d\varphi = 4\sqrt{2}c\int\limits_0^{\pi/4}\frac{d\,\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}.$$

Сделаем замену $\sin t = \sqrt{2}\sin\varphi$. Поскольку $\sin\varphi$ меняется от 0 до $\frac{1}{\sqrt{2}}$, t будет меняться от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Кроме того

$$\varphi = \arcsin\Big(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\Big) \quad \text{и} \quad d\varphi = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{\sin^2 t}{\sqrt{2}}}\,dt.$$

Следовательно,

$$L = 4\sqrt{2}c\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{2-\sin^2 t}} = 4c\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}}.$$

Наконец, сделаем замену $x = \cos t$, получим

$$L = 4\sqrt{2}c \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = 2\sqrt{2}c \int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

Этот интеграл выглядит совсем просто, но неопределенный интеграл также не выражается в элементарных функциях. Следуя Гауссу обозначим этот интеграл буквой ϖ, представляющей собой иногда использовавшееся до XVIII века написание буквы π.

6. Эллиптический интеграл первого рода. Интеграл

$$F(\varphi, k) = \int\limits_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = \int\limits_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

называется *эллиптическим интегралом первого рода*. А интеграл

$$K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

называется *полным эллиптическим интегралом первого рода*. В частности, длина лемнискаты Бернулли (для $c = 1$) равна $4\sqrt{2}K\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$ и $\varpi = 2K\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big)$.

Полный эллиптический интеграл первого рода иногда удобнее записывать в симметричной форме (a, $b > 0$):

$$I(a,b) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}. \tag{1}$$

Ясно, что $I(a,b) = I(b,a)$ и при $a > b$

$$I(a,b) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin^2\theta}} = \frac{1}{a}\,K\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right).$$

В частности, $\varpi = 2I(1,\sqrt{2})$. Если сделать в (1) замену $x = b\operatorname{tg}\theta$, то получится интеграл

$$I(a,b) = \int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}.$$

7. Длина гиперболы. Вычислим длину гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Зададим ее параметрически:

$$x(t) = a\operatorname{ch} t \quad \text{и} \quad y(t) = b\operatorname{sh} t.$$

Длина дуги гиперболы, заключенной между точками $(a,0)$ и $(a\operatorname{ch} t_0, b\operatorname{sh} t_0)$, равна

$$\ell = \int\limits_0^{t_0} \sqrt{a^2\operatorname{sh}^2 t + b^2\operatorname{ch}^2 t}\,dt = \int\limits_0^{t_0} \sqrt{(a^2+b^2)\operatorname{sh}^2 t + b^2}\,dt.$$

Сделаем замену переменной $\operatorname{sh} t = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{tg} \tau$, получим

$$\ell = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\cos^2\tau\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}} = \sqrt{a^2+b^2}(1-k^2) \int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\cos^2\tau\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}},$$

где $\tau_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} \operatorname{sh} t_0\right)$ и $k^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}$. Величина $\frac{1}{k}$ называется эксцентриситетом гиперболы. Несложно проверить, что

$$\ell = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\tau_0}\operatorname{tg}\tau_0 - \int_0^{\tau_0} \sqrt{1-k^2\sin^2\tau}\,d\tau + (1-k^2)\int_0^{\tau_0} \frac{d\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}}\right)$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\big(\sqrt{1-k^2\sin^2\tau_0}\operatorname{tg}\tau_0 - E(\tau_0,k) + (1-k^2)F(\tau_0,k)\big).$$

Таким образом, длина гиперболы выражается через элементарные функции и эллиптические интегралы первого и второго рода.

