

**1А.** В цилиндрический сосуд радиуса  $R$  и высоты  $H$  налита вода до высоты  $h$ . При какой скорости вращения  $\omega$  сосуда вокруг вертикальной оси вода начнёт выплёскиваться через край? Какому соотношению должны удовлетворять значения  $H$  и  $h$ , чтобы при этом не стало обнажаться дно сосуда?

**2А.** Изображённое на рисунке устройство (центробежный регулятор) состоит из муфты массой  $M$ , способной перемещаться без трения по вертикальному вращающемуся валу, к которому в точке  $O$  прикреплены с помощью стержней грузы с одинаковыми массами  $m$  и сама муфта. Все соединения у всех стержней — шарнирные. Стержни имеют одинаковую длину  $a$  и массу, пренебрежимо малую по сравнению с массами грузов и муфты. Найти угловую скорость  $\omega$  вращения вала, при которой угол между валом и стержнями равен  $\varphi$ . Найти ограничения на  $\omega$ , при котором устройство работоспособно (т.е.  $\varphi$  зависит от  $\omega$ ).

**3А.** Груз в виде сплошного цилиндра массой  $m$ , который не должен испытывать ударных нагрузок при разгоне и торможении, закреплён в кузове автомобиля с помощью двух пружин, связанных с горизонтальной осью, проходящей по оси цилиндра, вокруг которой он может свободно вращаться. При наклоне кузова под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, частота колебаний, при которых цилиндр катается по кузову без проскальзывания, равна  $\omega = \sqrt{16k/11m}$ . Определить отношение массы автомобиля  $M$  к массе цилиндра, если при этих колебаниях автомобиль находится на горизонтальной поверхности и может перемещаться по ней без трения. Жёсткость каждой пружины равна  $k$ .

**4А.** При какой высоте  $H$  сплошного конуса частота его крутильных колебаний вокруг произвольной оси, проходящей через центр масс, будет равна частоте крутильных колебаний шара радиуса  $R_0$  вокруг оси, проходящей через центр шара? Шар и конус изготовлены из материалов с одинаковой плотностью и подвешиваются на проволоках с равными модулями кручения.

**5А.** Для изучения механического воздействия хладагента на охлаждаемый им цилиндрический сосуд используется следующая механическая модель: на боковой поверхности вертикально расположенного сплошного цилиндра радиусом  $R$  и массой  $M$ , который может без трения вращаться вокруг своей оси, сделан желоб в форме винтовой линии, в верхнее отверстие которого опускают без начальной скорости маленький массивный шарик, после чего он начинает скользить без трения по желобу. При моделировании оказалось, что при опускании шарика на расстояние, равное шагу  $h$  винтовой линии, цилиндр повернулся на угол  $\pi/2$ . Определить момент силы  $M_c$ , вращающий цилиндр. Шаг винтовой линии  $h = 2\pi R$ .

**1Б.** В цилиндрический сосуд радиуса  $R$  и высоты  $H$  налита вода до высоты  $h$ . Определить угловую скорость вращения  $\omega$  сосуда вокруг вертикальной оси, при которой дно сосуда обнажится в его центре. Найти условие, чтобы при этом вода не выплёскивалась бы через край сосуда.

**2Б.** Однородный стержень изогнут под прямым углом и посредством оси, перпендикулярной плоскости изгиба, прикреплен в месте изгиба к вращающемуся вертикальному валу. При какой скорости вращения  $\omega$  угол отклонения от вертикали оси части стержня длиной  $l_1$  равен  $\varphi$  при общей длине стержня  $l_1 + l_2$ , ( $l_2 > l_1$ ). Найти ограничения на  $\varphi$ , при которых  $\varphi$  ещё зависит от  $\omega$ .

**3Б.** Груз, являющийся неоднородным шаром с переменной по радиусу плотностью, для предотвращения ударных нагрузок при разгоне и торможении тележки закреплён на ней с помощью двух пружин, связанных с горизонтальной осью, проходящей через центр шара, вокруг которой он может свободно вращаться. Настил тележки наклонён под углом  $\alpha = 30^\circ$  к горизонту, радиус шара равен  $R$ , масса шара  $m$ , масса тележки  $M = 3m$ , жёсткость каждой пружины  $k$ . Частота колебаний, при которых шар катается по настилу без проскальзывания, равна  $\omega = \sqrt{2k/m}$ . Определить момент инерции шара относительно оси вращения. Тележка находится на горизонтальной поверхности и может перемещаться по ней без трения.

**4Б.** При каком радиусе  $R$  основания сплошного конуса период его крутильных колебаний вокруг произвольной оси, проходящей через центр масс, будет равен периоду крутильных колебаний куба с длиной ребра  $l$  вокруг диагональной оси, проходящей через центр куба? Куб и конус изготовлены из материалов с одинаковой плотностью и подвешиваются на проволоках с равными модулями кручения.

**5Б.** Для изучения механического воздействия хладагента на охлаждаемый им цилиндрический сосуд используется следующая механическая модель: на боковой поверхности вертикально расположенного сплошного цилиндра радиусом  $R$  и массой  $M$ , который может без трения вращаться вокруг своей оси, сделан желоб в форме винтовой линии, в верхнее отверстие которого опускают без начальной скорости маленький шарик массой  $m = M/6$ , после чего он начинает скользить без трения по желобу. Когда шарик опустился на расстояние, равное шагу винтовой линии, отношение угловой скорости цилиндра  $\omega$  к относительной скорости шарика  $u$  стало равным  $\omega/u = (8R)^{-1}$ . Найти угол поворота цилиндра  $\varphi$  и момент силы  $M_c$ , вращающий цилиндр.