8. Наблюдение Гаусса. Положим для краткости

$$a_1 = \frac{a+b}{2} \quad \text{и} \quad b_1 = \sqrt{ab}.$$

Сделаем в интеграле

$$I(a_1,b_1) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(y^2+a_1^2)(y^2+b_1^2)}}$$

замену

$$y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{ab}{x}\right). \tag{2}$$

Когда y будет пробегать луч $(0,+\infty)$, x пробежит всю вещественную прямую. Кроме того,

$$dy = \frac{ab+x^2}{2x^2}\,dx, \quad \frac{dy}{\sqrt{y^2+b_1^2}} = \frac{dx}{x} \quad \text{и} \quad y^2+a_1^2 = \frac{1}{4}\frac{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}{x^2}.$$

Следовательно,

$$I(a_1,b_1) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{(y^2+a_1^2)(y^2+b_1^2)}} = \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} = I(a,b).$$

Стало быть,

$$I(a,b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

Гаусс проверял это соотношение несколько иначе. Он вводил в интеграле (1) новую переменную θ_1, определяемую равенством

$$\sin\theta = \frac{2a\sin\theta_1}{a+b+(a-b)\sin^2\theta_1}$$

и получал, что

$$I(a,b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta_1}{\sqrt{a_1^2\cos^2\theta_1 + b_1^2\sin^2\theta_1}} = I(a_1,b_1).$$

Упражнение 1. Проделайте выкладки Гаусса.

9. Среднее арифметико-геометрическое. Построим по двум положительным вещественным числам a и b последовательность

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{и} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \tag{3}$$

где $a_0 = a$ и $b_0 = b$.

Для определенности будем считать, что $a \geqslant b > 0$. Тогда

$$0 < b \leqslant b_n \leqslant b_{n+1} \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant a.$$

Таким образом, последовательность a_n убывает и ограничена снизу, а последовательность b_n возрастает и ограничена сверху. Стало быть, эти последовательности имеют пределы. Обозначим их a^* и b^*. Переходя к пределу в первом равенстве (3), получим

$$a^* = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n}{2} = \frac{a^* + b^*}{2}.$$

Следовательно, $a^* = b^*$. Данный предел называется *средним арифметико-геометрическим* чисел a и b и обозначается $\operatorname{agm}(a, b)$.

Заметим, что функция $f(a, b, \theta) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}$ непрерывна на $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] \times [0, \frac{\pi}{2}]$ при $0 < \alpha < \beta$. Поэтому функция $I(a, b) = \int\limits_0^{\pi/2} f(a, b, \theta)\, d\theta$ непрерывна по (a, b). Стало быть,

$$I(a, b) = I(a_1, b_1) = I(a_2, b_2) = \ldots = I(a_n, b_n) = I(\operatorname{agm}(a, b), \operatorname{agm}(a, b)) = \frac{\pi}{2\operatorname{agm}(a, b)}.$$

Поскольку последовательности из определения арифметико-геометрического среднего очень быстро сходятся к пределу, мы получили способ численного нахождения полных эллиптических интегралов первого рода. В частности,

$$\frac{\pi}{\varpi} = \operatorname{agm}(\sqrt{2}, 1) \approx 1,19814.$$

Упражнение 2. Докажите, что

а) $0 \leqslant a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{(a_n - b_n)^2}{4(a_{n+1} + b_{n+1})} \leqslant \dfrac{(a_n - b_n)^2}{8b}$;

б) $0 \leqslant a_n - b_n \leqslant \left(\dfrac{a - b}{8b}\right)^{2^n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} C^n(a_n - b_n) = 0$ при любом $C > 0$.

Упражнение 3. Докажите, что

$$\operatorname{agm}(a, b) = \frac{\pi}{4} \frac{a + b}{K\left(\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right)}.$$

Упражнение 4. При $t \in (0, 1)$ докажите равенство $\operatorname{agm}(1, \sqrt{1 - t^2}) = \operatorname{agm}(1+t, 1-t)$.

Упражнение 5. При $\lambda > 0$ докажите равенство

$$\operatorname{agm}(1, t) = \frac{1 + t}{2} \operatorname{agm}\left(1, \frac{2\sqrt{t}}{1 + t}\right).$$

Упражнение 6. Для трех положительных чисел $a \geqslant b \geqslant c$ определим последовательности

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}, \quad b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{b_n c_n} + \sqrt{c_n a_n}}{3} \quad \text{и} \quad c_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n},$$

где $a - 0 = a$, $b_0 = b$ и $c_0 = c$. Докажите, что последовательности $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ стремятся к одному и тому же пределу.

10. Снова интегралы второго рода. По аналогии с интегралом первого рода запишем в симметричной форме и эллиптический интеграл второго рода (a, $b > 0$):

$$J(a,b) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta}\, d\theta. \tag{4}$$

Ясно, что $J(a,b) = J(b,a)$ и при $a > b$

$$J(a,b) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\sin^2\theta}\, d\theta = a\, E\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}\right).$$

Если в (4) сделать замену $x = b \operatorname{tg}\theta$, то получится интеграл

$$J(a,b) = \frac{b^2}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{x^2 + a^2}{(x^2 + b^2)^3}}\, dx.$$

Далее будем действовать аналогично п. 8. Сделаем в интеграле

$$J(a_1,b_1) = \frac{b_1^2}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{y^2 + a_1^2}{(y^2 + b_1^2)^3}}\, dy$$

замену (2). Получим

$$J(a_1,b_1) = ab \int\limits_0^{\infty} \frac{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}}{(x^2 + ab)^2}\, dx.$$

Рассмотрим разность

$$2J\Big(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\Big) - J(a,b) - \frac{ab}{2}\, I(a,b) = \int\limits_0^{\infty} \left(\frac{2ab\sqrt{f(x)}}{(x^2 + ab)^2} - b^2\sqrt{\frac{x^2 + a^2}{(x^2 + b^2)^3}} - \frac{ab}{\sqrt{f(x)}}\right) dx,$$

где $f(x) = (x^2 + a^2)(x^2 + b^2)$. Первообразная правой части равна

$$F(x) = \left(\frac{x}{x^2 + ab} - \frac{x}{x^2 + b^2}\right) \frac{1}{\sqrt{f(x)}},$$

поэтому интеграл равен $F(x)\Big|_0^{\infty} = 0$. Стало быть,

$$2J\Big(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\Big) = J(a,b) + \frac{ab}{2}\, I(a,b).$$

Таким образом,

$$4J(a_{n+1},b_{n+1}) = 2J(a_n,b_n) + a_nb_nI(a_n,b_n) = 2J(a_n,b_n) + a_nb_nI(a,b).$$

Положим для краткости

$$\Delta_n = 2^n\big(a_n^2I(a,b) - 2J(a_n,b_n)\big).$$

Тогда

$$\Delta_n - \Delta_{n+1} = 2^n(a_n^2 + a_nb_n - 2a_{n+1}^2)I(a,b) = 2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2)I(a,b).$$

Следовательно,

$$\Delta_0 = \lim_{n\to\infty}\Delta_n + I(a,b)\sum_{n=0}^{\infty}2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2).$$

Заметим далее, что

$$2^n\Delta_n = 2^n\big(a_n^2I(a_n,b_n) - J(a_n,b_n)\big) = 2^n\int\limits_0^{\pi/2}\frac{(a_n^2-b_n^2)\sin^2\theta}{\sqrt{a_n^2\cos^2\theta + b_n^2\sin^2\theta}}\,d\theta.$$

Последний интеграл положителен и, очевидно, не превосходит

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{a_n^2-b_n^2}{b} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2b}.$$

Но $2^n(a_{n-1}-b_{n-1})^2 \to 0$ по упражнению 2. Следовательно, $2^n\Delta_n \to 0$. Таким образом,

$$a^2I(a,b) - J(a,b) = \Delta_0 = I(a,b)\sum_{n=0}^{\infty}2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2)$$

или что тоже самое

$$J(a,b) = \Big(a^2 - \sum_{n=0}^{\infty}2^{n-1}(a_n^2-b_n^2)\Big)I(a,b). \tag{5}$$

Скорость сходимости в последней формуле лишь немного хуже, чем в формуле для $I(a,b)$, поэтому численно вычислять эллиптические интегралы второго рода также можно достаточно эффективно.

11. Тождество Лежандра. Существуют и другие формулы, связывающие эллиптические интегралы первого и второго рода. Наиболее известное среди них — тождество Лежандра:

$$E(\sin\varphi)K(\cos\varphi) + E(\cos\varphi)K(\sin\varphi) - K(\sin\varphi)K(\cos\varphi) = \frac{\pi}{2}.$$

Ниже мы докажем тождество Лежандра, оставив несложные, но длинные вычисления читателю. Положим $x = \sin^2\varphi$ и

$$L(x) = E(\sqrt{x})K(\sqrt{1-x}) + E(\sqrt{1-x})K(\sqrt{x}) - K(\sqrt{x})K(\sqrt{1-x}). \tag{6}$$

Докажем, что $L'(x) = 0$.

С помощью дифференцирования под знаком интеграла легко проверить равенства

$$\frac{dE(\sqrt{x})}{dx} = \frac{E(\sqrt{x}) - K(\sqrt{x})}{2x} \quad \text{и} \quad \frac{dE(\sqrt{1-x})}{dx} = \frac{K(\sqrt{1-x}) - E(\sqrt{1-x})}{2(1-x)}.$$

Найдем производную функции $K(\sqrt{x})$:

$$\frac{dK(\sqrt{x})}{dx} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{2(1 - x\sin^2 t)^{3/2}}\,dt = \frac{1}{2x}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{(1 - x\sin^2 t)^{3/2}} - \frac{K(\sqrt{x})}{2x}.$$

Поскольку

$$\frac{d}{dt}\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{1 - x\sin^2 t}} = \frac{\sqrt{1 - x\sin^2 t}}{x} - \frac{1 - x}{x(1 - x\sin^2 t)^{3/2}},$$

имеет место цепочка равенств

$$\frac{dK(\sqrt{x})}{dx} = \frac{E(\sqrt{x})}{2x(1-x)} - \frac{1}{2(1-x)}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{1 - x\sin^2 t}}\right)dt - \frac{K(\sqrt{x})}{2x} = \frac{E(\sqrt{x})}{2x(1-x)} - \frac{K(\sqrt{x})}{2x}.$$

Таким образом,

$$\frac{dK(\sqrt{x})}{dx} = \frac{E(\sqrt{x})}{2x(1-x)} - \frac{K(\sqrt{x})}{2x} \quad \text{и} \quad \frac{dK(\sqrt{1-x})}{dx} = -\frac{E(\sqrt{1-x})}{2x(1-x)} + \frac{K(\sqrt{1-x})}{2(1-x)}.$$

Если продифференцировать равенство (6), воспользовавшись найденными формулами для производных функций $E(\sqrt{x})$, $E(\sqrt{1-x})$, $K(\sqrt{x})$ и $K(\sqrt{1-x})$, то после приведения подобных слагаемых получится 0. Стало быть, $L'(x) = 0$.

Теперь установим, что $\lim\limits_{x\to 0} L(x) = \frac{\pi}{2}$. Для этого заметим, что при $x \to 0$

$$E(\sqrt{x}) - K(\sqrt{x}) = -x\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1 - x\sin^2 t}}\,dt = O(x) \quad \text{и}$$

$$K(\sqrt{1-x}) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - (1-x)\sin^2 t}} \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - (1-x)}} = O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} L(x) &= \big(E(\sqrt{x}) - K(\sqrt{x})\big)K(\sqrt{1-x}) + E(\sqrt{1-x})K(\sqrt{x}) = \\ &= O(\sqrt{x}) + E(\sqrt{1-x})K(\sqrt{x}) \to E(1)K(0) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Таким образом, $L(x) = \frac{\pi}{2}$ и тождество Лежандра доказано.

Упражнение 7. Проделайте опущенные выкладки.

Положим в тождестве Лежандра $\varphi = \frac{\pi}{4}$, получим соотношение

$$2E\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)K\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) - K\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 = \frac{\pi}{2}$$

или, что тоже самое,

$$I\Big(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\bigg(2J\Big(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) - I\Big(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\bigg) = \frac{\pi}{2}.$$

12. Алгоритм Брента–Саламина. С арифметико-геометрическим средним связан очень быстрый алгоритм вычисления числа π. По сути все было известно еще Лежандру, но именно как алгоритм для вычисления числа π он появился лишь в 1975 году.

Положим в соотношении (5) $a = a_0 = 1$ и $b = b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, получим равенство

$$J\Big(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \Big(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1}(a_n^2 - b_n^2)\Big) I\Big(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Следовательно,

$$\frac{\pi}{2} = \left(2J\Big(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) - I\Big(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)\right) I\Big(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n}(a_n^2 - b_n^2)\right) I\Big(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2 =$$
$$= \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n}(a_n^2 - b_n^2)\right) \left(\frac{\pi}{2\,\mathrm{agm}(1, \frac{1}{\sqrt{2}})}\right)^2.$$

А значит,

$$\pi = \frac{\mathrm{agm}(1, \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{1 - \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k (a_k^2 - b_k^2)}.$$

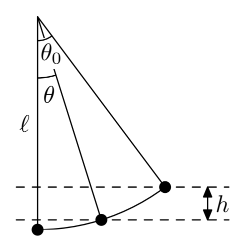
Таким образом, $\pi = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, где $u_n = \dfrac{2a_{n+1}^2}{1 - \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k (a_k^2 - b_k^2)}$. Первые три члена этой последовательности равны

$$3{,}140\ldots, \quad 3{,}14159264\ldots \quad \text{и} \quad 3{,}14159265358979323 82\ldots$$

На каждом шагу количество правильных цифр удваивается. Именно с помощью этого алгоритма в апреле 2009 года было вычислено 2,5 триллиона цифр числа π.

13. Математический маятник. *Математическим маятником* называется механическая система, состоящая из точечного груза, подвешенного на невесомой нерастяжимой нити в поле тяготения.

Пусть масса груза равна m, а длина нити — ℓ. Маятник повернули на угол θ_0 и отпустили. Будем считать, что в этом положении маятника потенциальная энергия равна нулю. Тогда сумма кинетической и потенциальной энергии в любой момент времени будет равняться нулю. Когда груз опустится на h, потенциальная энергия будет равна $-mgh$, а кинетическая — $\frac{1}{2}mv^2$. Таким образом,



$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg\ell(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Следовательно,

$$v = \sqrt{2g\ell(\cos\theta - \cos\theta_0)}.$$

Поскольку $v = \ell\theta'$, получаем уравнение колебания маятника

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_0)}.$$

Найдем полный период колебаний маятника. Для этого проинтегрируем равенство

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}.$$

В результате получим

$$T = 4\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int\limits_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} = 4\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int\limits_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}} = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int\limits_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta_0}{2}}}.$$

Сделаем в последнем интеграле замену $\sin\dfrac{\theta}{2} = \sin\dfrac{\theta_0}{2}\sin t$:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2 t}} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}K\Big(\sin^2\frac{\theta_0}{2}\Big).$$

Упражнение 8. Найдите период обращения маятника, если скорость маятника в нижней точки равна v_0.

14. Эллиптические интегралы. Интеграл

$$\Pi(c;\varphi,k) = \int\limits_0^{\varphi}\frac{dt}{(1+c\sin^2 t)\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} = \int\limits_0^{\sin\varphi}\frac{dx}{(1+cx^2)\sqrt{(1-k^2x^2)(1-x^2)}}$$

называется *эллиптическим интегралом третьего рода.*

Эллиптическими интегралами называются интегралы вида

$$\int R(x,y)\,dx,$$

где $R(x,y)$ рациональная функция и $y^2 = p(x)$ для некоторого многочлена $p(x)$ третьей или четвертой степени. В большинстве своем они не выражаются в элементарных функциях. Однако с помощью преобразований их можно свести к эллиптическим интегралам первого, второго и третьего рода. Подробности можно найти, например, во втором томе Фихтенгольца.

15. Список литературы.

Дальнейшую информацию об эллиптических интегралах и *эллиптических функциях* (функциях обратных к эллиптическим интегралам) можно найти в приведенных ниже источниках.

[1] *Н. И. Ахиезер* Элементы теории эллиптических функций. М., Наука, 1970.

[2] *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат* Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1987.

[3] *В. В. Прасолов, Ю. П. Соловьев* Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М., Факториал, 1997.

[4] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон* Курс современного анализа. Часть 2. Трансцендентные функции. М. Мир, 1963 или М. УРСС, 2010.

[5] *G. Almkvist, B. Berndt* Gauss, Landen, Ramanujan, the Arithmetic-Geometric Mean, Ellipses, π, and the Ladies Diary // American Math. Monthly, Vol. 95, №7 (1988), P. 585–608.